

混沌時空中粒子的產生 Particle Productions in Chaotic Spacetimes

計畫編號：NSC 88-2112-M-032-004

執行期限：87年8月1日至88年7月31日

主持人：曹慶堂 淡江大學物理系

一、中文摘要

在這個報告中，我們考慮各類微擾的 Bianchi-I 宇宙模型，並計算出在這些宇宙模型中，所產生的粒子的數目和能譜。

關鍵詞：粒子的產生、Bianchi-I 宇宙模型、微擾法

Abstract

In this report we consider the various perturbed Bianchi-I universes. We also calculate the number and the energy spectrum of particles produced in these universes.

Keywords: Particle production, Bianchi-I universe, Perturbation

二、緣由與目的

在隨時間變化的空間中，可能會有粒子的產生，在六、七十年代 Parker[1] 對於這個現象進行很詳細的研究。在黑洞的研究方面，這個現象最有名的應用是關於 "Hawking 輻射"[2]，大致上可以看成是從平坦空間到黑洞空間的變化所產生的各種粒子。在宇宙學的研究方面，則是應用於早期宇宙，在接近大爆炸起點，膨脹時所產生的粒子，這些粒子後來便演變成現宇宙中的物質[3]。

現在為止關於各宇宙模型中粒子產生的研究，多集中於均勻並各向同性，即 Friedmann-Robertson-Walker 的宇宙模型，尤其是膨脹極快的 inflationary 宇宙[4]，它所產生的重力子，即現在宇宙的背景重力波，會對宇宙背景輻射有所影響，這已可以把一些 inflationary 宇宙模

型淘汰掉[5]。

在 inflation 以前更早期的宇宙，未必是均勻或各向同性的，Zeldovich-Starobinsky 就對各向不同性的 Bianchi-I 宇宙所產生的純量粒子進行研究[6]，並發現這些粒子的產生會使各向不同性的性質，很快的消失。另外，我也曾針對各向不同性的 Bianchi-I 宇宙的重力波進行研究[7]，發現它的偏振並不像各向同性的宇宙中，等於兩個純量場，而且會相互作用。故此在各向不同性的宇宙中，重力波的產生跟純量粒子完全不一樣。

更有趣的是有一些各向不同性的宇宙模型，如 mixmaster 宇宙[8]，即各向不同性又有彎曲空間切面的 Bianchi-IX 宇宙在接近初始奇異點時，會產生混沌的現象[9]，由於 Einstein 方式是非常非線性，所以混沌的解應該是泛例而不是特例[10]。因此，我們希望能詳細研究非各向的宇宙模型，並考慮它們粒子產生的情形。

在這裏我們報告對於 Bianchi-I 宇宙模型進一步的研究，為了得到較分析性的結果，我們用微擾方法去考慮略偏離各向同性 Robertson-Walker 宇宙模型的情況，作為 Bianchi-I 模型的一種近似。利用 Birrell 和 Davies[11]的方法，去計算在這些宇宙模型中，純量粒子產生的現象，以及它們的能譜。

三、結果和討論

關於 Bianchi-I 宇宙模型的計算，我們取度規為

$$ds^2 = C \left[\eta^2 - \sum_{i=1}^3 (1 + h_i(\eta)) dx_i^2 \right] \quad (1)$$

其中 $h_i(\eta)$ 為微小量，並滿足

$$\sum_{i=1}^3 h_i(\eta) = 0 \quad (2)$$

而 η 為 conformal 時間

$$t = \int^{\eta} \sqrt{C(\eta')} d\eta' \quad (3)$$

考慮愛恩斯坦方程、能量守恆方程和狀態方程後，我們可求得當 $\gamma \neq -\frac{1}{3}$ ，

$$C(\eta) = \left[\frac{1+3\gamma}{4} \sqrt{\frac{32\pi\alpha}{3}} \eta + \frac{1+3\gamma}{4} C_0 \right]^{\frac{4}{1+3\gamma}} \quad (4)$$

而當 $\gamma = -\frac{1}{3}$ ，

$$C(\eta) = C_0 \exp \left[\sqrt{\frac{32\pi\alpha}{3}} \eta \right] \quad (5)$$

其中 α 、 C_0 和 γ 均為常數。另外當 $\gamma \neq \frac{1}{3}$ ，1 時

$$h_i(\eta) = \frac{4\delta_i}{3(\gamma-1)} \sqrt{\frac{3}{32\pi\alpha}} [C(\eta)]^{\frac{3(\gamma-1)}{4}} + h_{i0} \quad (6)$$

當 $\gamma = 1$ ，

$$h_i(\eta) = \delta_i \sqrt{\frac{32\pi\alpha}{3}} \ln[C(\eta)] + h_{i0} \quad (7)$$

當 $\gamma = -\frac{1}{3}$ ，

$$h_i(\eta) = \delta_i \left(-\sqrt{\frac{\alpha}{32\pi}} \right) [C(\eta)]^{-1} + h_{i0} \quad (8)$$

其中 δ_i 和 h_{i0} 為常數，並

$$\sum_{i=1}^3 h_{i0} = \sum_{i=1}^3 \delta_i = 0 \quad (9)$$

這是線性微擾 Bianchi-I 宇宙模型的完全解。

至於在以上的宇宙模型中，純量粒子產生的現象，我們先設粒子波函數為

$$u(\eta, \vec{x}) = C^{-1/2}(\eta) \chi(\eta) Y(\vec{x})$$

Klein-Gordon 方程變化 $Y(\vec{x})$ 的 Laplace 方程，和 $\chi(\eta)$ 的

$$\frac{d^2 \chi}{d\eta^2} + \left[k^2 + m^2 C + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) C R_\gamma - \sum_{i=1}^3 h_i k_i^2 \right] \chi = 0 \quad (11)$$

其中 \vec{k} 為粒子的動量， m 為其質量， ξ 為常數，

$$R_\gamma = \frac{3}{2C^3} \left[2C \frac{d^2 C}{d\eta^2} - \left(\frac{dC}{d\eta} \right)^2 \right] \quad (12)$$

設當 $\eta \rightarrow \eta_1$ ， $\chi(\eta) \rightarrow \chi_{in}(\eta)$ 和 $\eta \rightarrow \eta_2$ ， $\chi(\eta) \rightarrow \chi_{out}(\eta)$ ，經過 Bogolubov 變換，

$$\chi_{out}(\eta) = \alpha_k \chi_{in}(\eta) + \beta_k \chi_{in}^*(\eta) \quad (13)$$

利用方程式(4)至(8)，我們得到

$$\beta_k = -\frac{i}{2\omega} \int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{-2i\omega\eta} V(\eta) d\eta \quad (14)$$

其中

$$V(\eta) = \sum_{i=1}^3 k_i^2 \left[\frac{4\delta_i}{3(\gamma-1)} \sqrt{\frac{3}{32\pi\alpha}} (C)^{\frac{3(\gamma-1)}{4}} + h_{i0} \right] - \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \left[8\pi\alpha(1-3\gamma) (C)^{\frac{-(1+3\gamma)}{2}} \right] \quad (15)$$

$$\omega^2 = k^2 + m^2 C(\eta_2) \quad (16)$$

從方程(14)的結果，粒子數 n 和總能 ρ 可以表示成

$$n = \frac{1}{(2\pi)^3 C^{3/2}} \int |\beta_k|^2 d^3 k \quad (17)$$

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^3 C^2} \int |\beta_k|^2 \omega d^3 k \quad (18)$$

這裏我們計算出在微擾的 Bianchi-I 宇宙模型中粒子的產生。當然，我們希望能更進一步考慮其他 Bianchi 類型的宇宙，並探討對其粒子產生和 backreaction 等等的問題。

四、計劃成果自評

這裏我們報告關於在微擾 Bianchi-I 宇宙模型中，粒子產生現象的研究，這項成果使我們對於非各向同性的宇宙中，粒子產生的數目和能譜，有了更深入的了解。但這可以祇是說我們預期的目標的一部份，關於其他非各向同性的宇宙模型的問題，我們會繼續進行研究和探討。

五、參考文獻

- [1] L. Parker, *Phys. Rev.*, **183** (1969) 1057.
- [2] S. W. Hawking, *Nature* (London), **248** (1974) 30.
- [3] E. W. Kolb and M. S. Turner, "The Early

Univers" (Addison-Wesley, Redwood City, Calif. 1990).

- [4] L.P.Grishchuk, *Phys. Rev.*, D48 (1993) 3513.
- [5] L.P.Grishchuk, *Phys. Rev. Lett.*, 70 (1993) 2371.
- [6] Ya.B.Zeldovich and A.A.Speliotopoulos, *JETP Lett.*, 26 (1977) 252.
- [7] H.T.Cho and A.D.Speliotopoulos, *Phys. Rev.* D52 (1995) 5445.
- [8] C.W.Misner, *Phys. Rev. Lett.*, 22 (1969) 1071.
- [9] J.D.Barrow, *Phys. Rep.*, 85 (1982) 1.
- [10] H.G.Schuster, "*Deterministic Chaos: an Introduction*" (VCH 1995).
- [11] N.D.Birrell and P.C.W.Davies, "*Quantum Fields in Curved Space*" (Cambridge University Press, Cambridge 1982).