

淡江大學化學工程與材料工程學系碩士班

碩士論文

指導教授：何啟東 博士

迴流效應於管壁正弦熱通量之逆流型套管
熱交換器的研究

The Recycle Effects on Heat Transfer in Laminar
Counterflow Concentric-Tube Heat Exchangers with
Sinusoidal Wall Fluxes

研究生：楊贄銘 撰

中華民國 95 年 6 月

誌謝

時光匆匆飛逝，在淡江兩年的研究所歲月即將結束，首先衷心感謝指導教授何啟東博士在這兩年來在各方面所給予的關懷及耐心指引與細心指導，讓我於研究期間對學問及為人處事態度均有所啟發與進步，並對論文提供許多寶貴意見使本論文得以順利完成，在此致上我由衷的感謝。

同時亦感謝成功大學化工系蔡少偉博士及本系葉和明博士於百忙中撥空審閱本文並親臨指導，感激不盡。對於系上師長在課程上的指導亦表感謝之意。此外非常感謝實驗室博士班學長家展、志偉及宗慶在課業及論文上的協助及幫忙，更感謝實驗室已畢業學長育權、士誠、俊傑、育睿及同學瓊徵、立謙在生活上的諸多幫忙，當然還要感謝實驗室學弟政融、君豪、治強在忙於修課之餘，仍然撥出時間協助幫忙，才能使得論文得以在百般困難中順利完成。

最後，要特別感謝父母、家人的支持與鼓勵。僅以此文獻給所有關心我、幫助我的人。

論文名稱：迴流效應於管壁正弦熱通量

頁數: 191

之逆流型套管熱交換器的研究

校系(所)組別：淡江大學 化學工程與材料工程 學系(研究所) A 組

畢業時間及提要別： 94 學年度第 2 學期 碩士學位論文提要

研究生： 楊贄銘

指導教授： 何啟東 博士

論文提要內容：

本研究是設計圓形管加裝一可忽略熱阻之隔板，使之成為一組外管壁熱通量為正弦函數且具有迴流裝置之逆流型套管熱交換器，此系統所推導出的數學模型將產生一組共軛偏微分方程式，是屬於共軛格拉茲問題(conjugated Graetz problem)，本研究以近似解(approximation method)並利用弗賓納斯法(Frobenius method)來求解，可獲得其管內溫度分佈及納塞數(Nusselt number)，並探討迴流效應對雙套管間的熱傳效率之影響，再將其結果與單行程無隔板系統其熱量傳送作比較，以驗證二行程系統的熱傳效率提升。

預混效應及流體流速是影響二行程熱傳效率的兩個因素，本研究討論兩者對系統的影響。結果顯示，本系統在格拉茲數大時，其效率提昇率有明顯改善，而不同的隔板位置對系統之間的效率亦有顯著影響。同時在本文中，迴流系統因隔板裝置及不同的迴流比值而增加的能源消耗率也將與單行程系統作比較，以探討雙套管之加熱系統在低能源消耗率時，熱傳效率改善之最佳操作設計。

Title of Thesis

Total pages :191

The Recycle Effects on Heat Transfer in Laminar Counterflow Concentric-Tube Heat Exchangers with Sinusoidal Wall Fluxes.

Key words : Conjugated Graetz problem, External recycle, Concentric tube, Sinusoidal wall fluxes, Frobenius method

Name of Institute : Graduate Institute of Chemical and Materials Engineering,
Tamkang University

Graduate date : June , 2006

Degree conferred : Master

Name of student : Chih-Ming Yang

Advisor : Dr. Chii-Dong Ho

楊贇銘

Abstract :

The new device of double-pass concentric-tube heat exchangers with sinusoidal wall fluxes and external recycle has been developed theoretically in the present study. The approximation solutions to the resultant mathematical formulations for such conjugated Graetz problems were achieved by using the orthogonal principle and Frobenius method. The theoretical results of the temperature distribution and heat transfer efficiency are represented graphically and compared with those in single-pass devices (without an inner tube inserted) of the same working dimensions. The results show that introducing recycle operation can enhance the heat-transfer efficiency in designing double-pass concentric-tube heat exchangers with sinusoidal wall heat fluxes. The influences of the inner tube location and Graetz number on the heat-transfer enhancement and power consumption increment have also been discussed.

目錄

中文摘要	I
英文摘要	II
目錄	III
表目錄	VI
圖目錄	X
符號說明	XX
第一章 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 迴流效應對系統的影響	2
1.3 研究動機	3
1.4 研究架構	4
第二章 文獻回顧	5
2.1 文獻回顧	5
2.2 格拉茲問題	7
第三章 基本理論	10
3.1 二行程無迴流模型之理論分析	19
3.2 末端出口模型之理論分析	26
3.3 出口迴流至末端模型之理論分析	32

3.4	末端迴流至入口模型之理論分析.....	38
3.5	內外層等體積流動模型之理論分析.....	44
3.6	熱傳效率的改善.....	50
3.7	能源消耗之增加率問題.....	52
第四章 結果討論.....		55
4.1	二行程無迴流模型之結果討論.....	66
4.2	末端出口模型之結果討論.....	79
4.3	出口迴流至末端模型之結果討論.....	97
4.4	末端迴流至入口模型之結果討論.....	115
4.5	內外等體積流動模型之結果討論.....	133
4.6	增加的能源消耗問題.....	151
第五章 結論與建議.....		155
5.1	二行程無迴流模型.....	155
5.2	末端出口模型.....	156
5.3	出口迴流至末端模型.....	156
5.4	末端迴流至入口模型.....	157
5.5	內外等體積流動模型.....	158
5.6	五種模型之比較.....	158
5.7	熱傳效率與能源消耗之比較.....	160
5.8	未來研究方向.....	171
參考文獻.....		173
附錄(一).....		178

附錄(二) 181
附錄(三) 187



表目錄

表(一)	二行程無迴流裝置內管進外管出模型之級數解收斂情形 當 $n = 70$ 和 $n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$	56
表(二)	二行程無迴流裝置外管進內管出模型之級數解收斂情形 當 $n = 70$ 和 $n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$	56
表(三)	末端出口內管進內管出模型之級數解收斂情形當 $n = 70$ 和 $n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$	57
表(四)	末端出口外管進外管出模型之級數解收斂情形當 $n = 70$ 和 $n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$	57
表(五)	出口迴流至末端內管進外管出模型之級數解收斂情形當 $n = 70$ 和 $n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$	58
表(六)	出口迴流至末端外管進內管出模型之級數解收斂情形當 $n = 70$ 和 $n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$	58
表(七)	末端迴流至入口內管進外管出模型之級數解收斂情形當 $n = 70$ 和 $n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$	59
表(八)	末端迴流至入口外管進內管出模型之級數解收斂情形當 $n = 70$ 和 $n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$	59
表(九)	內外等體積內管進外管出模型之級數解收斂情形當 $n = 70$ 和 $n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$	60
表(十)	內外等體積外管進內管出模型之級數解收斂情形當 $n = 70$ 和 $n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$	60
表(十一)	二行程無迴流裝置內管進外管出模型以式(B4)之泰勒展開 式收斂情形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$	61

表(十二)	二行程無迴流裝置外管進內管出模型以式(B4)之泰勒展開式收斂情形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$	61
表(十三)	末端出口內管進內管出模型以式(B4)之泰勒展開式收斂情形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$	62
表(十四)	末端出口外管進外管出模型以式(B4)之泰勒展開式收斂情形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$	62
表(十五)	出口迴流至末端內管進外管出模型以式(B4)之泰勒展開式收斂情形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$	63
表(十六)	出口迴流至末端外管進內管出模型以式(B4)之泰勒展開式收斂情形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$	63
表(十七)	末端迴流至入口內管進外管出模型以式(B4)之泰勒展開式收斂情形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$	64
表(十八)	末端迴流至入口外管進內管出模型以式(B4)之泰勒展開式收斂情形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$	64
表(十九)	內外等體積內管進外管出模型以式(B4)之泰勒展開式收斂情形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$	65
表(二十)	內外等體積外管進內管出模型以式(B4)之泰勒展開式收斂情形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$	65
表(二十一)	二行程無迴流裝置內管進外管出模型以隔板位置為參數之熱傳效率增加百分比.....	78
表(二十二)	二行程無迴流裝置外管進內管出模型以隔板位置為參數之熱傳效率增加百分比.....	78
表(二十三)	末端出口內管進內管出模型以迴流比值及隔板位置為參數之熱傳效率增加百分比.....	96
表(二十四)	末端出口外管進外管出模型以迴流比值及隔板位置為參	

數之熱傳效率增加百分比.....	96
表(二十五) 出口迴流至末端內管進外管出以迴流比值及隔板位置為 參數之熱傳效率增加百分比.....	114
表(二十六) 出口迴流至末端外管進內管出以迴流比值及隔板位置為 參數之熱傳效率增加百分比.....	114
表(二十七) 末端迴流至入口內管進外管出以迴流比值及隔板位置為 參數之熱傳效率增加百分比.....	132
表(二十八) 末端迴流至入口外管進內管出以迴流比值及隔板位置為 參數之熱傳效率增加百分比.....	132
表(二十九) 內外等體積內管進外管出以迴流比值及隔板位置為參數 之熱傳效率增加百分比.....	150
表(三十) 內外等體積外管進內管出以迴流比值及隔板位置為參數 之熱傳效率增加百分比.....	150
表(三十一) 二行程無迴流裝置系統內管進外管出與外管進內管出不同 隔板位置的能源消耗增加率.....	152
表(三十二) 末端出口內管進內管出模型不同迴流比值及隔板位置的 能源消耗增加率.....	152
表(三十三) 末端出口外管進外管出模型不同迴流比值及隔板位置的 能源消耗增加率.....	153
表(三十四) 出口迴流至末端內管進外管出系統與末端迴流至入口外 管進內管出系統不同迴流比值及隔板位置的能源消耗增 加率.....	153
表(三十五) 出口迴流至末端外管進內管出系統與末端迴流至入口內 管進外管出系統不同迴流比值及隔板位置的能源消耗增 加率.....	154

表(三十六) 內外等體積內管進外管出系統與內外等體積外管進內管
出系統不同迴流比值及隔板位置的能源消耗增加率.154

表(三十七) 不同隔板位置及迴流比值之最佳操作形式之比較.....172

表(三十八) 不同迴流型式之 B' 與 B'' 值.....181



圖目錄

圖(3.0-1) 求解流程圖.....	18
圖(3.1-1) 二行程無迴流之內管進外管出系統.....	20
圖(3.1-2) 二行程無迴流之外管進內管出系統.....	25
圖(3.2-1) 末端出口模型之內管進內管出系統.....	27
圖(3.2-2) 末端出口模型之外管進外管出系統.....	31
圖(3.3-1) 出口迴流至末端模型之內管進外管出系統.....	33
圖(3.3-2) 出口迴流至末端模型之外管進內管出系統.....	37
圖(3.4-1) 末端迴流至入口模型之內管進外管出系統.....	39
圖(3.4-2) 末端迴流至入口模型之外管進內管出系統.....	43
圖(3.5-1) 內外等體積流動模型之內管進外管出系統.....	45
圖(3.5-2) 內外等體積流動模型之外管進內管出系統.....	49
圖(4.1-1) 二行程無迴流裝置內管進外管出，軸向位置與管壁溫度於 不同格拉茲數及隔板位置之關係.....	68
圖(4.1-2) 二行程無迴流裝置內管進外管出，軸向位置與納塞數於不 同格拉茲數及隔板位置之關係.....	69
圖(4.1-3) 二行程無迴流裝置內管進外管出，格拉茲數與平均納塞數 於不同隔板位置之關係.....	70
圖(4.1-4) 二行程無迴流裝置內管進外管出，隔板位置與平均納塞數 於不同格拉茲數之關係.....	71
圖(4.1-5) 二行程無迴流裝置內管進外管出，格拉茲數與熱傳效率百 分比於不同隔板位置之關係.....	72
圖(4.1-6) 二行程無迴流裝置外管進內管出，軸向位置與管壁溫度於	

不同格拉茲數及隔板位置之關係.....	73
圖(4.1-7) 二行程無迴流裝置外管進內管出，軸向位置與納塞數於不同格拉茲數及隔板位置之關係.....	74
圖(4.1-8) 二行程無迴流裝置外管進內管出，格拉茲數與平均納塞數於不同隔板位置之關係.....	75
圖(4.1-9) 二行程無迴流裝置外管進內管出，隔板位置與平均納塞數於不同格拉茲數之關係.....	76
圖(4.1-10) 二行程無迴流裝置外管進內管出，格拉茲數與熱傳效率百分比於不同隔板位置之關係.....	77
圖(4.2-1) 末端出口內管進內管出模型，格拉茲數與迴流混合溫度於不同迴流比及隔板位置之關係.....	82
圖(4.2-2) 末端出口內管進內管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同格拉茲數及隔板位置之關係.....	83
圖(4.2-3) 末端出口內管進內管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同迴流比及隔板位置之關係.....	84
圖(4.2-4) 末端出口內管進內管出模型，軸向位置與納塞數於不同格拉茲數及隔板位置之關係.....	85
圖(4.2-5) 末端出口內管進內管出模型，格拉茲數與平均納塞數於不同迴流比及隔板位置之關係.....	86
圖(4.2-6) 末端出口內管進內管出模型，隔板位置與平均納塞數於不同格拉茲數之關係.....	87
圖(4.2-7) 末端出口內管進內管出模型，格拉茲數與熱傳效率百分比於不同迴流比及隔板位置之關係.....	88
圖(4.2-8) 末端出口外管進外管出模型，格拉茲數與迴流混合溫度於不同迴流比及隔板位置之關係.....	89

圖(4.2-9) 末端出口外管進外管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同 格拉茲數及隔板位置之關係.....	90
圖(4.2-10)末端出口外管進外管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同 迴流比及隔板位置之關係.....	91
圖(4.2-11)末端出口外管進外管出模型，軸向位置與納塞數於不同格 拉茲數及隔板位置之關係.....	92
圖(4.2-12)末端出口外管進外管出模型，格拉茲數與平均納塞數於不 同迴流比及隔板位置之關係.....	93
圖(4.2-13)末端出口外管進外管出模型，隔板位置與平均納塞數於不 同格拉茲數之關係.....	94
圖(4.2-14)末端出口外管進外管出模型，格拉茲數與熱傳效率百分比 於不同迴流比及隔板位置之關係.....	95
圖(4.3-1) 出口迴流至末端內管進外管出模型，格拉茲數與迴流混合 溫度於不同迴流比及隔板位置之關係.....	100
圖(4.3-2) 出口迴流至末端內管進外管出模型，軸向位置與管壁溫度 於不同格拉茲數及隔板位置之關係.....	101
圖(4.3-3) 出口迴流至末端內管進外管出模型，軸向位置與管壁溫度 於不同迴流比及隔板位置之關係.....	102
圖(4.3-4) 出口迴流至末端內管進外管出模型，軸向位置與納塞數於 不同格拉茲數及隔板位置之關係.....	103
圖(4.3-5) 出口迴流至末端內管進外管出模型，格拉茲數與平均納塞 數於不同迴流比及隔板位置之關係.....	104
圖(4.3-6) 出口迴流至末端內管進外管出模型，隔板位置與平均納塞 數於不同格拉茲數之關係.....	105

圖(4.3-7) 口迴流至末端內管進外管出模型，格拉茲數與熱傳效率百分比於不同迴流比及隔板位置之關係.....	106
圖(4.3-8) 出口迴流至末端外管進內管出模型，格拉茲數與迴流混合溫度於不同迴流比及隔板位置之關係.....	107
圖(4.3-9) 出口迴流至末端外管進內管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同格拉茲數及隔板位置之關係.....	108
圖(4.3-10) 出口迴流至末端外管進內管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同迴流比及隔板位置之關係.....	109
圖(4.3-11) 出口迴流至末端外管進內管出模型，軸向位置與納塞數於不同格拉茲數及隔板位置之關係.....	110
圖(4.3-12) 出口迴流至末端外管進內管出模型，格拉茲數與平均納塞數於不同迴流比及隔板位置之關係.....	111
圖(4.3-13) 出口迴流至末端外管進內管出模型，隔板位置與平均納塞數於不同格拉茲數之關係.....	112
圖(4.3-14) 出口迴流至末端外管進內管出模型，格拉茲數與熱傳效率百分比於不同迴流比及隔板位置之關係.....	113
圖(4.4-1) 末端迴流至入口內管進外管出模型，格拉茲數與迴流混合溫度於不同迴流比及隔板位置之關係.....	118
圖(4.4-2) 末端迴流至入口內管進外管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同格拉茲數及隔板位置之關係.....	119
圖(4.4-3) 末端迴流至入口內管進外管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同迴流比及隔板位置之關係.....	120
圖(4.4-4) 末端迴流至入口內管進外管出模型，軸向位置與納塞數於不同格拉茲數及隔板位置之關係.....	121

圖(4.4-5) 末端迴流至入口內管進外管出模型，格拉茲數與平均納塞數於不同迴流比及隔板位置之關係.....	122
圖(4.4-6) 末端迴流至入口內管進外管出模型，隔板位置與平均納塞數於不同格拉茲數之關係.....	123
圖(4.4-7) 末端迴流至入口內管進外管出模型，格拉茲數與熱傳效率百分比於不同迴流比及隔板位置之關係.....	124
圖(4.4-8) 末端迴流至入口外管進內管出模型，格拉茲數與迴流混合溫度於不同迴流比及隔板位置之關係.....	125
圖(4.4-9) 末端迴流至入口外管進內管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同格拉茲數及隔板位置之關係.....	126
圖(4.4-10) 末端迴流至入口外管進內管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同迴流比及隔板位置之關係.....	127
圖(4.4-11) 末端迴流至入口外管進內管出模型，軸向位置與納塞數於不同格拉茲數及隔板位置之關係.....	128
圖(4.4-12) 末端迴流至入口外管進內管出模型，格拉茲數與平均納塞數於不同迴流比及隔板位置之關係.....	129
圖(4.4-13) 末端迴流至入口外管進內管出模型，隔板位置與平均納塞數於不同格拉茲數之關係.....	130
圖(4.4-14) 末端迴流至入口外管進內管出模型，格拉茲數與熱傳效率百分比於不同迴流比及隔板位置之關係.....	131
圖(4.5-1) 內外等體積內管進外管出模型，格拉茲數與迴流混合溫度於不同迴流比及隔板位置之關係.....	136
圖(4.5-2) 內外等體積內管進外管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同格拉茲數及隔板位置之關係.....	137

圖(4.5-3) 內外等體積內管進外管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同迴流比及隔板位置之關係.....	138
圖(4.5-4) 內外等體積內管進外管出模型，軸向位置與納塞數於不同格拉茲數及隔板位置之關係.....	139
圖(4.5-5) 內外等體積內管進外管出模型，格拉茲數與平均納塞數於不同迴流比及隔板位置之關係.....	140
圖(4.5-6) 內外等體積內管進外管出模型，隔板位置與平均納塞數於不同格拉茲數之關係.....	141
圖(4.5-7) 內外等體積內管進外管出模型，格拉茲數與熱傳效率百分比於不同迴流比及隔板位置之關係.....	142
圖(4.5-8) 內外等體積外管進內管出模型，格拉茲數與迴流混合溫度於不同迴流比及隔板位置之關係.....	143
圖(4.5-9) 內外等體積外管進內管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同格拉茲數及隔板位置之關係.....	144
圖(4.5-10)內外等體積外管進內管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同迴流比及隔板位置之關係.....	145
圖(4.5-11)內外等體積外管進內管出模型，軸向位置與納塞數於不同格拉茲數及隔板位置之關係.....	146
圖(4.5-12)內外等體積外管進內管出模型，格拉茲數與平均納塞數於不同迴流比及隔板位置之關係.....	147
圖(4.5-13)內外等體積外管進內管出模型，隔板位置與平均納塞數於不同格拉茲數之關係.....	148
圖(4.5-14)內外等體積外管進內管出模型，格拉茲數與熱傳效率百分比於不同迴流比及隔板位置之關係.....	149

圖(5.1)	二行程無迴流裝置內管進外管出，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同的隔板位置之關係.....	161
圖(5.2)	二行程無迴流裝置外管進內管出，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同的隔板位置之關係.....	162
圖(5.3)	末端出口內管進內管出模型，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同迴流比及隔板位置之關係.....	163
圖(5.4)	末端出口外管進外管出模型，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同迴流比及隔板位置之關係.....	164
圖(5.5)	出口迴流至末端內管進外管出模型，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同迴流比及隔板位置之關係.....	165
圖(5.6)	出口迴流至末端外管進內管出模型，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同迴流比及隔板位置之關係.....	166
圖(5.7)	末端迴流至入口內管進外管出模型，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同迴流比及隔板位置之關係.....	167
圖(5.8)	末端迴流至入口外管進內管出模型，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同迴流比及隔板位置之關係.....	168
圖(5.9)	內外等體積內管進外管出模型，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同迴流比及隔板位置之關係.....	169
圖(5.10)	內外等體積外管進內管出模型，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同迴流比及隔板位置之關係.....	170

符號說明

a_0	常數，定義於式(B29)
b_0	常數，定義於式(B28)
B	無因次參數，定義於式(3.0.1)
D_e	相當管徑， m
C_p	比熱， $J/kg \cdot K$
f	摩擦因子
g_c	重力因子
Gz	格拉茲數(Graetz Number)， $4V / \alpha\pi L$
\bar{h}	平均熱傳係數， $kW / m^2 \cdot K$
h_{fs}	管件中之摩擦損耗， m^2 / s^2
I_h	熱傳效率改善，定義於式(3.6.10)
I_p	能源損耗增加，定義於式(3.7.8)
k	流體之熱傳導係數， $kW / m \cdot K$
L	管道長度， m
M	迴流比
\overline{Nu}	平均納塞數(Nusselt number)
P_o	能量消耗， $kg \cdot m^2 / s^3$

q''	熱通量， W/m^2
R	外管內徑， m
R_1	內管內徑， m
Re	雷諾數
T	流體溫度， K
\bar{T}	流體平均溫度， K
V	管件中的體積流率， m^3/s
r	管件半徑， m
u	流體之速度分佈， m/s
\bar{u}	流體之平均速度分佈， m/s
z	橫座標方向， m
希臘字母:	
α	流體之熱擴散(thermal diffusivity)係數， m^2/s
β	常數， $1/m$
γ	積分常數
δ	不可滲透隔板之厚度， m
ξ	縱向無因次長度， z/LGz
η	徑向無因次長度， r/R
ϕ	無因次溫度， $k(T - T_i)/q''_0R$
κ	通道間的比值， R_1/R

μ	流體的黏度， $kg/m \cdot s$
ρ	流體的密度， kg/m^3
ψ	無因次溫度，定義於式(3.0.28)及式(3.0.29)

下標符號：

a	內管
b	外管
F	系統出口處
i	系統進口處
L	管道末端處
O	單行程無迴流
w	管壁處



第一章

緒論

1.1 前言

在化工分離程序上，流體的流動是重要的輸送方式之一，因此在化學工程中的設計與操作中，伴隨流體流動所產生之動量傳送、熱量傳送和質量傳送的問題，則成為一門值得研究的課題，如何能在設計與操作流體輸送中使其達到最大效益，則將是化學工程師的所需面對的課題。

本研究主要探討迴流效應對於整個熱傳系統之影響。在許多化工操作流程中加入迴流能提昇系統的熱傳或質傳之效率，但在探討動量傳送、熱量傳送或質量傳送之聯立問題時，若再加入迴流效應，則在理論模式的建立及解析解的獲得就變成不容易。本文中將探討化工設計中常用的圓形管加裝一可忽略熱阻之隔板，且施加一熱流於管壁上，使管壁保持熱通量為正弦函數之逆流型套管熱交換器。此系統之數學模型屬於共軛格拉茲問題(conjugated Graetz problems)，為了求得其解析解，將利用弗賓納斯法(Frobenius method)求得管壁熱通量保持為正弦函數下，管內流體的溫度分佈，並在系統中加入不同的迴流型式以探討迴流比值大小與改變隔板位置等參數對於管壁溫度及熱傳效率的影響，並與單行程無迴流的系統做比較。

1.2 迴流效應對系統的影響

迴流的裝置在許多的化工程序中對操作方面有著明顯且重要的影響，加入迴流裝置除了可提高熱傳或質傳效能，亦可使溫度或濃度均勻，並能有效地提高加熱及分離效率，例如空氣上揚反應器^[1-6]及環狀反應器^[7-13]中加入迴流可提升加熱及分離的效率。

早期研究對於流體輸送所衍生的格拉茲問題 (Graetz problem)^[14-15]、共軛格拉茲問題 (conjugated Graetz problem)^[16-18] 及擴展格拉茲問題 (extended Graetz program) 通常以數值方法或以解析解方法來解決這類系統的問題，但大多數學者的研究僅針對不具迴流裝置的格拉茲系統問題做討論，Yeh 及 Tsai^[19-20] 提出在共軛格拉茲系統中加入迴流裝置以提升並改善分離效率，並引入正交展開方法 (orthogonal expansion method)^[21] 求解特徵函數。之後，Ho^[22-23] 等也針對迴流效應提出平板型熱交換器及質量交換器的研究探討，並以此理論基礎延伸至後來的圓管型熱交換器之研究，並針對迴流效應作更深入的探討。

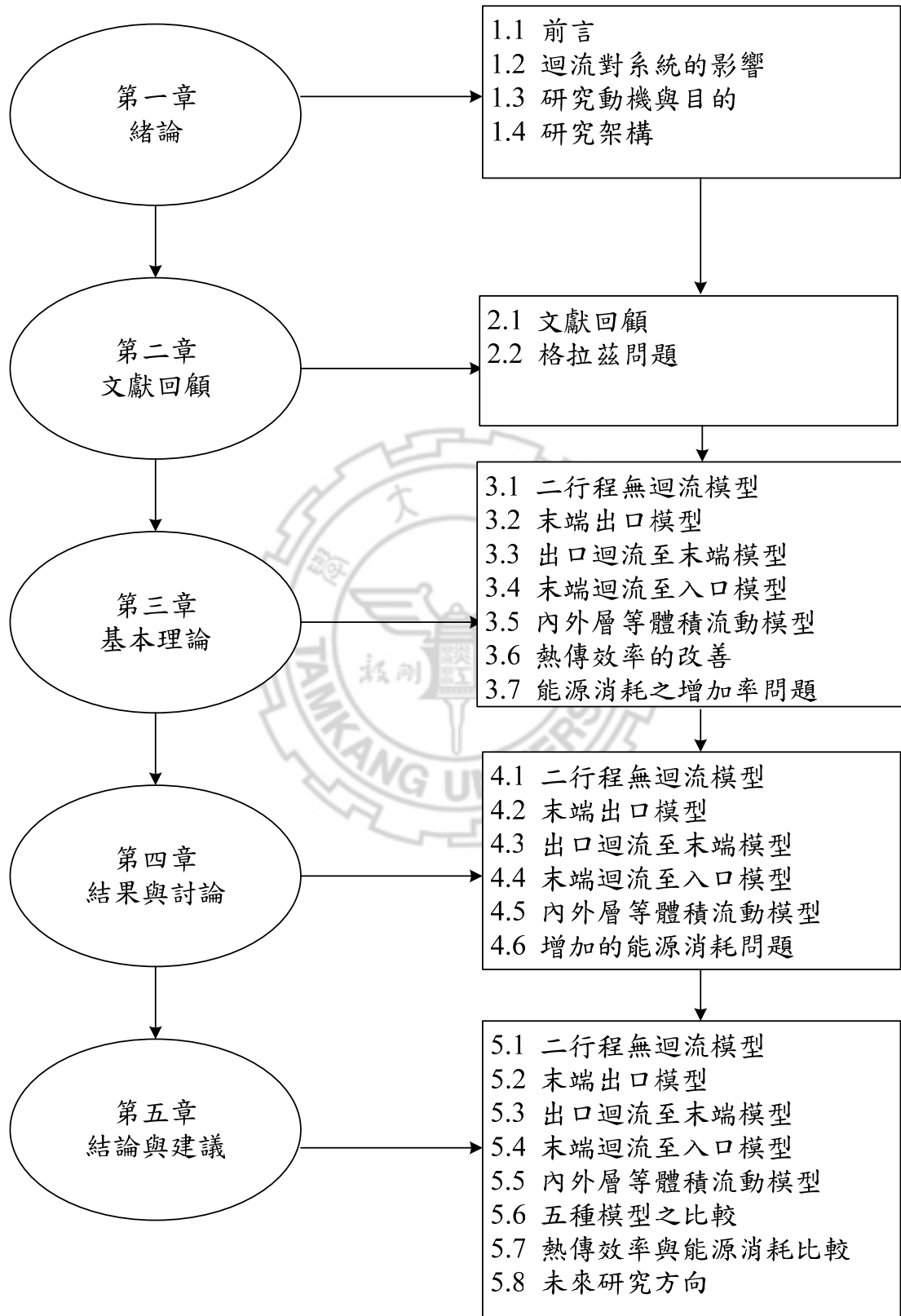
然而迴流會同時產生兩種互斥效應—預混效應及熱傳係數增加，且這兩種效應是迴流裝置影響系統熱質傳效率的重要因素，在本研究中將對於這兩種效應對系統的影響做探討。

1.3 研究動機

本文主要是探討對於不同迴流型式之同心圓柱套管在管壁施加一熱通量為正弦函數的系統，而此系統之邊界在核子反應爐才有可能會產生，如果我們可以利用數學模擬的方式計算出反應爐內的溫度分佈，就可以預防反應爐內因溫度過高而產生危險。

在許多化工程序中，圓形管為一廣泛使用之管件，加入迴流裝置可增加管內流體流率，使熱質傳係數增大，因而提高質傳或熱傳效率。本文主要是探討對具不同迴流型式之同心圓柱套管在管壁施加一熱通量為正弦函數的系統，且中間為一厚度 δ 之隔板，其相較圓管之半徑可忽略其厚度之不可滲透隔板，並忽略其熱阻。經由解析解求得後，並將所得結果與單行程系統做比較，以驗證迴流改善系統的效果，及不同隔板位置對熱傳效率之改善。

1.4 研究架構



第二章

文獻回顧

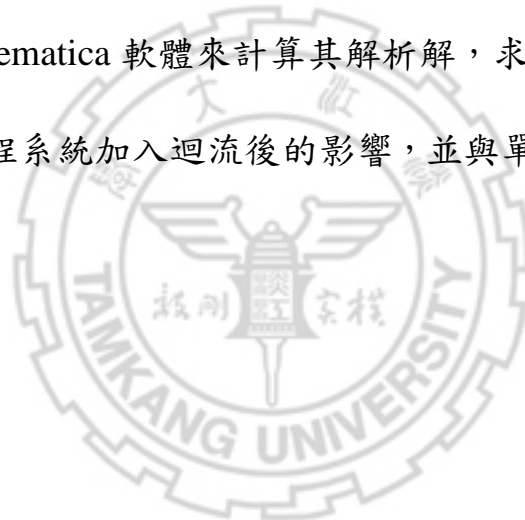
2.1 文獻回顧

在早期的文獻中已經廣泛被探討在層流狀態下，流經圓管且壁溫為正弦函數的完全展流的熱質傳問題。經簡化後的穩定狀態管道內流動問題，由格拉茲於 1883 年以流體的熱傳為基礎，定義出格拉茲問題，因此使得格拉茲問題引起科學家廣泛的研究；而後，Shah^[24,25]於 1978 年提出在單通道圓管系統於管壁處輸入正弦熱量通量；已有相當的理論架構，且廣泛地應用在核子反應爐、熱交換史特靈循環機^[40](Stirling cycle machines)。

1960 年 Reynolds^[26]首先將單通道圓管於管壁輸入正弦熱量通量之問題利用分離變數法求出其溫度分佈與納塞數(Nusselt number);1963 年 Reynolds、Lundberg 與 McCuen^[27]等人，同樣針對雙套管管壁輸入已知熱通量與溫度，對於管內溫度變化與位置關係作研究與探討；1964 年，Kays^[28]考慮在雙套管下針對管壁為已知熱量通量，將邊界利用傅立葉級數(Fourier series)展開與特徵值加以運算分析；1965 年，Hsu^[29]以單通道圓管，利用 Duhamel's superposition 對於團狀流(Slug flow)流體做分析；1970 年 Bhattacharyya^[30]在解法上除了將邊界條件以級數展開外並假設一溫度分佈，加以簡化此類邊界問題；1976

年，Faghri^[31]同樣假設一溫度分佈並利用 Least-squares approximation 求得溫度分佈；而後，於 1994 年 Quaresma^[32]利用積分轉換法(Integral transform method)求出納塞數；1995 年，Barletta^[33]假設其溫度分佈並利用正交性質(Orthogonality)加以簡化此類關於單通道系統管壁熱通量為正弦函數之問題。

早期的研究受限於電腦及軟體的功能，無法針對複雜的數學模式做計算。跟以往比較起來，本論文結果利用比以往運算功能更為強大的電腦搭配 Mathematica 軟體來計算其解析解，求得其管壁溫度及納塞數且探討二行程系統加入迴流後的影響，並與單行程系統做比較。



2.2 格拉茲問題

在上述中，所提到的格拉茲問題是於圓管中以層流強制對流之熱傳問題，除了在設計與分析上都是重要的基礎物理問題之外，對於往後更深入的研究探討與應用更有其重要的價值。而在圓管層流的強制對流熱傳中也可利用格拉茲問題簡化之。假設流體是一不可壓縮、物理特性固定且沒有擾流(漩渦)產生之流體，並以全展流(fully developed)的方式流動，忽略能量的損耗。則

此系統之能量方程式：

$$\frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = u_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.2.1)$$

而此問題所附屬之邊界條件可分為以下三種：

(1) 第一種—壁溫固定又稱為 Dirichlet 邊界條件。

$$\begin{cases} T = \text{constant}; & r = R, \quad z > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} = 0; & r = 0, \quad z > 0 \\ T = T_0; & z = 0, \quad 0 < r < R \end{cases} \quad (2.2.2)$$

(2) 第二種—熱通量固定又稱為 Neumann 邊界條件。

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial r} = q(\text{constant}) & ; r = R, \quad z > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0; & r = 0, \quad z > 0 \\ T = T_0 & ; z = 0, \quad 0 < r < R \end{cases} \quad (2.2.3)$$

(3) 第三種—具有混合邊界情形又稱為 Robin 邊界條件。

$$\begin{cases} -k_3 \frac{\partial T}{\partial r} = h_3(T - T_{w_1}); & r = R, \quad z > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} = 0; & r = 0, \quad z > 0 \\ T = T_0 & ; z = 0, \quad 0 < r < R \end{cases} \quad (2.2.4)$$

若考慮軸傳導項，則形成另一擴展格拉茲問題。其能量方程式表示如下：

$$u' \frac{\partial \theta}{\partial x^+} = \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial (x^+)^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \quad (2.2.5)$$

其中 $\theta = \frac{T - T_w}{T_i - T_w}$ ， $x^+ = \frac{(z/R)}{Pe}$ ， u' = 軸速度 U / 平均軸速度 U_{av} ，

$Pe = U_{av} R / \alpha$ (Peclet 數)。

由上式可得知，柏勒(Peclet)數大小為決定軸傳導效應可否忽略之關鍵，柏勒數愈小，在流動方向的熱傳導愈大。

對於柏勒數甚小的流體，其熱傳導項不能忽略，主要應用於以下的情況：

(1)低普蘭特數(Prandtl number)之流體，如液態金屬(liquid metal)。

(2)低雷諾數(Reynold's number)之流體，如黏性流體。

以往格拉茲問題所探討者為單一股流問題，若將其擴展為多相(multiphase)或多股流(multistream)同時流動的問題，就成了所謂的共軛格拉茲問題。



第三章

基本理論

考慮一雙套管熱交換器系統，長度為 L ，外管直徑為 $2R$ ，管道間裝置一可忽略厚度之不可滲透隔板 $\delta (\ll 2R)$ 且忽略其熱阻，當系統進行熱交換時，此隔板將系統分隔為內管直徑為 $2\kappa R$ ，外管之徑向長度為 $2(1-\kappa)R$ 之兩同心圓柱型套管之平行通道。在外管壁安裝一熱通量裝置，使外管壁熱通量保持為 $q_w''(z) = q_0''[1 + \sin(\beta z)]$ 。

整個系統的理論是依據以下之假設而建立：

- (1) 流體之物性常數為定值且為牛頓流體；
- (2) 流體為全展流與層流方式流經管道；
- (3) 忽略邊端效應、軸向熱傳導及中間隔板之熱阻抗；
- (4) 流體於入口及出口處為完全混合；
- (5) 整個系統在穩態下操作；
- (6) 假設整根管子長度剛好為一個週期 ($\beta = 2\pi/L$)；

將變數做無因次群之分析，令

$$\eta = \frac{r}{R}, \quad \xi = \frac{z}{GzL}, \quad \phi_a = \frac{k(T_a - T_i)}{q_0''R}, \quad \phi_b = \frac{k(T_b - T_i)}{q_0''R}, \quad Gz = \frac{4V}{\alpha\pi L},$$
$$\kappa = \frac{R_1}{R}, \quad B = \beta GzL \quad (3.0.1)$$

由上列無因次群，可以得到描述此系統之統制方程式及徑向邊界條件如下：

$$\frac{u_a(\eta)R^2}{GzL\alpha} \frac{\partial \phi_a(\eta, \xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \phi_a(\eta, \xi)}{\partial \eta} \right) \quad (3.0.2)$$

$$\frac{u_b(\eta)R^2}{GzL\alpha} \frac{\partial \phi_b(\eta, \xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \phi_b(\eta, \xi)}{\partial \eta} \right) \quad (3.0.3)$$

$$\frac{\partial \phi_a(0, \xi)}{\partial \eta} = 0 \quad (3.0.4)$$

$$\frac{\partial \phi_b(1, \xi)}{\partial \eta} = 1 + \sin(B\xi) \quad (3.0.5)$$

$$\frac{\partial \phi_a(\kappa, \xi)}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi_b(\kappa, \xi)}{\partial \eta} \quad (3.0.6)$$

$$\phi_a(\kappa, \xi) = \phi_b(\kappa, \xi) \quad (3.0.7)$$

軸向邊界條件會隨著迴流型式而不同，於後面再做討論。由於上列之方程式，為一非齊性邊界系統，吾等根據Barletta^[33]所提出之圓管單通道管壁正弦熱通量系統的溫度分佈表示式以及葉士誠^[34]學長針對二行程固定管壁熱通量所提出之溫度分佈表示式，建立一新的二行程正弦熱通量系統的溫度分佈表示式，且將其代回統制方程式與邊界條件，得到新的統制方程式與相對應之邊界條件，再利用近似解 (approximation method) 求解。

首先，以內進外出系統為例，吾等可將內管與外管的無因次溫度分佈^[33,34]分別假設如下：

$$\phi_a(\eta, \xi) = \theta_{0a} \xi + \theta_{1a}(\eta) + \theta_{2a}(\eta) \sin(B\xi) + \theta_{3a}(\eta) \cos(B\xi) \quad (3.0.8)$$

$$\phi_b(\eta, \xi) = \theta_{0b} \left(\frac{1}{Gz} - \xi \right) + \theta_{1b}(\eta) + \theta_{2b}(\eta) \sin(B\xi) + \theta_{3b}(\eta) \cos(B\xi) \quad (3.0.9)$$

其中 θ_{0a} 、 θ_{0b} 為未知常數，而 θ_{1a} 、 θ_{2a} 、 θ_{3a} 、 θ_{1b} 、 θ_{2b} 和 θ_{3b} 為 η 的函數。

將式(3.0.8)和式(3.0.9)代入式(3.0.2)至式(3.0.7)，可得下列兩組

新的統制方程式及所相對的邊界條件如下：

統制方程式：

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_{1a}(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{u_a(\eta)R^2\eta}{GzL\alpha} \theta_{0a} \\ & + \left[\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_{2a}(\eta)}{d\eta} \right) + \frac{u_a(\eta)BR^2\eta}{GzL\alpha} \theta_{3a}(\eta) \right] \sin(B\xi) \\ & + \left[\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_{3a}(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{u_a(\eta)BR^2\eta}{GzL\alpha} \theta_{2a}(\eta) \right] \cos(B\xi) = 0 \end{aligned} \quad (3.0.10)$$

與

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_{1b}(\eta)}{d\eta} \right) + \frac{u_b(\eta)R^2\eta}{GzL\alpha} \theta_{0b} \\ & + \left[\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_{2b}(\eta)}{d\eta} \right) + \frac{u_b(\eta)BR^2\eta}{GzL\alpha} \theta_{3b}(\eta) \right] \sin(B\xi) \\ & + \left[\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_{3b}(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{u_b(\eta)BR^2\eta}{GzL\alpha} \theta_{2b}(\eta) \right] \cos(B\xi) = 0 \end{aligned} \quad (3.0.11)$$

邊界條件：

$$\frac{d\theta_{1a}(0)}{d\eta} + \frac{d\theta_{2a}(0)}{d\eta} \sin(B\xi) + \frac{d\theta_{3a}(0)}{d\eta} \cos(B\xi) = 0 \quad (3.0.12)$$

$$\left(\frac{d\theta_{1b}(1)}{d\eta} - 1 \right) + \left(\frac{d\theta_{2b}(1)}{d\eta} - 1 \right) \sin(B\xi) + \left[\frac{d\theta_{3b}(1)}{d\eta} \right] \cos(B\xi) = 0 \quad (3.0.13)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d\theta_{1a}(\kappa)}{d\eta} - \frac{d\theta_{1b}(\kappa)}{d\eta} \right) \\ & + \left(\frac{d\theta_{2a}(\kappa)}{d\eta} - \frac{d\theta_{2b}(\kappa)}{d\eta} \right) \sin(B\xi) \\ & + \left(\frac{d\theta_{3a}(\kappa)}{d\eta} - \frac{d\theta_{3b}(\kappa)}{d\eta} \right) \cos(B\xi) = 0 \end{aligned} \quad (3.0.14)$$

$$\begin{aligned} & \theta_{0a}\xi + \theta_{1a}(\kappa) + \theta_{2a}(\kappa) \sin(B\xi) + \theta_{3a}(\kappa) \cos(B\xi) \\ & = \theta_{0b} \left(\frac{1}{Gz} - \xi \right) + \theta_{1b}(\kappa) + \theta_{2b}(\kappa) \sin(B\xi) + \theta_{3b}(\kappa) \cos(B\xi) \end{aligned} \quad (3.0.15)$$

吾人將式(3.0.10)至式(3.0.15)分成 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 、 $\theta_{3b}(\eta)$

和 θ_{0a} 、 $\theta_{1a}(\eta)$ 、 θ_{0b} 、 $\theta_{1b}(\eta)$ 兩個部分來求解，令其所相對應之統制方

程式與邊界條件分述如下：

(一) 弗賓納斯法求解 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$

統制方程式

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_{2a}(\eta)}{d\eta} \right) + \frac{u_a(\eta)BR^2\eta}{GzL\alpha} \theta_{3a}(\eta) = 0 \quad (3.0.16)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_{3a}(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{u_a(\eta)BR^2\eta}{GzL\alpha} \theta_{2a}(\eta) = 0 \quad (3.0.17)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_{2b}(\eta)}{d\eta} \right) + \frac{u_b(\eta)BR^2\eta}{GzL\alpha} \theta_{3b}(\eta) = 0 \quad (3.0.18)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_{3b}(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{u_b(\eta)BR^2\eta}{GzL\alpha} \theta_{2b}(\eta) = 0 \quad (3.0.19)$$

邊界條件

$$\frac{d\theta_{2a}(0)}{d\eta} = 0 \quad (3.0.20)$$

$$\frac{d\theta_{3a}(0)}{d\eta} = 0 \quad (3.0.21)$$

$$\frac{d\theta_{2b}(1)}{d\eta} = 1 \quad (3.0.22)$$

$$\frac{d\theta_{3b}(1)}{d\eta} = 0 \quad (3.0.23)$$

$$\frac{d\theta_{2a}(\kappa)}{d\eta} = \frac{d\theta_{2b}(\kappa)}{d\eta} \quad (3.0.24)$$

$$\frac{d\theta_{3a}(\kappa)}{d\eta} = \frac{d\theta_{3b}(\kappa)}{d\eta} \quad (3.0.25)$$

$$\theta_{2a}(\kappa) = \theta_{2b}(\kappa) \quad (3.0.26)$$

$$\theta_{3a}(\kappa) = \theta_{3b}(\kappa) \quad (3.0.27)$$

為了求得 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$ 假設^[33]

$$\psi_a(\eta) = \theta_{2a}(\eta) + \theta_{3a}(\eta)i \quad (3.0.28)$$

$$\psi_b(\eta) = \theta_{2b}(\eta) + \theta_{3b}(\eta)i \quad (3.0.29)$$

利用式(3.0.28)及式(3.0.29)分別可將式(3.0.16)至式(3.0.19)合併成

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{\partial \psi_a(\eta)}{\partial \eta} \right) - \frac{u_a(\eta)BR^2\eta}{GzL\alpha} \psi_a(\eta) i = 0 \quad (3.0.30)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{\partial \psi_b(\eta)}{\partial \eta} \right) - \frac{u_b(\eta)BR^2\eta}{GzL\alpha} \psi_b(\eta) i = 0 \quad (3.0.31)$$

同理，利用式(3.0.28)及式(3.0.29)可將式(3.0.20)至式(3.0.27)合併成

$$\frac{d\psi_a(0)}{d\eta} = 0 \quad (3.0.32)$$

$$\frac{d\psi_b(1)}{d\eta} = 1 \quad (3.0.33)$$

$$\frac{d\psi_a(\kappa)}{d\eta} = \frac{d\psi_b(\kappa)}{d\eta} \quad (3.0.34)$$

$$\psi_a(\kappa) = \psi_b(\kappa) \quad (3.0.35)$$

為了求得 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$ ，式(3.0.30)與式

(3.0.31)分別可利用弗賓納斯法求出其級數表示式：

令

$$\psi_a(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^{n+r} \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (3.0.36)$$

$$\psi_b(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \eta^{n+r} \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (3.0.37)$$

再利用邊界條件式(3.0.32)至式(3.0.35)求得內外通道無因次溫度的級數表示式再分別與式(3.0.28)至式(3.0.29)比較實數項與虛數項後即可求得 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$ 。

(二) 常微分方程求解 θ_{0a} 、 $\theta_{1a}(\eta)$ 、 θ_{0b} 與 $\theta_{1b}(\eta)$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_{1a}(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{u_a(\eta)R^2\eta}{GzL\alpha} \theta_{0a} = 0 \quad (3.0.38)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_{1b}(\eta)}{d\eta} \right) + \frac{u_b(\eta)R^2\eta}{GzL\alpha} \theta_{0b} = 0 \quad (3.0.39)$$

$$\frac{d\theta_{1a}(0)}{d\eta} = 0 \quad (3.0.40)$$

$$\frac{d\theta_{1b}(1)}{d\eta} = 1 \quad (3.0.41)$$

$$\frac{d\theta_{1a}(\kappa)}{d\eta} = \frac{d\theta_{1b}(\kappa)}{d\eta} \quad (3.0.42)$$

$$\theta_{0a} = -\theta_{0b} \quad (3.0.43)$$

$$\theta_{1a}(\kappa) = \frac{\theta_{0b}}{Gz} + \theta_{1b}(\kappa) \quad (3.0.44)$$

由式(3.0.38)及式(3.0.39)可知將其分別積分兩次時可得 $\theta_{1a}(\eta)$ 與 $\theta_{1b}(\eta)$ 之表示式且產生四個積分常數 γ_{1a} 、 γ_{2a} 、 γ_{1b} 與 γ_{2b} 加上兩個常數 θ_{0a} 與 θ_{0b} ，可利用邊界條件聯立求出。

其中在出口之無因次溫度定義為

$$\phi_F = \frac{k(T_F - T_i)}{q_0''R} \quad (3.0.45)$$

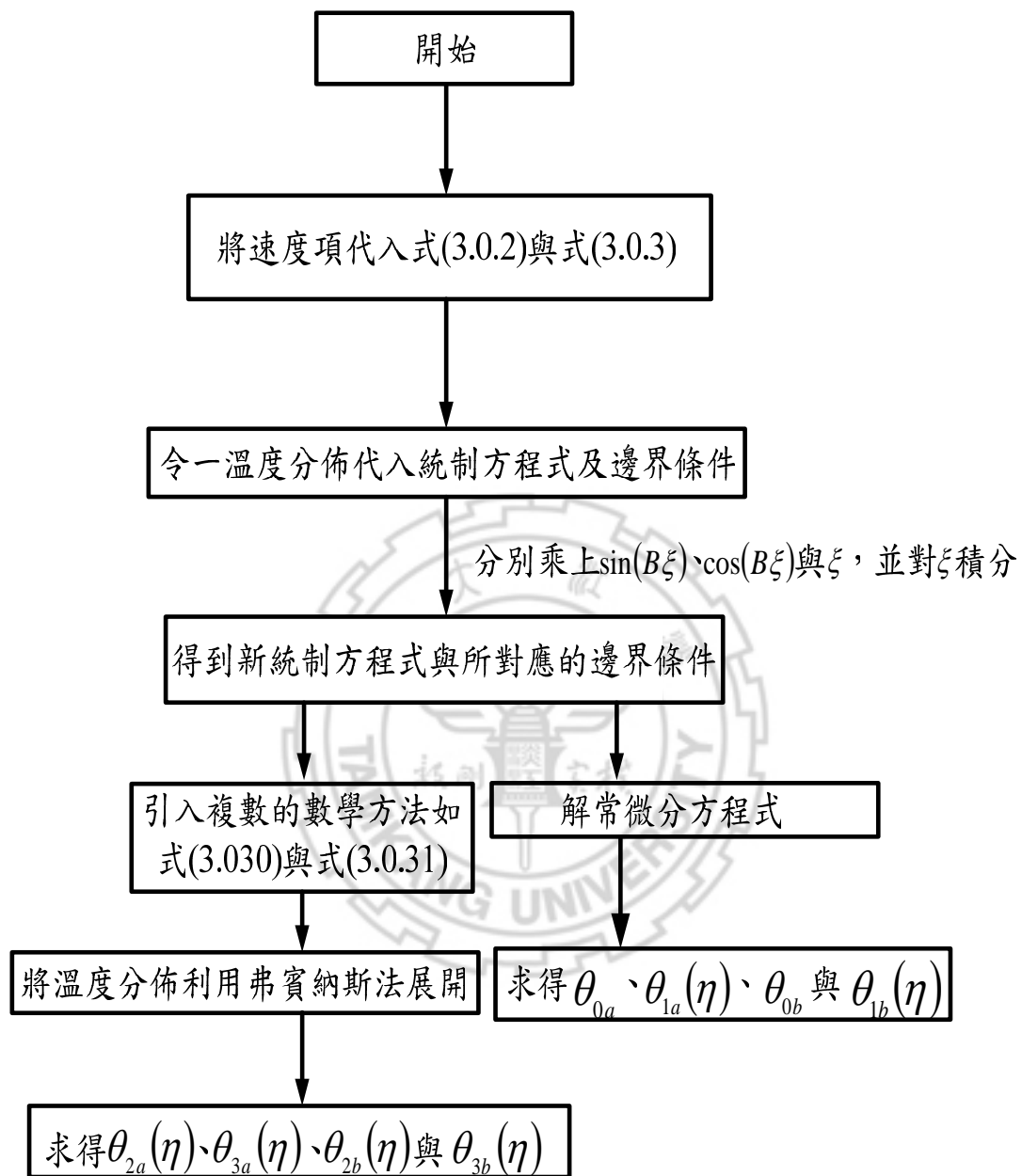
作兩同心圓柱套管之總能量平衡(overall-energy balance)，可得

$$\rho C_p V(T - T_i) = \int_0^L q''(z) 2\pi R dz$$

$$\phi_F = 8 \left[\frac{1}{G_z} - \frac{1}{B} \left(\cos\left(\frac{B}{G_z}\right) - 1 \right) \right] \quad (3.0.46)$$

其求解流程圖如圖(3.0-1)所示。





圖(3.0-1) 求解流程圖

3.1 二行程無迴流模型之理論分析

(A) 內管進外管出

二行程無迴流內管進外管出裝置，如圖(3.1-1)，流體進入管件在穩定狀態下，以體積流率 V 溫度為 T_i 在入口處為完全混合，出口的溫度為 T_F 。

無因次速度分佈及流體平均流速分別為：

$$u_a(\eta) = 2\bar{u}_a \left(1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right) \quad (3.1.1)$$

$$u_b(\eta) = -\frac{2\bar{u}_b}{W_1} \left[1 - (\eta)^2 + W_2 \ln \eta \right] \quad (3.1.2)$$

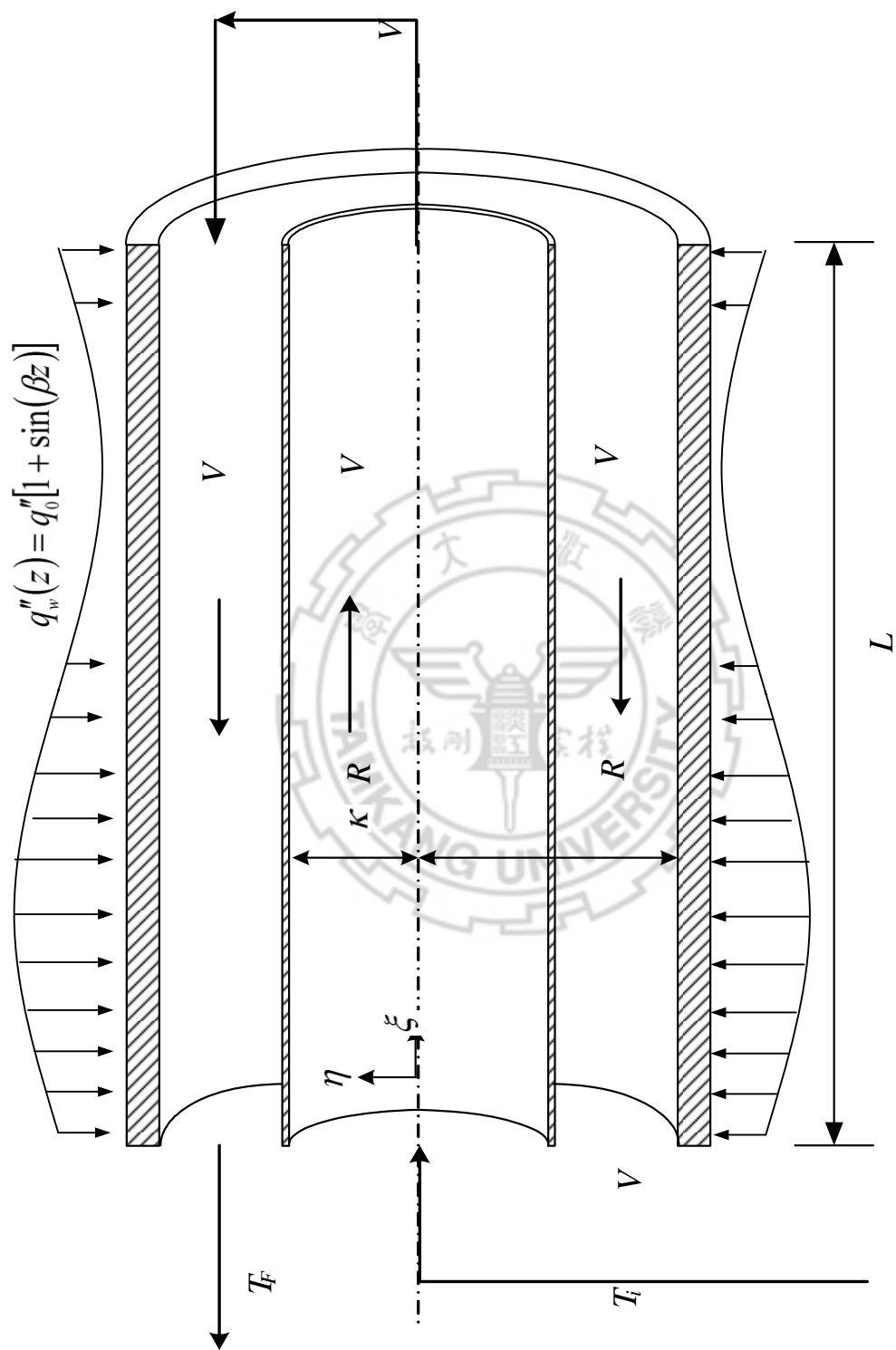
$$\bar{u}_a = \frac{V}{\pi(\kappa R)^2} \quad (3.1.3)$$

$$\bar{u}_b = \frac{V}{\pi R^2 - \pi(\kappa R)^2} \quad (3.1.4)$$

其中

$$W_1 = \left[\frac{1 - \kappa^4}{1 - \kappa^2} - \frac{1 - \kappa^2}{\ln \frac{1}{\kappa}} \right] \quad (3.1.5)$$

$$W_2 = \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln \frac{1}{\kappa}} \right) \quad (3.1.6)$$



(圖3.1-1) 二行程無迴流之內管進外管出系統

有關式(3.1.1)和式(3.1.2)之管內流體速度分佈推導列於附錄(一)。

將式(3.1.1)至式(3.1.4)代入式(3.0.2)、式(3.0.3)則式(3.0.30)及式(3.0.31)

則分別可改寫為:

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_a(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{B\eta}{2\kappa^2} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right] \psi_a(\eta) i = 0 \quad (3.1.7)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_b(\eta)}{d\eta} \right) + \frac{B\eta [1 - \eta^2 + W_2 \ln \eta]}{2W_1(1 - \kappa^2)} \psi_b(\eta) i = 0 \quad (3.1.8)$$

3.1-1 求 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$

為了求得 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$ ，式(3.1.7)與式(3.1.8)分別可利用弗賓納斯法表示,其詳細推導於附錄(二):

$$a_{2n} = \frac{B}{8\kappa^2} \frac{1}{n^2} \left(a_{2n-2} - \frac{1}{\kappa^2} a_{2n-4} \right) i \quad (3.1.9)$$

$$b_n = \frac{-B}{2W_1(1 - \kappa^2)} \frac{1}{n^2} \left[\left(1 - \frac{3}{2} W_2 \right) b_{n-2} + 2W_2 b_{n-3} - \left(1 + \frac{1}{2} W_2 \right) b_{n-4} \right] i \quad (3.1.10)$$

定義

$$\psi_a(\eta) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} c_{an} \eta^{2n}, \quad c_{an} = \frac{a_{2n}}{a_0}, \quad n \geq 0 \quad (3.1.11)$$

$$\psi_b(\eta) = b_0 \sum_{n=0}^{\infty} c_{bn} \eta^n, \quad c_{bn} = \frac{b_n}{b_0}, \quad n \geq 0 \quad (3.1.12)$$

如此，可由式(3.1.11)、式(3.1.12)分別與(3.0.28)、(3.0.29)比較後可求得 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$ 。

3.1-2 求 θ_{0a} 、 $\theta_{1a}(\eta)$ 、 θ_{0b} 與 $\theta_{1b}(\eta)$

式(3.0.38)與式(3.0.39)可分別改寫成

$$\theta_{1a} = \frac{\theta_{0a}}{2\kappa^2} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{\eta^4}{16\kappa^2} + \gamma_{1a} \ln \eta + \gamma_{2a} \right] \quad (3.1.13)$$

$$\theta_{1b} = \frac{\theta_{0b}}{2W_1(1-\kappa^2)} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{16}\eta^4 + \frac{W_2}{4}\eta^2[\ln \eta - 1] + \gamma_{1b} \ln \eta + \gamma_{2b} \right] \quad (3.1.14)$$

其中 γ_{1a} 、 γ_{2a} 、 γ_{1b} 、 γ_{2b} 為積分常數。

在管道末端位置為 L 位置的無因次溫度為

$$\phi_L = \frac{1}{V} \int_0^\kappa u_a 2\pi R^2 \eta \phi_a \left(\eta, \frac{1}{Gz} \right) d\eta = \frac{-1}{V} \int_\kappa^1 u_b 2\pi R^2 \eta \phi_b \left(\eta, \frac{1}{Gz} \right) d\eta \quad (3.1.15)$$

在入口的無因次溫度可表示如下

$$\phi_a(\eta, 0) = \frac{k(T_i - T_i)}{q_0'' R} = 0 = \frac{1}{V} \int_0^\kappa u_a 2\pi R^2 \eta \phi_a(\eta, 0) d\eta \quad (3.1.16)$$

而且在出口之無因次溫度可寫成以下的積分式

$$\phi_F = -\frac{1}{V} \int_\kappa^1 u_b 2\pi R^2 \eta \phi_b(\eta, 0) d\eta \quad (3.1.17)$$

(B) 外管進內管出

裝置圖如圖(3.1-2)所示，與內管進外管出不同之處為流動方向之不同，其無因次速度分佈及流體平均流速分別為：

$$u_a(\eta) = -2\bar{u}_a \left(1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right) \quad (3.1.18)$$

$$u_b(\eta) = \frac{2\bar{u}_b}{W_1} \left[1 - (\eta)^2 + W_2 \ln \eta \right] \quad (3.1.19)$$

$$\bar{u}_a = \frac{V}{\pi(\kappa R)^2} \quad (3.1.20)$$

$$\bar{u}_b = \frac{V}{\pi R^2 - \pi(\kappa R)^2} \quad (3.1.21)$$

將式(3.1.18)至式(3.1.21)代入式(3.0.2)、式(3.0.3)則式(3.0.30)及式(3.0.31)則分別可改寫為:

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_a(\eta)}{d\eta} \right) + \frac{B\eta}{2\kappa^2} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right] \psi_a(\eta) i = 0 \quad (3.1.22)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_b(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{B\eta[1 - \eta^2 + W_2 \ln \eta]}{2W_1(1 - \kappa^2)} \psi_b(\eta) i = 0 \quad (3.1.23)$$

弗賓納斯法表示式,則可參照附錄(二)推導方式可得:

$$a_{2n} = \frac{-B}{8\kappa^2} \frac{1}{n^2} \left(a_{2n-2} - \frac{1}{\kappa^2} a_{2n-4} \right) i \quad (3.1.24)$$

$$b_n = \frac{B}{2W_1(1 - \kappa^2)} \frac{1}{n^2} \left[\left(1 - \frac{3}{2}W_2 \right) b_{n-2} + 2W_2 b_{n-3} - \left(1 + \frac{1}{2}W_2 \right) b_{n-4} \right] i \quad (3.1.25)$$

且式(3.0.38)與式(3.0.39)可分別改寫成

$$\theta_{1a} = \frac{\theta_{0a}}{2\kappa^2} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{\eta^4}{16\kappa^2} + \gamma_{1a} \ln \eta + \gamma_{2a} \right] \quad (3.1.26)$$

$$\theta_{1b} = \frac{\theta_{0b}}{2W_1(1 - \kappa^2)} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{16}\eta^4 + \frac{W_2}{4}\eta^2 [\ln \eta - 1] + \gamma_{1b} \ln \eta + \gamma_{2b} \right] \quad (3.1.27)$$

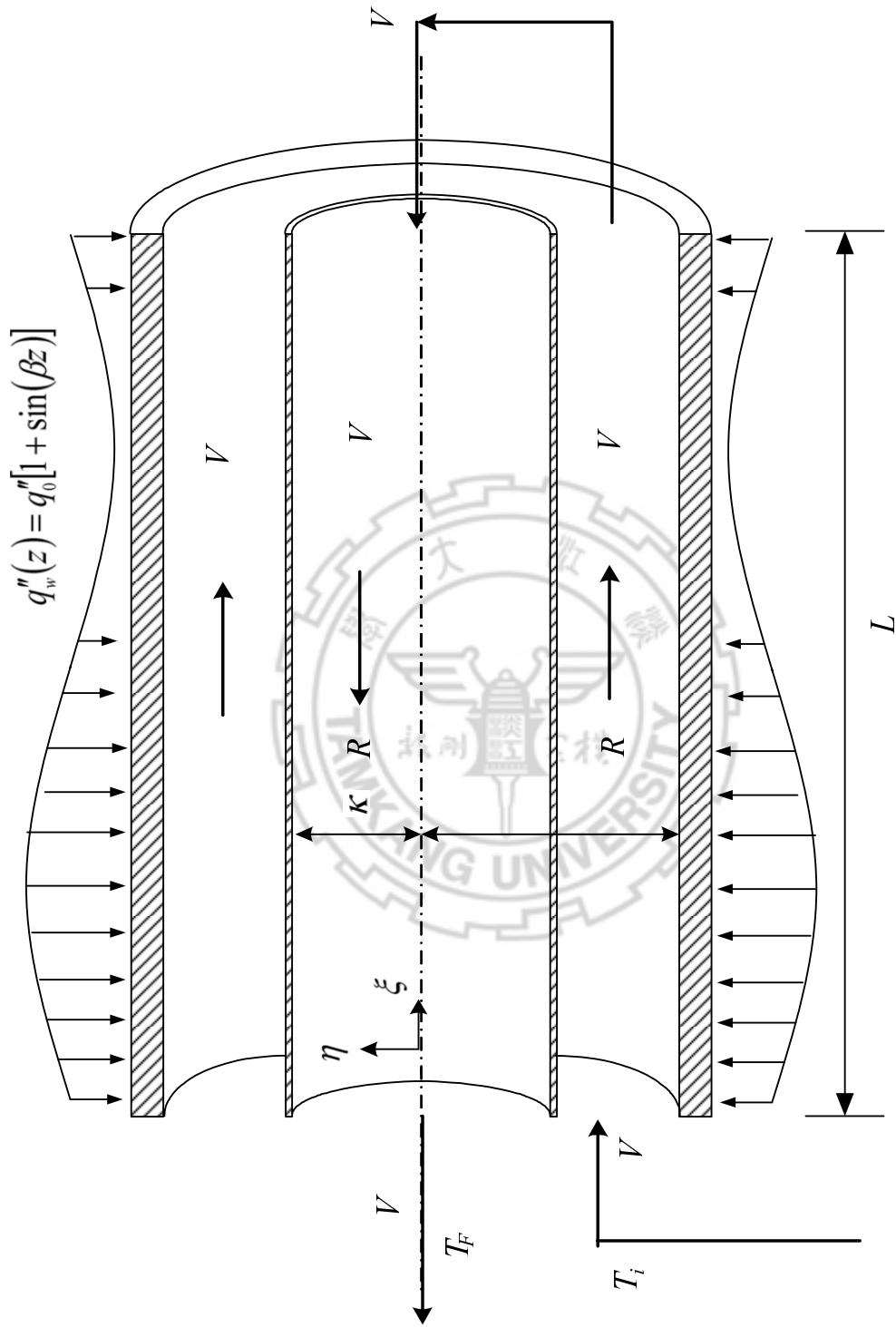
其中在入口的無因次溫度可表示如下

$$\phi_b(\eta,0) = \frac{k(T_i - T_i)}{q_0'' R} = 0 = \frac{1}{V} \int_0^\kappa u_b 2\pi R^2 \eta \phi_b(\eta,0) d\eta \quad (3.1.28)$$

而且在出口之無因次溫度可寫成以下的積分式

$$\phi_F = -\frac{1}{V} \int_0^\kappa u_a 2\pi R^2 \eta \phi_a(\eta,0) d\eta \quad (3.1.29)$$





圖(3.1-2) 二行程無迴流之外管進內管出系統

3.2 末端出口模型之理論分析

(A) 內管進內管出

如圖(3.2-1)之流動方式，流體在穩定狀態下，以體積流率 V 溫度為 T_i 在入口處與迴流流體 MV 完全混合，出口的溫度為 T_F 。

無因次速度分佈及流體平均流速分別為：

$$u_a(\eta) = 2\bar{u}_a \left(1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right) \quad (3.2.1)$$

$$u_b(\eta) = -\frac{2\bar{u}_b}{W_1} \left[1 - (\eta)^2 + W_2 \ln \eta \right] \quad (3.2.2)$$

$$\bar{u}_a = \frac{(M+1)V}{\pi(\kappa R)^2} \quad (3.2.3)$$

$$\bar{u}_b = \frac{MV}{\pi R^2 - \pi(\kappa R)^2} \quad (3.2.4)$$

將式(3.2.1)至式(3.2.4)代入式(3.0.2)、式(3.0.3)則式(3.0.30)及式

(3.0.31)則分別可改寫為：

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_a(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{(M+1)B\eta}{2\kappa^2} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right] \psi_a(\eta) = 0 \quad (3.2.5)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_b(\eta)}{d\eta} \right) + \frac{MB\eta[1 - \eta^2 + W_2 \ln \eta]}{2W_1(1 - \kappa^2)} \psi_b(\eta) = 0 \quad (3.2.6)$$

3.2-1 求 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$

為了求得 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$ ，式(3.2.5)與式(3.2.6)分

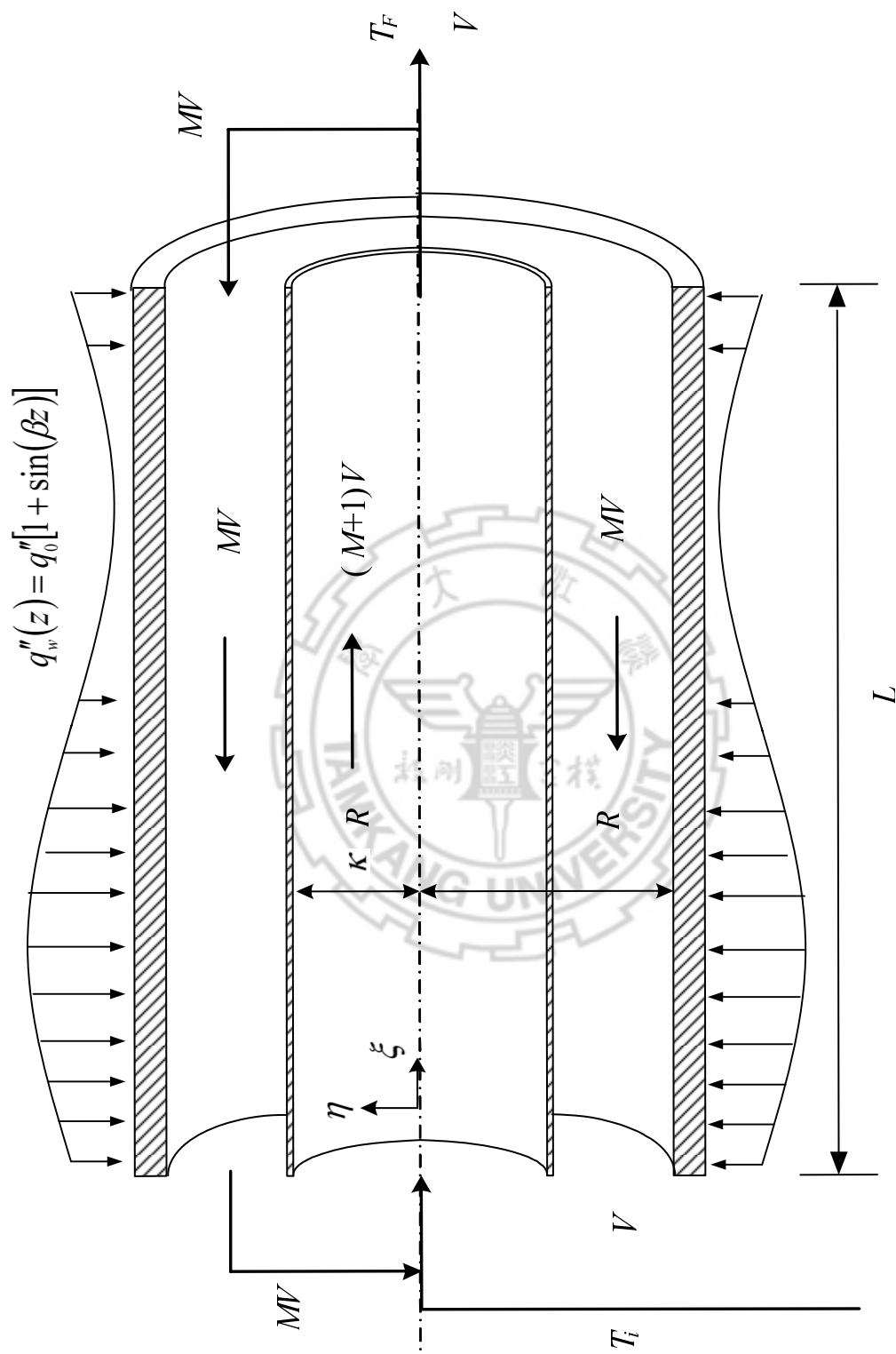


圖 (3.2-1) 末端出口模型之內管進內管出系統

別可利用弗賓納斯法表示,其推導參照附錄(二)可得:

$$a_{2n} = \frac{(M+1)B}{8\kappa^2} \frac{1}{n^2} \left(a_{2n-2} - \frac{1}{\kappa^2} a_{2n-4} \right) i \quad (3.2.7)$$

$$b_n = \frac{-MB}{2W_1(1-\kappa^2)} \frac{1}{n^2} \left[\left(1 - \frac{3}{2}W_2 \right) b_{n-2} + 2W_2 b_{n-3} - \left(1 + \frac{1}{2}W_2 \right) b_{n-4} \right] i \quad (3.2.8)$$

如此,可由以上的表示式經由比較可求得 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$ 。

3.2-2 求 θ_{0a} 、 $\theta_{1a}(\eta)$ 、 θ_{0b} 與 $\theta_{1b}(\eta)$

式(3.0.38)與式(3.0.39)可分別改寫成

$$\theta_{1a} = \frac{(M+1)\theta_{0a}}{2\kappa^2} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{\eta^4}{16\kappa^2} + \gamma_{1a} \ln \eta + \gamma_{2a} \right] \quad (3.2.9)$$

$$\theta_{1b} = \frac{M\theta_{0b}}{2W_1(1-\kappa^2)} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{16}\eta^4 + \frac{W_2}{4}\eta^2 [\ln \eta - 1] + \gamma_{1b} \ln \eta + \gamma_{2b} \right] \quad (3.2.10)$$

其中 γ_{1a} 、 γ_{2a} 、 γ_{1b} 、 γ_{2b} 為積分常數。

在入口的無因次溫度定義為

$$\phi_a(\eta, 0) = \frac{k(T_a(r, 0) - T_i)}{q_0'' R} = \frac{1}{V(M+1)} \int_0^\kappa u_a 2\pi R^2 \eta \phi_a(\eta, 0) d\eta \quad (3.2.11)$$

此迴流型式之出口溫度可寫成以下的積分式

$$\phi_F = \frac{1}{V(M+1)} \int_0^\kappa u_a 2\pi R^2 \eta \phi_a \left(\eta, \frac{1}{Gz} \right) d\eta \quad (3.2.12)$$

亦可寫成

$$\phi_F = \frac{-1}{VM} \int_\kappa^1 u_b 2\pi R^2 \eta \phi_b \left(\eta, \frac{1}{Gz} \right) d\eta \quad (3.2.13)$$

而在入口的無因次溫度表示如下

$$\phi_a(\eta, 0) = \frac{-1}{V(M+1)} \int_{\kappa}^1 u_b 2\pi R^2 \eta \phi_b(\eta, 0) d\eta + V \cdot 0 \quad (3.2.14)$$

(B) 外管進外管出

裝置圖如圖(3.2-2)所示，其無因次速度分佈及流體平均流速分別

為：

$$u_a(\eta) = -2\bar{u}_a \left(1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right) \quad (3.2.15)$$

$$u_b(\eta) = \frac{2\bar{u}_b}{W_1} \left[1 - (\eta)^2 + W_2 \ln \eta \right] \quad (3.2.16)$$

$$\bar{u}_a = \frac{MV}{\pi(\kappa R)^2} \quad (3.2.17)$$

$$\bar{u}_b = \frac{(M+1)V}{\pi R^2 - \pi(\kappa R)^2} \quad (3.2.18)$$

將式(3.2.15)至式(3.2.18)代入式(3.0.2)、式(3.0.3)則式(3.0.30)及式

(3.0.31)則分別可改寫為：

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_a(\eta)}{d\eta} \right) + \frac{MB\eta}{2\kappa^2} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right] \psi_a(\eta) = 0 \quad (3.2.19)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_b(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{(M+1)B\eta [1 - \eta^2 + W_2 \ln \eta]}{2W_1(1 - \kappa^2)} \psi_b(\eta) = 0 \quad (3.2.20)$$

弗賓納斯表示式：

$$a_{2n} = \frac{-MB}{8\kappa^2} \frac{1}{n^2} \left(a_{2n-2} - \frac{1}{\kappa^2} a_{2n-4} \right) i \quad (3.2.21)$$

$$b_n = \frac{(M+1)B}{2W_1(1-\kappa^2)} \frac{1}{n^2} \left[\left(1 - \frac{3}{2}W_2 \right) b_{n-2} + 2W_2 b_{n-3} - \left(1 + \frac{1}{2}W_2 \right) b_{n-4} \right] i \quad (3.2.22)$$

式(3.0.38)與式(3.0.39)可分別改寫成

$$\theta_{1a} = \frac{M\theta_{0a}}{2\kappa^2} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{\eta^4}{16\kappa^2} + \gamma_{1a} \ln \eta + \gamma_{2a} \right] \quad (3.2.23)$$

$$\theta_{1b} = \frac{(M+1)\theta_{0b}}{2W_1(1-\kappa^2)} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{16}\eta^4 + \frac{W_2}{4}\eta^2 [\ln \eta - 1] + \gamma_{1b} \ln \eta + \gamma_{2b} \right] \quad (3.2.24)$$

其中在入口的無因次溫度可表示如下

$$\phi_b(\eta, 0) = \frac{-1}{V(M+1)} \int_0^\kappa u_a 2\pi R^2 \eta \phi_a(\eta, 0) d\eta \quad (3.2.25)$$

而且在出口之無因次溫度可寫成以下的積分式

$$\phi_F = \frac{1}{V(M+1)} \int_\kappa^1 u_b 2\pi R^2 \eta \phi_b \left(\eta, \frac{1}{Gz} \right) d\eta \quad (3.2.26)$$

亦可寫成

$$\phi_F(\eta, 0) = \frac{-1}{VM} \int_0^\kappa u_a 2\pi R^2 \eta \phi_a \left(\eta, \frac{1}{Gz} \right) d\eta \quad (3.2.27)$$

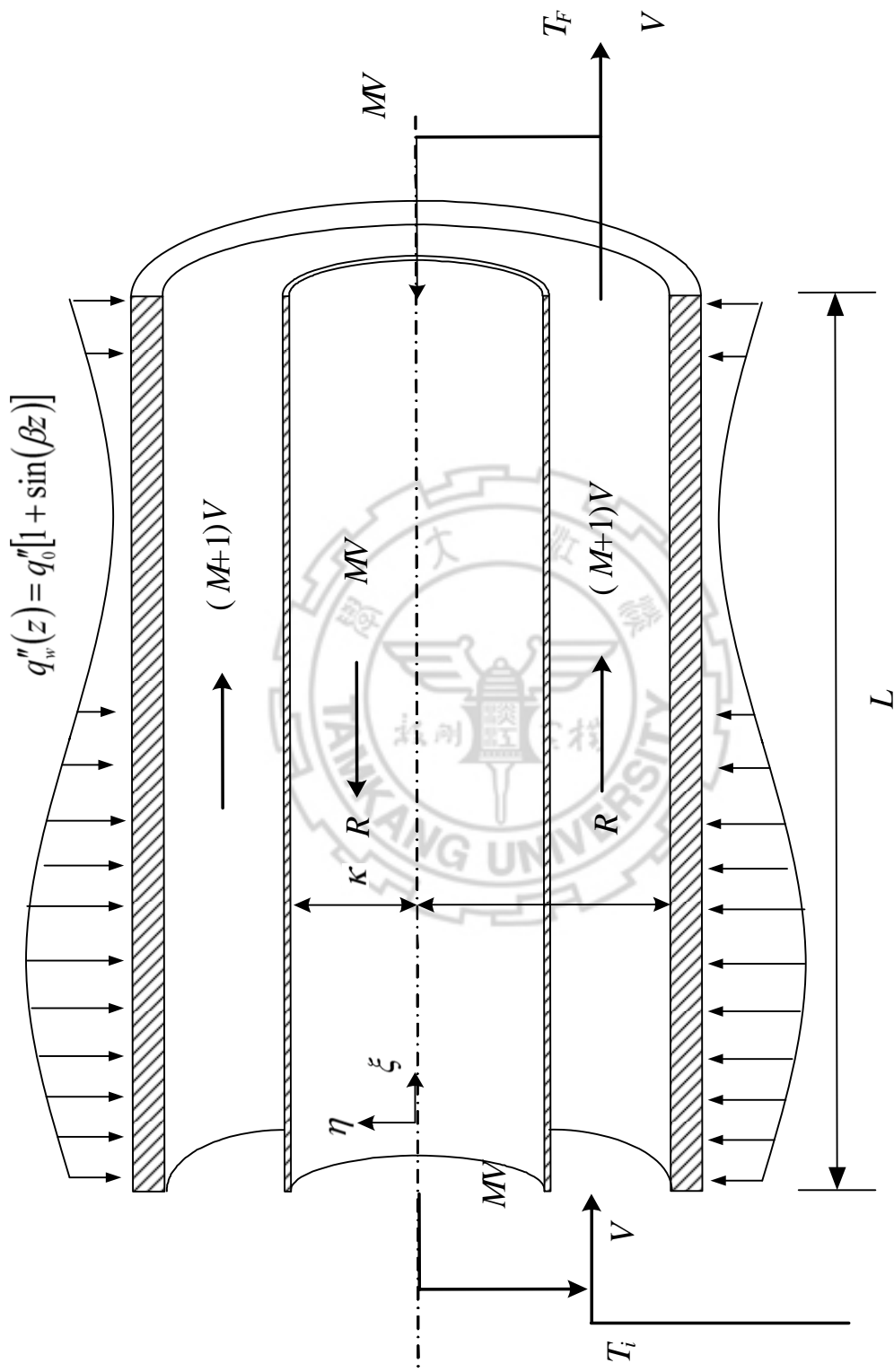


圖 (3.2-2) 末端出口模型之外管進外管出系統

3.3 出口迴流至末端模型之理論分析

(A) 內管進外管出

如圖(3.3-1)之內管入外管出，流體在穩定狀態下，以體積流率 V 溫度為 T_i 流進加熱器，在入口處為完全混合，出口的溫度為 T_F 。

無因次速度分佈及流體平均流速分別為：

$$u_a(\eta) = 2\bar{u}_a \left(1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right) \quad (3.3.1)$$

$$u_b(\eta) = -\frac{2\bar{u}_b}{W_1} \left[1 - \eta^2 + W_2 \ln \eta \right] \quad (3.3.2)$$

$$\bar{u}_a = \frac{V}{\pi(\kappa R)^2} \quad (3.3.3)$$

$$\bar{u}_b = \frac{(M+1)V}{\pi R^2 - \pi(\kappa R)^2} \quad (3.3.4)$$

將式(3.3.1)至式(3.3.4)代入式(3.0.2)、式(3.0.3)則式(3.0.30)及式(3.0.31)

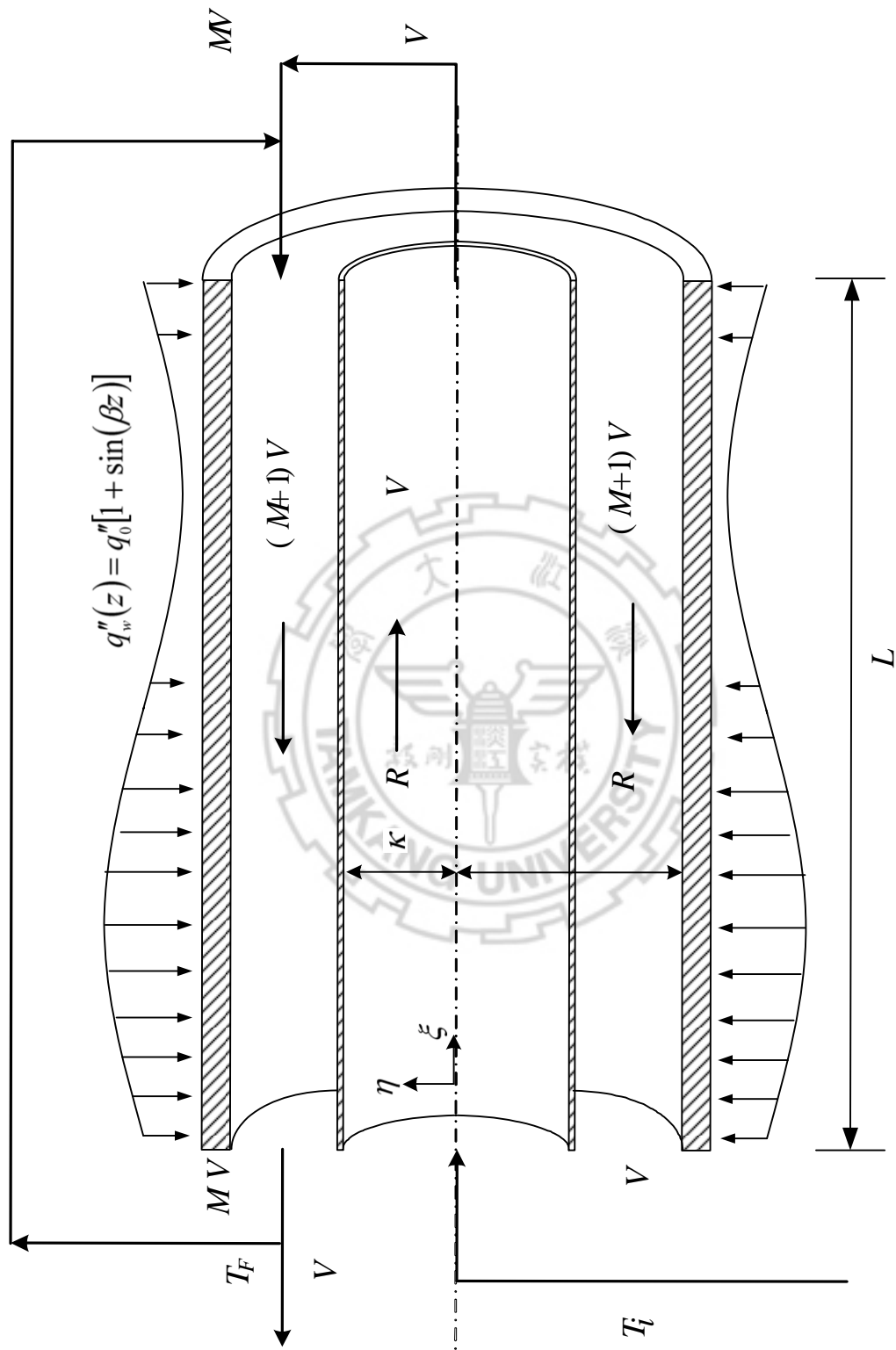
則分別可改寫為：

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_a(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{B\eta}{2\kappa^2} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right] \psi_a(\eta) = 0 \quad (3.3.5)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_b(\eta)}{d\eta} \right) + \frac{(M+1)B\eta [1 - \eta^2 + W_2 \ln \eta]}{2W_1(1 - \kappa^2)} \psi_b(\eta) = 0 \quad (3.3.6)$$

3.3-1 求 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$

為了求得 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$ ，式(3.3.5)與式(3.3.6)分



圖(33-1) 出口迴流至末端模型之內管進外管出系統

別可利用弗賓納斯法表示,其推導參照附錄(二)可得:

$$a_{2n} = \frac{B}{8\kappa^2} \frac{1}{n^2} \left(a_{2n-2} - \frac{1}{\kappa^2} a_{2n-4} \right) i \quad (3.3.7)$$

$$b_n = \frac{-(M+1)B}{2W_1(1-\kappa^2)} \frac{1}{n^2} \left[\left(1 - \frac{3}{2}W_2 \right) b_{n-2} + 2W_2 b_{n-3} - \left(1 + \frac{1}{2}W_2 \right) b_{n-4} \right] i \quad (3.3.8)$$

如此,可由以上的表示式經由比較可求得 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$ 。

3.3-2 求 θ_{0a} 、 $\theta_{1a}(\eta)$ 、 θ_{0b} 與 $\theta_{1b}(\eta)$

式(3.0.38)與式(3.0.39)可分別改寫成

$$\theta_{1a} = \frac{\theta_{0a}}{2\kappa^2} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{\eta^4}{16\kappa^2} + \gamma_{1a} \ln \eta + \gamma_{2a} \right] \quad (3.3.9)$$

$$\theta_{1b} = \frac{(M+1)\theta_{0b}}{2W_1(1-\kappa^2)} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{16}\eta^4 + \frac{W_2}{4}\eta^2[\ln \eta - 1] + \gamma_{1b} \ln \eta + \gamma_{2b} \right] \quad (3.3.10)$$

其中 γ_{1a} 、 γ_{2a} 、 γ_{1b} 、 γ_{2b} 為積分常數。

在管道位置為 L 位置的無因次溫度為

$$\phi_L = \frac{1}{V} \int_0^\kappa u_a 2\pi R^2 \eta \phi_a \left(\eta, \frac{1}{Gz} \right) d\eta \quad (3.3.11)$$

故可得到以下出口溫度的積分式

$$\phi_F = \frac{-1}{V(M+1)\kappa} \int_\kappa^1 u_b 2\pi R^2 \eta \phi_b(\eta, 0) d\eta \quad (3.3.12)$$

而在入口的無因次溫度表示如下

$$\phi_a(\eta,0) = \frac{k(T_i - T_i)}{q_0''R} = 0 = \frac{\int_0^\kappa u_a 2\pi R^2 \eta \phi_a(\eta,0) d\eta}{V} \quad (3.3.13)$$

管側末端溫度為

$$\phi_L = \frac{1}{V} \left(\frac{M}{M+1} \int_k^1 u_b 2\pi R^2 \eta \phi_b(\eta,0) d\eta - \int_k^1 u_b 2\pi R^2 \eta \phi_b(\eta, \frac{1}{Gz}) d\eta \right) \quad (3.3.14)$$

(B) 外管進內管出

裝置圖如圖(3.3-2)所示，其無因次速度分佈及流體平均流速分別

為：

$$u_a(\eta) = -2\bar{u}_a \left(1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right) \quad (3.3.15)$$

$$u_b(\eta) = \frac{2\bar{u}_b}{W_1} \left[1 - (\eta)^2 + W_2 \ln \eta \right] \quad (3.3.16)$$

$$\bar{u}_a = \frac{(M+1)V}{\pi(\kappa R)^2} \quad (3.3.17)$$

$$\bar{u}_b = \frac{V}{\pi R^2 - \pi(\kappa R)^2} \quad (3.3.18)$$

將式(3.1.15)至式(3.1.18)代入式(3.0.2)、式(3.0.3)則式(3.0.30)及式

(3.0.31)則分別可改寫為：

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_a(\eta)}{d\eta} \right) + \frac{(M+1)B\eta}{2\kappa^2} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right] \psi_a(\eta) = 0 \quad (3.3.19)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_b(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{B\eta[1 - \eta^2 + W_2 \ln \eta]}{2W_1(1 - \kappa^2)} \psi_b(\eta) = 0 \quad (3.3.20)$$

弗賓納斯表示式,則可參照附錄(二)推導方式得:

$$a_{2n} = \frac{-(M+1)B}{8\kappa^2} \frac{1}{n^2} \left(a_{2n-2} - \frac{1}{\kappa^2} a_{2n-4} \right) i \quad (3.3.21)$$

$$b_n = \frac{B}{2W_1(1-\kappa^2)} \frac{1}{n^2} \left[\left(1 - \frac{3}{2}W_2 \right) b_{n-2} + 2W_2 b_{n-3} - \left(1 + \frac{1}{2}W_2 \right) b_{n-4} \right] i \quad (3.3.22)$$

式(3.0.38)與式(3.0.39)可分別改寫成

$$\theta_{1a} = \frac{(M+1)\theta_{0a}}{2\kappa^2} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{\eta^4}{16\kappa^2} + \gamma_{1a} \ln \eta + \gamma_{2a} \right] \quad (3.3.23)$$

$$\theta_{1b} = \frac{\theta_{0b}}{2W_1(1-\kappa^2)} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{16}\eta^4 + \frac{W_2}{4}\eta^2 [\ln \eta - 1] + \gamma_{1b} \ln \eta + \gamma_{2b} \right] \quad (3.3.24)$$

其中 γ_{1a} 、 γ_{2a} 、 γ_{1b} 、 γ_{2b} 為積分常數。

出口處之無因次溫度為

$$\phi_F = \frac{-1}{V(M+1)} \int_0^\kappa u_a 2\pi R^2 \eta \phi_a(\eta, 0) d\eta \quad (3.3.25)$$

無因次入口溫度可寫成

$$\phi_b(\eta, 0) = \frac{k(T_i - T_o)}{q_0'' R} = 0 = \frac{\int_0^1 u_b 2\pi R^2 \eta \phi_b(\eta, 0) d\eta}{V} \quad (3.3.26)$$

管側末端溫度為

$$\phi_L = \frac{1}{V} \left(\frac{M}{M+1} \int_0^\kappa u_a 2\pi R^2 \eta \phi_a(\eta, 0) d\eta - \int_0^\kappa u_a 2\pi R^2 \eta \phi_a\left(\eta, \frac{1}{Gz}\right) d\eta \right) \quad (3.3.27)$$

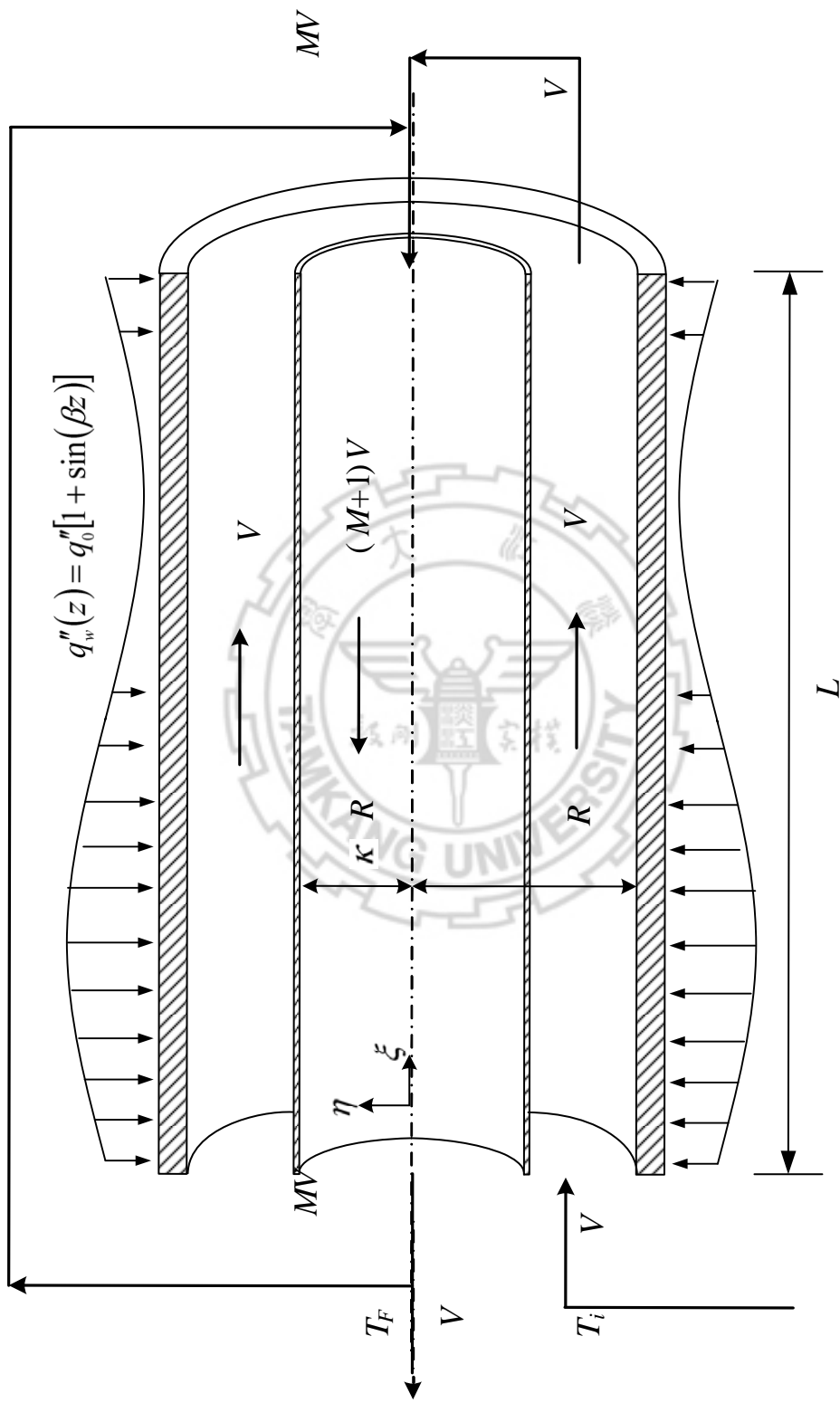


圖 (3.3-2) 出口迴流至末端模型之外管進內管出系統

3.4 末端迴流至入口模型之理論分析

(A) 內管進外管出

二行程迴流裝置流體進入管件為內管入外管出如圖(3.4-1)所示，流體在穩定狀態下，以體積流率 V 溫度為 T_i 在入口處與管末端迴流之體積為 MV 完全混合，出口的溫度為 T_F 。

無因次速度分佈及流體平均流速分別為：

$$u_a(\eta) = 2\bar{u}_a \left(1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right) \quad (3.4.1)$$

$$u_b(\eta) = -\frac{2\bar{u}_b}{W_1} \left[1 - (\eta)^2 + W_2 \ln \eta \right] \quad (3.4.2)$$

$$\bar{u}_a = \frac{(M+1)V}{\pi(\kappa R)^2} \quad (3.4.3)$$

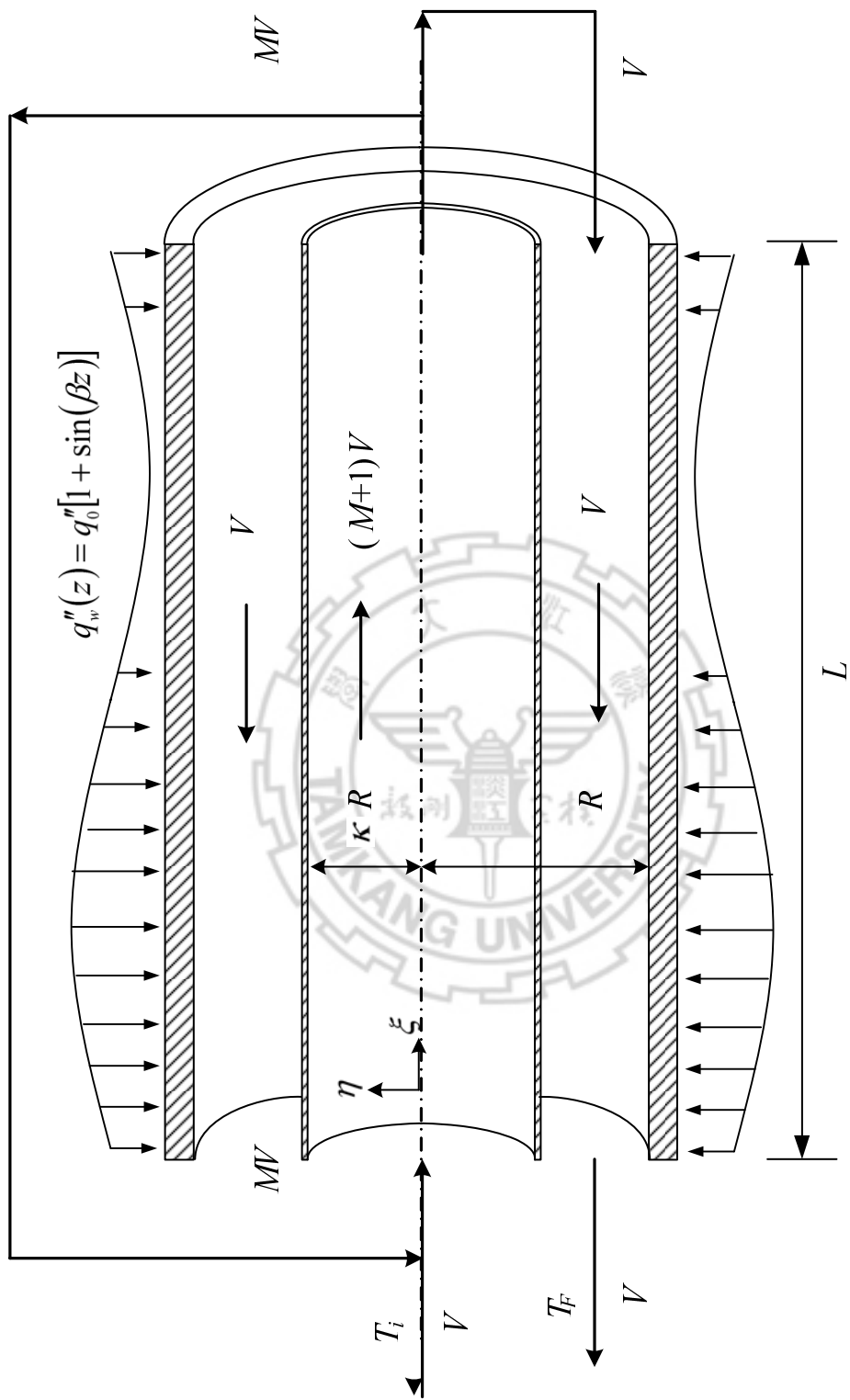
$$\bar{u}_b = \frac{V}{\pi R^2 - \pi(\kappa R)^2} \quad (3.4.4)$$

將式(3.4.1)至式(3.4.4)代入式(3.0.2)、式(3.0.3)則式(3.0.30)及式(3.0.31)

則分別可改寫為：

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_a(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{(M+1)B\eta}{2\kappa^2} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right] \psi_a(\eta) i = 0 \quad (3.4.5)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_b(\eta)}{d\eta} \right) + \frac{B\eta [1 - \eta^2 + W_2 \ln \eta]}{2W_1(1 - \kappa^2)} \psi_b(\eta) i = 0 \quad (3.4.6)$$



圖(3.4-1) 末端迴流至入口模型之內管進外管出系統

3.4-1 求 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$

為了求得 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$ ，式(3.4.5)與式(3.4.6)分別可利用弗賓納斯法表示，其推導參照附錄(二)可得：

$$a_{2n} = \frac{(M+1)B}{8\kappa^2} \frac{1}{n^2} \left(a_{2n-2} - \frac{1}{\kappa^2} a_{2n-4} \right) i \quad (3.4.7)$$

$$b_n = \frac{-B}{2W_1(1-\kappa^2)} \frac{1}{n^2} \left[\left(1 - \frac{3}{2}W_2 \right) b_{n-2} + 2W_2 b_{n-3} - \left(1 + \frac{1}{2}W_2 \right) b_{n-4} \right] i \quad (3.4.8)$$

如此，可由以上的表示式經由比較可求得 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$ 。

3.4-2 求 θ_{0a} 、 $\theta_{1a}(\eta)$ 、 θ_{0b} 與 $\theta_{1b}(\eta)$

式(3.0.38)與式(3.0.39)可分別改寫成

$$\theta_{1a} = \frac{(M+1)\theta_{0a}}{2\kappa^2} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{\eta^4}{16\kappa^2} + \gamma_{1a} \ln \eta + \gamma_{2a} \right] \quad (3.4.9)$$

$$\theta_{1b} = \frac{\theta_{0b}}{2W_1(1-\kappa^2)} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{16}\eta^4 + \frac{W_2}{4}\eta^2 [\ln \eta - 1] + \gamma_{1b} \ln \eta + \gamma_{2b} \right] \quad (3.4.10)$$

其中 γ_{1a} 、 γ_{2a} 、 γ_{1b} 、 γ_{2b} 為積分常數。

在入口處之無因次溫度定義為

$$\phi_a(\eta, 0) = \frac{k(T_a(r, 0) - T_i)}{q_0'' R} = \frac{1}{V(M+1)} \int_0^\kappa u_a 2\pi R^2 \eta \phi_a(\eta, 0) d\eta \quad (3.4.11)$$

故可得到以下出口溫度的積分式

$$\phi_F = \frac{-1}{V} \int_\kappa^1 u_b 2\pi R^2 \eta \phi_b(\eta, 0) d\eta \quad (3.4.12)$$

而在入口的無因次溫度表示如下

$$\phi_a(\eta, 0) = \frac{1}{V(M+1)} \left(\left(\frac{M}{M+1} \right) \int_0^\kappa v_a 2\pi R^2 \eta \phi_a \left(\eta, \frac{1}{Gz} \right) d\eta \right) \quad (3.4.13)$$

(B) 外管進內管出

裝置圖如圖(3.4-2)所示，其無因次速度分佈及流體平均流速分別

為：

$$u_a(\eta) = -2\bar{u}_a \left(1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right) \quad (3.4.14)$$

$$u_b(\eta) = \frac{2\bar{u}_b}{W_1} \left[1 - (\eta)^2 + W_2 \ln \eta \right] \quad (3.4.15)$$

$$\bar{u}_a = \frac{V}{\pi(\kappa R)^2} \quad (3.4.16)$$

$$\bar{u}_b = \frac{(M+1)V}{\pi R^2 - \pi(\kappa R)^2} \quad (3.4.17)$$

將式(3.4.14)至式(3.4.17)代入式(3.0.2)、式(3.0.3)則式(3.0.30)及式

(3.0.31)分別可改寫為：

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_a(\eta)}{d\eta} \right) + \frac{B\eta}{2\kappa^2} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right] \psi_a(\eta) = 0 \quad (3.4.18)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_b(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{(M+1)B\eta [1 - \eta^2 + W_2 \ln \eta]}{2W_1(1 - \kappa^2)} \psi_b(\eta) = 0 \quad (3.4.19)$$

弗賓納斯法表示式,則可參照附錄(二)得:

$$a_{2n} = \frac{-B}{8\kappa^2} \frac{1}{n^2} \left(a_{2n-2} - \frac{1}{\kappa^2} a_{2n-4} \right) i \quad (3.4.20)$$

$$b_n = \frac{(M+1)B}{2W_1(1-\kappa^2)} \frac{1}{n^2} \left[\left(1 - \frac{3}{2}W_2 \right) b_{n-2} + 2W_2 b_{n-3} - \left(1 + \frac{1}{2}W_2 \right) b_{n-4} \right] i \quad (3.4.21)$$

式(3.0.38)與式(3.0.39)可分別改寫成

$$\theta_{1a} = \frac{\theta_{0a}}{2\kappa^2} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{\eta^4}{16\kappa^2} + \gamma_{1a} \ln \eta + \gamma_{2a} \right] \quad (3.4.22)$$

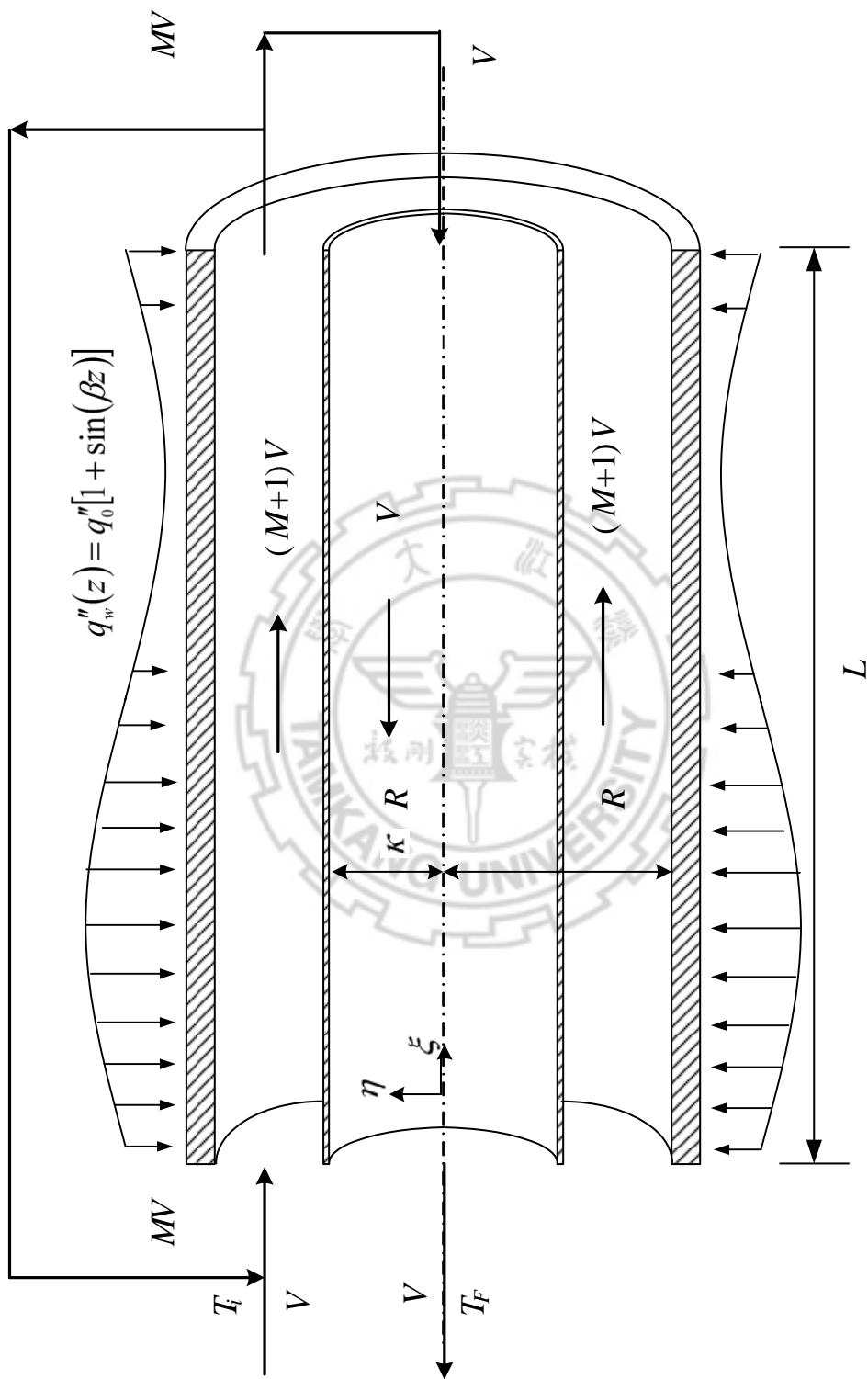
$$\theta_{1b} = \frac{(M+1)\theta_{0b}}{2W_1(1-\kappa^2)} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{16}\eta^4 + \frac{W_2}{4}\eta^2 [\ln \eta - 1] + \gamma_{1b} \ln \eta + \gamma_{2b} \right] \quad (3.4.23)$$

出口處之無因次溫度為

$$\phi_F = \frac{-1}{V} \int_0^\kappa u_a 2\pi R^2 \eta \phi_a(\eta, 0) d\eta \quad (3.4.24)$$

無因次入口溫度可寫成

$$\phi_{b,0} = \frac{1}{V(M+1)} \left(\left(\frac{M}{M+1} \right) \int_\kappa^1 u_b 2\pi R^2 \eta \phi_{L,b} \left(\eta, \frac{1}{Gz} \right) d\eta \right) \quad (3.4.25)$$



圖(3.4-2) 末端迴流至入口模型之外管進內管出系統

3.5 內外層等體積流動模型之理論分析

(A) 內管入外管

二行程迴流內管入外管裝置如圖(3.5-1)所示，流體進入管件在穩定狀態下，以體積流率 V 溫度為 T_i 在入口處與出口處體積為 MV 完全混合，出口的溫度為 T_F 。

無因次速度分佈及流體平均流速分別為：

$$u_a(\eta) = 2\bar{u}_a \left(1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right) \quad (3.5.1)$$

$$u_b(\eta) = -\frac{2\bar{u}_b}{W_1} \left[1 - (\eta)^2 + W_2 \ln \eta \right] \quad (3.5.2)$$

$$\bar{u}_a = \frac{(M+1)V}{\pi(\kappa R)^2} \quad (3.5.3)$$

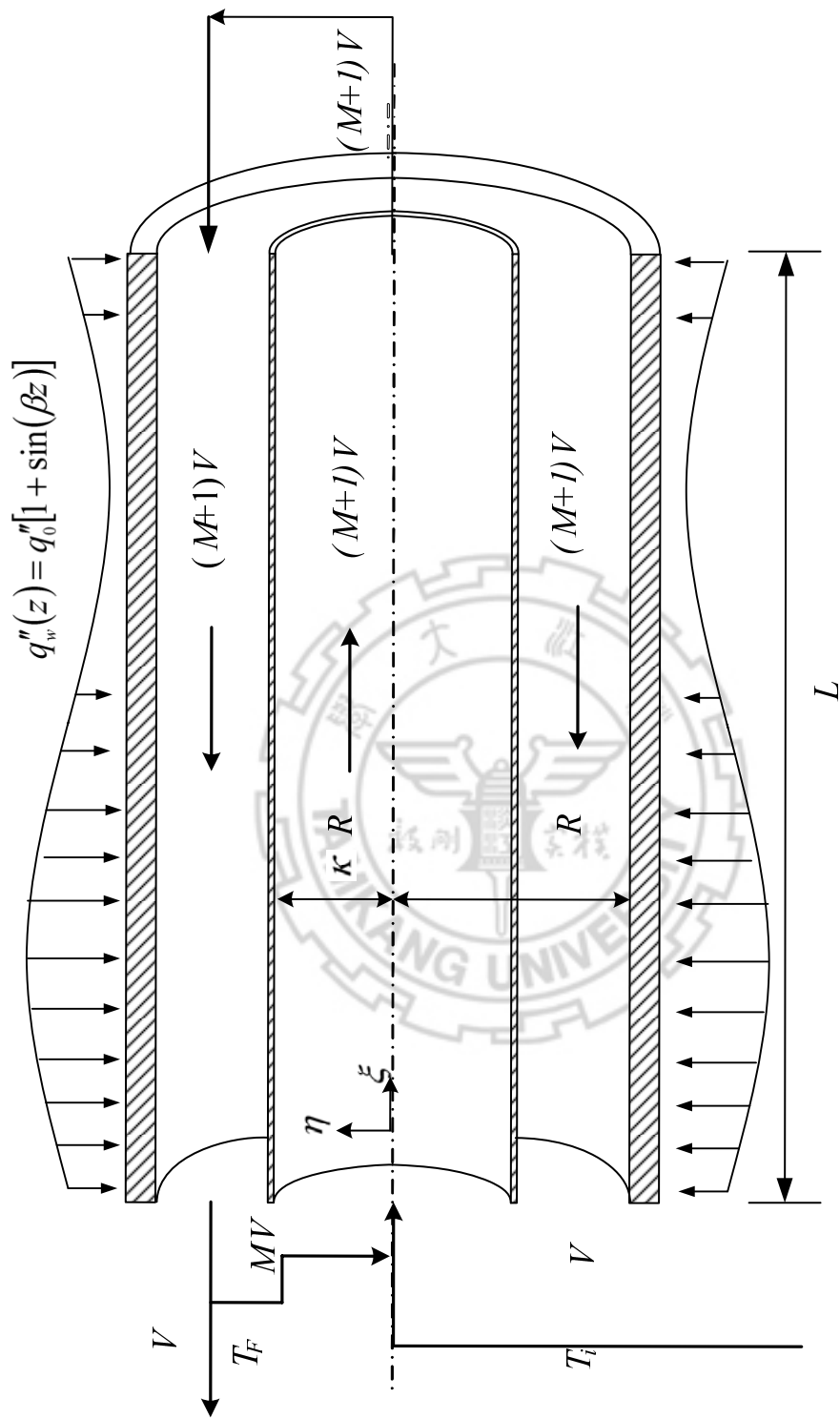
$$\bar{u}_b = \frac{(M+1)V}{\pi R^2 - \pi(\kappa R)^2} \quad (3.5.4)$$

將式(3.5.1)至式(3.5.4)代入式(3.0.2)、式(3.0.3)則式(3.0.30)及式(3.0.31)

則分別可改寫為：

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_a(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{(M+1)B\eta}{2\kappa^2} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right] \psi_a(\eta) = 0 \quad (3.5.5)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_b(\eta)}{d\eta} \right) + \frac{(M+1)B\eta [1 - \eta^2 + W_2 \ln \eta]}{2W_1(1 - \kappa^2)} \psi_b(\eta) = 0 \quad (3.5.6)$$



圖(3.5-1) 內外層等體積流動模型之內管進外管出系統

3.5-1 求 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$

為了求得 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$ ，式(3.5.5)與式(3.5.6)分別可利用弗賓納斯法表示，其推導參照附錄(二)可得：

$$a_{2n} = \frac{(M+1)B}{8\kappa^2} \frac{1}{n^2} \left(a_{2n-2} - \frac{1}{\kappa^2} a_{2n-4} \right) i \quad (3.5.7)$$

$$b_n = \frac{-(M+1)B}{2W_1(1-\kappa^2)} \frac{1}{n^2} \left[\left(1 - \frac{3}{2}W_2 \right) b_{n-2} + 2W_2 b_{n-3} - \left(1 + \frac{1}{2}W_2 \right) b_{n-4} \right] i \quad (3.5.8)$$

如此，可由以上的表示式經由比較係數可求得 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$ 。

3.5-2 求 θ_{0a} 、 $\theta_{1a}(\eta)$ 、 θ_{0b} 與 $\theta_{1b}(\eta)$

式(3.0.38)與式(3.0.39)可分別改寫成

$$\theta_{1a} = \frac{(M+1)\theta_{0a}}{2\kappa^2} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{\eta^4}{16\kappa^2} + \gamma_{1a} \ln \eta + \gamma_{2a} \right] \quad (3.5.9)$$

$$\theta_{1b} = \frac{(M+1)\theta_{0b}}{2W_1(1-\kappa^2)} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{16}\eta^4 + \frac{W_2}{4}\eta^2 [\ln \eta - 1] + \gamma_{1b} \ln \eta + \gamma_{2b} \right] \quad (3.5.10)$$

其中 γ_{1a} 、 γ_{2a} 、 γ_{1b} 、 γ_{2b} 為積分常數。

在入口處之無因次溫度定義為

$$\phi_a(\eta, 0) = \frac{k(T_a(r, 0) - T_i)}{q_0'' R} = \frac{1}{V(M+1)} \int_0^\kappa u_a 2\pi R^2 \eta \phi_a(\eta, 0) d\eta \quad (3.5.11)$$

故可得到以下出口溫度的積分式

$$\phi_F = -\frac{1}{V(M+1)} \int_\kappa^1 u_b 2\pi R^2 \eta \phi_b(\eta, 0) d\eta \quad (3.5.12)$$

而在入口的無因次溫度表示如下

$$\phi_a(\eta,0) = \frac{-1}{V(M+1)} \left(\left(\frac{M}{M+1} \right) \int_{\kappa}^1 u_b 2\pi R^2 \eta \phi_b(\eta,0) d\eta \right) \quad (3.5.13)$$

(B) 外管入內管

裝置圖如圖(3.5-2)所示，其無因次速度分佈及流體平均流速分別

為：

$$u_a(\eta) = -2\bar{u}_a \left(1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right) \quad (3.5.14)$$

$$u_b(\eta) = \frac{2\bar{u}_b}{W_1} \left[1 - (\eta)^2 + W_2 \ln \eta \right] \quad (3.5.15)$$

$$\bar{u}_a = \frac{(M+1)V}{\pi(\kappa R)^2} \quad (3.5.16)$$

$$\bar{u}_b = \frac{(M+1)V}{\pi R^2 - \pi(\kappa R)^2} \quad (3.5.17)$$

將式(3.5.14)至式(3.5.17)代入式(3.0.2)、式(3.0.3)則式(3.0.30)及式

(3.0.31)則分別可變為：

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_a(\eta)}{d\eta} \right) + \frac{(M+1)B\eta}{2\kappa^2} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right] \psi_a(\eta) = 0 \quad (3.5.18)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_b(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{(M+1)B\eta [1 - \eta^2 + W_2 \ln \eta]}{2W_1(1 - \kappa^2)} \psi_b(\eta) = 0 \quad (3.5.19)$$

弗賓納斯法表示式,則可參照附錄(二)推導方式得:

$$a_{2n} = \frac{-(M+1)B}{8\kappa^2} \frac{1}{n^2} \left(a_{2n-2} - \frac{1}{\kappa^2} a_{2n-4} \right) i \quad (3.5.20)$$

$$b_n = \frac{(M+1)B}{2W_1(1-\kappa^2)} \frac{1}{n^2} \left[\left(1 - \frac{3}{2}W_2 \right) b_{n-2} + 2W_2 b_{n-3} - \left(1 + \frac{1}{2}W_2 \right) b_{n-4} \right] i \quad (3.5.21)$$

式(3.0.38)與式(3.0.39)可分別改寫成

$$\theta_{1a} = \frac{(M+1)\theta_{0a}}{2\kappa^2} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{\eta^4}{16\kappa^2} + \gamma_{1a} \ln \eta + \gamma_{2a} \right] \quad (3.5.22)$$

$$\theta_{1b} = \frac{(M+1)\theta_{0b}}{2W_1(1-\kappa^2)} \left[\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{16}\eta^4 + \frac{W_2}{4}\eta^2 [\ln \eta - 1] + \gamma_{1b} \ln \eta + \gamma_{2b} \right] \quad (3.5.23)$$

出口處之無因次溫度為

$$\phi_F = \frac{-1}{(M+1)V} \int_0^\kappa u_a 2\pi R^2 \eta \phi_a(\eta, 0) d\eta \quad (3.5.24)$$

無因次入口溫度可寫成

$$\phi_b(\eta, 0) = \frac{-1}{V(M+1)} \left(\left(\frac{M}{M+1} \right)^\kappa \int_0^\kappa u_a 2\pi R^2 \eta \phi_a(\eta, 0) d\eta \right) \quad (3.5.25)$$

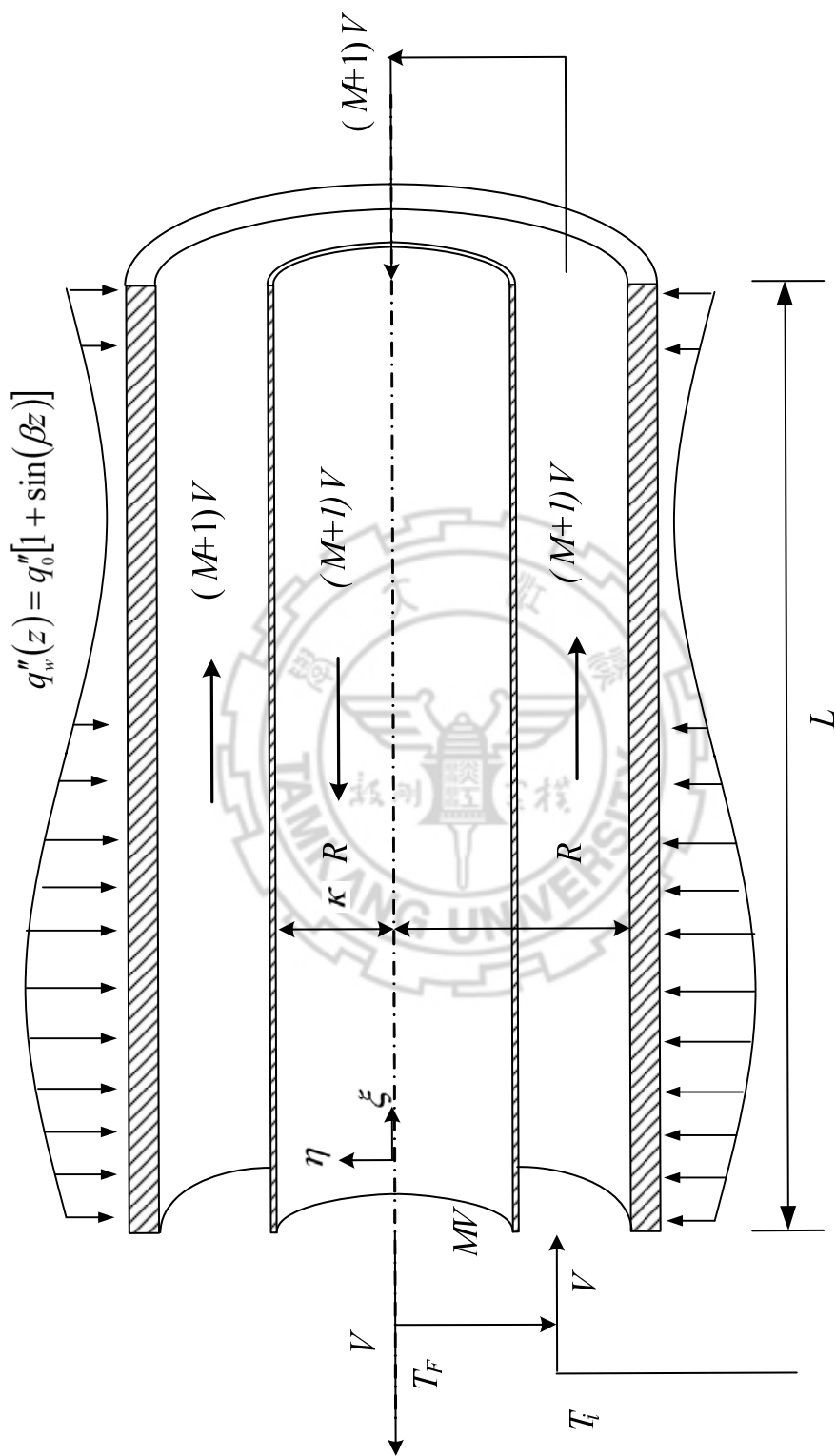


圖 (3.5-2) 內外層等體積流動模型之外管進內管出系統

3.6 熱傳效率的改善

為了瞭解本研究所增加的隔板在不同的位置及不同迴流的情況下，與沒有加入隔板及迴流時熱傳導效率的改變，我們定義了一納塞數：

於二行程迴流操作下我們可定義如下

$$Nu(\xi) = \frac{\bar{h}D_e}{k} \quad (3.6.1)$$

而平均熱對流係數定義如下

$$q_w''(z) = \bar{h}(T_w(R, z) - T_i) \quad (3.6.2)$$

將式(3.6.2)無因次化可得

$$\bar{h} = \frac{q_w''(\xi)}{\frac{q_0''R}{k} \phi_w(1, \xi)} \quad (3.6.4)$$

其中

$$q_w''(\xi) = q_0''[1 + \sin(B\xi)] \quad (3.6.5)$$

所以

$$Nu(\xi) = \frac{2q_w''(\xi)}{\phi_w(1, \xi)q_0''} \quad (3.6.6)$$

同理，單通道

$$Nu_0(\xi) = \frac{2q_w''(\xi)}{\phi_{0,w}(1, \xi)q_0''} \quad (3.6.7)$$

平均納塞數

$$\overline{Nu} = Gz \int_0^{1/Gz} Nu(\xi) d\xi \quad (3.6.8)$$

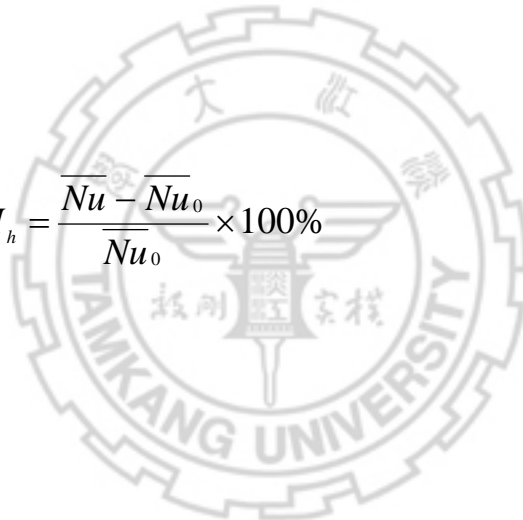
同理，單通道

$$\overline{Nu}_0 = Gz \int_0^{1/Gz} Nu_0(\xi) d\xi \quad (3.6.9)$$

由基本的圓管型熱交換器（無迴流無隔板）與有迴流及隔板的同心圓柱套管型熱交換器相互比較，計算效率百分比，因此效率百分比 I 可

定義為：

$$I_h = \frac{\overline{Nu} - \overline{Nu}_0}{\overline{Nu}_0} \times 100\% \quad (3.6.10)$$



3.7 能源消耗之增加率問題

本研究所增加的隔板在不同的位置及不同迴流的情況下將會增加入口端能源的消耗，在本節中主要是討論具迴流之套管型熱交換器的能源增加率，並與沒加入迴流及隔板之單行程系統作比較。

流體流經管道的磨擦損失可以假設為

$$h_{fs} = 4f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{u}^2}{2g_c} \quad (3.7.1)$$

其中 \bar{u} 為平均速度， D 為水力半徑， f 為磨擦因子是雷諾數 Re 的函數。

接下來我們對各種不同的迴流形式做以下的討論

當單行程時流體在管件的平均速度為：

$$\bar{u}_0 = \frac{V}{\pi R^2} \quad (3.7.2)$$

流體在 a 通道體積流速分別為 V ， MV 與 $(M+1)$ 時的平均速度為

$$u_a = \frac{V}{\pi(\kappa R)^2}, \quad u_a = \frac{MV}{\pi(\kappa R)^2}, \quad u_a = \frac{(M+1)V}{\pi(\kappa R)^2} \quad (3.7.3)$$

流體在 b 通道體積流速分別為 V ， MV 與 $(M+1)$ 時的平均速度為

$$u_b = \frac{V}{\pi(R^2 - (\kappa R)^2)}, \quad u_b = \frac{MV}{\pi(R^2 - (\kappa R)^2)}, \quad u_b = \frac{(M+1)V}{\pi(R^2 - (\kappa R)^2)} \quad (3.7.4)$$

水力半徑分別為

$$D_0 = 2R, \quad D_a = 2\kappa R, \quad D_b = 2(R - \kappa R) \quad (3.7.5)$$

假設管內流體流動為層流(Laminar flow)則

$$f = \frac{16}{Re} \quad (3.7.6)$$

所以

$$h_{fs} \propto \frac{\bar{u}}{D^2} \quad (3.7.7)$$

可以計算出能源損耗的提高率 I_p 定義如下

$$I_p = \frac{(P_a + P_b) - P_0}{P_0} \quad (3.7.8)$$

其中 $P = V \cdot \rho \cdot h_{fs}$ 。

將以上各種迴流整理可得個種形式之能源損耗與隔板位置及迴流的關係式，如下所示

(1) 二行程無迴流裝置內管進外管出模型與二行程無迴流裝置外管進內管出模型

$$I_p = \frac{1}{\kappa^4} + \frac{1}{(1 - \kappa^2)(1 - \kappa)^2} - 1 \quad (3.7.9)$$

(2) 末端出口內管進內管出模型

$$I_p = \frac{(M+1)^2}{\kappa^4} + \frac{M^2}{(1-\kappa^2)(1-\kappa)^2} - 1 \quad (3.7.10)$$

(3) 末端出口外管進外管出模型

$$I_p = \frac{M^2}{\kappa^4} + \frac{(M+1)^2}{(1-\kappa^2)(1-\kappa)^2} - 1 \quad (3.7.11)$$

(4) 出口迴流至末端內管入外管出模型與末端迴流至入口外管入內管出模型

$$I_p = \frac{1}{\kappa^4} + \frac{(M+1)^2}{(1-\kappa^2)(1-\kappa)^2} - 1 \quad (3.7.12)$$

(5) 出口迴流至末端外管入內管出模型與末端迴流至入口內管入外管出模型

$$I_p = \frac{(M+1)^2}{\kappa^4} + \frac{1}{(1-\kappa^2)(1-\kappa)^2} - 1 \quad (3.7.13)$$

(6) 內外等體積內管入外管出模型與內外等體積外管入內管出模型

$$I_p = \frac{(M+1)^2}{\kappa^4} + \frac{(M+1)^2}{(1-\kappa^2)(1-\kappa)^2} - 1 \quad (3.7.14)$$

第四章

結果與討論

在本研究以管壁熱通量為正弦函數之逆流型套管熱交換器中，利用弗賓納斯法求得其近似解。討論各種迴流型式中，分別取一組固定迴流比 $M=1$ 及隔板位置 $\kappa=0.5$ ，以不同的格拉茲數為參數，取級數項數七十項和七十五項為範例，結果顯示，如表(一)至表(十)所示， $\theta_{2a}(0.3)$ 、 $\theta_{3a}(0.3)$ 、 $\theta_{2b}(0.7)$ 與 $\theta_{3b}(0.7)$ 其多項式的收斂，所得的結果已在可接受的範圍。所以，本研究中級數項數皆取七十項為計算項。

另外，本研究中，無因次溫度表示式是由一無窮級數展開式求得，如附錄式(B25)及式(B26)所示；其中外通道的速度分佈中 $\ln \eta$ 項是以泰勒展開式(B17)求得。由表(十一)至表(二十)所示，顯示泰勒展開式 $N=2$ 所計算出的所有係數及納塞數之結果已符合收斂要求，故可用於計算求值。

而由表(一)至表(二十)之結果發現 $\theta_{2a}(0.3)$ 、 $\theta_{3a}(0.3)$ 、 $\theta_{2b}(0.7)$ 與 $\theta_{3b}(0.7)$ 其值極小，可知 $\theta_{2a}(\eta)$ 、 $\theta_{3a}(\eta)$ 、 $\theta_{2b}(\eta)$ 與 $\theta_{3b}(\eta)$ 對無因次溫度影響不大，故可以知道影響無因次溫度的參數主要是 θ_{0a} 、 $\theta_{1a}(\eta)$ 、 θ_{0b} 與 $\theta_{1b}(\eta)$ 。

表(一) 二行程無迴流裝置內管進外管出模型之級數解收斂情形當

$n = 70$ 和 $n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$ 。

Gz	n	$\theta_{2a}(0.3)$	$\theta_{3a}(0.3)$	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	70	-0.118	0.242	0.148	-1.524	0.09
	75	-0.118	0.242	0.148	-1.524	0.09
10	70	3.7×10^{-5}	9.1×10^{-6}	-5.0×10^{-4}	3.8×10^{-4}	2.34
	75	4.0×10^{-5}	-2.6×10^{-6}	-7.8×10^{-4}	7.9×10^{-4}	2.34
50	70	6.4×10^{-21}	1.5×10^{-21}	1.6×10^{-13}	-7.6×10^{-15}	6.62
	75	6.3×10^{-21}	-3.1×10^{-21}	2.6×10^{-14}	-1.1×10^{-15}	6.62
100	70	-2.2×10^{-24}	1.0×10^{-24}	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	8.04
	75	-6.8×10^{-26}	3.3×10^{-26}	2.6×10^{-14}	-1.2×10^{-15}	8.04
200	70	-7.3×10^{-26}	1.4×10^{-25}	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	8.99
	75	-7.8×10^{-27}	2.4×10^{-26}	2.7×10^{-14}	-1.3×10^{-15}	8.99

表(二) 二行程無迴流裝置外管進內管出模型之級數解收斂情形當

$n = 70$ 和 $n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$ 。

Gz	n	$\theta_{2a}(0.3)$	$\theta_{3a}(0.3)$	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	70	-0.118	0.242	0.148	-1.524	0.36
	75	-0.118	0.242	0.148	-1.524	0.36
10	70	3.7×10^{-5}	9.1×10^{-6}	-5.0×10^{-4}	3.8×10^{-4}	4.39
	75	4.0×10^{-5}	-2.6×10^{-6}	-7.8×10^{-4}	7.9×10^{-4}	4.39
50	70	6.4×10^{-21}	1.5×10^{-21}	1.6×10^{-13}	-7.6×10^{-15}	8.09
	75	6.3×10^{-21}	-3.1×10^{-21}	2.6×10^{-14}	-1.1×10^{-15}	8.09
100	70	-2.2×10^{-24}	1.0×10^{-24}	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	9.00
	75	-6.8×10^{-26}	3.3×10^{-26}	2.6×10^{-14}	-1.2×10^{-15}	9.00
200	70	-7.3×10^{-26}	1.4×10^{-25}	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	9.56
	75	-7.8×10^{-27}	2.4×10^{-26}	2.7×10^{-14}	-1.3×10^{-15}	9.56

表(三) 末端出口內管進內管出模型之級數解收斂情形當 $n = 70$ 和

$n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$ 。

Gz	n	$\theta_{2a}(0.3)$	$\theta_{3a}(0.3)$	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	70	-0.063	0.242	0.148	-1.524	0.69
	75	-0.063	0.242	0.148	-1.524	0.69
10	70	1.9×10^{-5}	-1.6×10^{-6}	-5.0×10^{-4}	3.8×10^{-4}	1.45
	75	1.5×10^{-5}	-1.9×10^{-6}	-7.8×10^{-4}	7.9×10^{-4}	1.45
50	70	1.8×10^{-21}	-1.1×10^{-21}	1.6×10^{-13}	-7.6×10^{-15}	4.28
	75	6.8×10^{-22}	-2.1×10^{-21}	2.6×10^{-14}	-1.1×10^{-15}	4.28
100	70	-7.1×10^{-26}	1.4×10^{-25}	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	5.98
	75	-7.6×10^{-27}	2.3×10^{-26}	2.6×10^{-14}	-1.2×10^{-15}	5.98
200	70	-1.5×10^{-31}	7.5×10^{-32}	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	7.51
	75	-1.6×10^{-33}	-1.6×10^{-32}	2.7×10^{-14}	-1.3×10^{-15}	7.51

表(四) 末端出口外管進外管出模型之級數解收斂情形當 $n = 70$ 和

$n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$ 。

Gz	n	$\theta_{2a}(0.3)$	$\theta_{3a}(0.3)$	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	70	-0.135	0.157	0.069	-0.687	0.42
	75	-0.135	0.157	0.069	-0.687	0.42
10	70	9.6×10^{-12}	1.0×10^{-11}	-2.2×10^{-10}	-4.0×10^{-12}	3.22
	75	5.9×10^{-11}	9.4×10^{-13}	-7.0×10^{-10}	6.8×10^{-10}	3.22
50	70	-7.1×10^{-24}	-2.6×10^{-24}	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	6.88
	75	-2.2×10^{-25}	-8.1×10^{-26}	2.6×10^{-14}	-1.2×10^{-15}	6.88
100	70	-2.2×10^{-24}	1.1×10^{-24}	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	8.18
	75	-7.1×10^{-26}	3.5×10^{-26}	2.7×10^{-14}	-1.3×10^{-15}	8.18
200	70	-7.6×10^{-26}	1.5×10^{-25}	1.7×10^{-13}	-8.6×10^{-15}	9.07
	75	-8.1×10^{-27}	2.5×10^{-26}	2.7×10^{-14}	-1.3×10^{-15}	9.07

表(五) 出口迴流至末端內管進外管出模型之級數解收斂情形當

$n = 70$ 和 $n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$ 。

Gz	n	$\theta_{2a}(0.3)$	$\theta_{3a}(0.3)$	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	70	-0.135	0.157	0.069	-0.687	0.18
	75	-0.135	0.157	0.069	-0.687	0.18
10	70	9.6×10^{-12}	1.0×10^{-11}	-2.2×10^{-10}	-4.0×10^{-12}	2.03
	75	5.9×10^{-11}	9.4×10^{-13}	-7.0×10^{-10}	6.8×10^{-10}	2.03
50	70	-7.1×10^{-24}	-2.6×10^{-24}	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	5.86
	75	-2.2×10^{-25}	-8.1×10^{-26}	2.6×10^{-14}	-1.2×10^{-15}	8.86
100	70	-2.2×10^{-24}	1.1×10^{-24}	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	7.46
	75	-7.1×10^{-26}	3.5×10^{-26}	2.7×10^{-14}	-1.3×10^{-15}	7.46
200	70	-7.6×10^{-26}	1.5×10^{-25}	1.7×10^{-13}	-8.6×10^{-15}	8.62
	75	-8.1×10^{-27}	2.5×10^{-26}	2.7×10^{-14}	-1.3×10^{-15}	8.62

表(六) 出口迴流至末端外管進內管出模型之級數解收斂情形當

$n = 70$ 和 $n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$ 。

Gz	n	$\theta_{2a}(0.3)$	$\theta_{3a}(0.3)$	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	70	-0.063	0.242	0.148	-1.524	0.55
	75	-0.063	0.242	0.148	-1.524	0.55
10	70	1.9×10^{-5}	-1.6×10^{-6}	-5.0×10^{-4}	3.8×10^{-4}	4.45
	75	1.5×10^{-5}	-1.9×10^{-6}	-7.8×10^{-4}	7.9×10^{-4}	4.45
50	70	1.8×10^{-21}	-1.1×10^{-21}	1.6×10^{-13}	-7.6×10^{-15}	8.07
	75	6.8×10^{-22}	-2.1×10^{-21}	2.6×10^{-14}	-1.1×10^{-15}	8.07
100	70	-7.1×10^{-26}	1.4×10^{-25}	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	8.99
	75	-7.6×10^{-27}	2.3×10^{-26}	2.6×10^{-14}	-1.2×10^{-15}	8.99
200	70	-1.5×10^{-31}	7.5×10^{-32}	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	9.55
	75	-1.6×10^{-33}	-1.6×10^{-32}	2.7×10^{-14}	-1.3×10^{-15}	9.55

表(七) 末端迴流至入口內管進外管出模型之級數解收斂情形當

$n = 70$ 和 $n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$ 。

Gz	n	$\theta_{2a}(0.3)$	$\theta_{3a}(0.3)$	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	70	-0.063	0.242	0.148	-1.524	0.16
	75	-0.063	0.242	0.148	-1.524	0.16
10	70	1.9×10^{-5}	-1.6×10^{-6}	-5.0×10^{-4}	3.8×10^{-4}	2.44
	75	1.5×10^{-5}	-1.9×10^{-6}	-7.8×10^{-4}	7.9×10^{-4}	2.44
50	70	1.8×10^{-21}	-1.1×10^{-21}	1.6×10^{-13}	-7.6×10^{-15}	6.61
	75	6.8×10^{-22}	-2.1×10^{-21}	2.6×10^{-14}	-1.1×10^{-15}	6.61
100	70	-7.1×10^{-26}	1.4×10^{-25}	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	8.03
	75	-7.6×10^{-27}	2.3×10^{-26}	2.6×10^{-14}	-1.2×10^{-15}	8.03
200	70	-1.5×10^{-31}	7.5×10^{-32}	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	8.98
	75	-1.6×10^{-33}	-1.6×10^{-32}	2.7×10^{-14}	-1.3×10^{-15}	8.98

表(八) 末端迴流至入口外管進內管出模型之級數解收斂情形當

$n = 70$ 和 $n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$ 。

Gz	n	$\theta_{2a}(0.3)$	$\theta_{3a}(0.3)$	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	70	-0.135	0.157	0.069	-0.687	0.23
	75	-0.135	0.157	0.069	-0.687	0.23
10	70	9.6×10^{-12}	1.0×10^{-11}	-2.2×10^{-10}	-4.0×10^{-12}	2.33
	75	5.9×10^{-11}	9.4×10^{-13}	-7.0×10^{-10}	6.8×10^{-10}	2.33
50	70	-7.1×10^{-24}	-2.6×10^{-24}	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	6.34
	75	-2.2×10^{-25}	-8.1×10^{-26}	2.6×10^{-14}	-1.2×10^{-15}	6.34
100	70	-2.2×10^{-24}	1.1×10^{-24}	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	7.84
	75	-7.1×10^{-26}	3.5×10^{-26}	2.7×10^{-14}	-1.3×10^{-15}	7.84
200	70	-7.6×10^{-26}	1.5×10^{-25}	1.7×10^{-13}	-8.6×10^{-15}	8.87
	75	-8.1×10^{-27}	2.53×10^{-26}	2.7×10^{-14}	-1.3×10^{-15}	8.87

表(九) 內外等體積內管進外管出模型之級數解收斂情形當 $n = 70$ 和

$n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$ 。

Gz	n	$\theta_{2a}(0.3)$	$\theta_{3a}(0.3)$	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	70	-0.07	0.07	0.06	-0.68	0.16
	75	-0.07	0.07	0.06	-0.68	0.16
10	70	6.2×10^{-12}	3.2×10^{-12}	-2.2×10^{-10}	-4.0×10^{-12}	2.24
	75	2.8×10^{-11}	-9.1×10^{-12}	-7.0×10^{-10}	6.8×10^{-11}	2.24
50	70	-2.2×10^{-24}	1.0×10^{-24}	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	6.07
	75	-3.8×10^{-26}	3.3×10^{-26}	2.6×10^{-14}	-1.2×10^{-15}	6.07
100	70	-7.3×10^{-26}	1.4×10^{-25}	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	7.61
	75	-7.8×10^{-27}	2.4×10^{-26}	2.7×10^{-14}	-1.3×10^{-15}	7.61
200	70	-1.6×10^{-31}	7.9×10^{-32}	1.7×10^{-13}	-8.6×10^{-15}	8.72
	75	-1.7×10^{-33}	-1.7×10^{-32}	2.7×10^{-14}	-1.3×10^{-15}	8.72

表(十) 內外等體積外管進內管出模型之級數解收斂情形當 $n = 70$ 和

$n = 75$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$ 。

Gz	n	$\theta_{2a}(0.3)$	$\theta_{3a}(0.3)$	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	70	-0.07	0.07	0.06	-0.68	0.25
	75	-0.07	0.07	0.06	-0.68	0.25
10	70	6.2×10^{-12}	3.2×10^{-12}	-2.2×10^{-10}	-4.0×10^{-12}	2.69
	75	2.8×10^{-11}	-9.1×10^{-12}	-7.0×10^{-10}	6.8×10^{-11}	2.69
50	70	-2.2×10^{-24}	1.0×10^{-24}	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	6.61
	75	-3.8×10^{-26}	3.3×10^{-26}	2.6×10^{-14}	-1.2×10^{-15}	6.61
100	70	-7.3×10^{-26}	1.4×10^{-25}	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	8.02
	75	-7.8×10^{-27}	2.4×10^{-26}	2.7×10^{-14}	-1.3×10^{-15}	8.02
200	70	-1.6×10^{-31}	7.9×10^{-32}	1.7×10^{-13}	-8.6×10^{-15}	8.97
	75	-1.7×10^{-33}	-1.7×10^{-32}	2.7×10^{-14}	-1.3×10^{-15}	8.97

表(十一) 二行程無迴流裝置內管進外管出模型以式(B4)之泰勒展開

式收斂情形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$ 。

Gz	N	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	2	0.148	-1.524	0.09
	3	-0.012	-0.001	0.09
10	2	-5.0×10^{-4}	3.8×10^{-4}	2.34
	3	-5.5×10^{-6}	3.7×10^{-5}	2.34
50	2	1.6×10^{-13}	-7.6×10^{-15}	6.62
	3	1.0×10^{-13}	-1.0×10^{-13}	6.62
100	2	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	8.04
	3	1.5×10^{-13}	-1.2×10^{-13}	8.04
200	2	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	8.99
	3	2.0×10^{-13}	-1.0×10^{-13}	8.99

表(十二) 二行程無迴流裝置外管進內管出模型以式(B4)之泰勒展開

式收斂情形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$ 。

Gz	N	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	2	0.148	-1.524	0.36
	3	-0.012	-0.001	0.36
10	2	-5.0×10^{-4}	3.8×10^{-4}	4.39
	3	-5.5×10^{-6}	3.7×10^{-5}	4.39
50	2	1.6×10^{-13}	-7.6×10^{-15}	8.09
	3	1.0×10^{-13}	-1.0×10^{-13}	8.09
100	2	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	9.00
	3	1.5×10^{-13}	-1.2×10^{-13}	9.00
200	2	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	9.56
	3	2.0×10^{-13}	-1.0×10^{-13}	9.56

表(十三) 末端出口內管進內管出模型以式(B4)之泰勒展開式收斂情

形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$ 。

Gz	N	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	2	0.148	-1.524	0.69
	3	-0.012	-0.001	0.69
10	2	-5.0×10^{-4}	3.8×10^{-4}	1.45
	3	5.5×10^{-6}	-3.7×10^{-5}	1.45
50	2	1.6×10^{-13}	-7.68×10^{-15}	4.28
	3	1.0×10^{-13}	-1.0×10^{-13}	4.28
100	2	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	5.98
	3	1.5×10^{-13}	-1.2×10^{-13}	5.98
200	2	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	7.51
	3	2.0×10^{-13}	-1.0×10^{-13}	7.51

表(十四) 末端出口外管進外管出模型以式(B4)之泰勒展開式收斂情

形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$ 。

Gz	N	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	2	0.069	-0.687	0.42
	3	-0.002	0.002	0.42
10	2	-2.2×10^{-10}	-4.0×10^{-12}	3.22
	3	-1.4×10^{-8}	-1.8×10^{-8}	3.22
50	2	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	6.88
	3	1.5×10^{-13}	-1.2×10^{-13}	6.88
100	2	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	8.18
	3	2.0×10^{-13}	-1.0×10^{-13}	8.18
200	2	1.7×10^{-13}	-8.6×10^{-15}	9.07
	3	2.3×10^{-13}	-6.9×10^{-14}	9.07

表(十五) 出口迴流至末端內管進外管出模型以式(B4)之泰勒展開式

收斂情形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$ 。

Gz	N	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	2	0.069	-0.687	0.18
	3	-0.002	0.002	0.18
10	2	-2.2×10^{-10}	-4.0×10^{-12}	2.03
	3	-1.4×10^{-8}	-1.8×10^{-8}	2.03
50	2	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	5.86
	3	1.5×10^{-13}	-1.2×10^{-13}	8.86
100	2	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	7.46
	3	2.0×10^{-13}	-1.0×10^{-13}	7.46
200	2	1.7×10^{-13}	-8.6×10^{-15}	8.62
	3	2.3×10^{-13}	-6.9×10^{-14}	8.62

表(十六) 出口迴流至末端外管進內管出模型以式(B4)之泰勒展開式

收斂情形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$ 。

Gz	N	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	2	0.148	-1.524	0.55
	3	-0.012	-0.001	0.55
10	2	-5.0×10^{-4}	3.8×10^{-4}	4.45
	3	5.5×10^{-6}	-3.7×10^{-5}	4.45
50	2	1.6×10^{-13}	-7.68×10^{-15}	8.07
	3	1.0×10^{-13}	-1.0×10^{-13}	8.07
100	2	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	8.99
	3	1.5×10^{-13}	-1.2×10^{-13}	8.99
200	2	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	9.55
	3	2.0×10^{-13}	-1.0×10^{-13}	9.55

表(十七) 末端迴流至入口內管進外管出模型以式(B4)之泰勒展開式

收斂情形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$ 。

Gz	N	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	2	0.148	-1.524	0.16
	3	-0.012	-0.001	0.16
10	2	-5.0×10^{-4}	3.8×10^{-4}	2.44
	3	5.5×10^{-6}	-3.7×10^{-5}	2.44
50	2	1.6×10^{-13}	-7.68×10^{-15}	6.61
	3	1.0×10^{-13}	-1.0×10^{-13}	6.61
100	2	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	8.03
	3	1.5×10^{-13}	-1.2×10^{-13}	8.03
200	2	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	8.98
	3	2.0×10^{-13}	-1.0×10^{-13}	8.98

表(十八) 末端迴流至入口外管進內管出模型以式(B4)之泰勒展開式

收斂情形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$ 。

Gz	N	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	2	0.069	-0.687	0.23
	3	-0.002	0.002	0.23
10	2	-2.2×10^{-10}	-4.0×10^{-12}	2.33
	3	-1.4×10^{-8}	-1.8×10^{-8}	2.33
50	2	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	6.34
	3	1.5×10^{-13}	-1.2×10^{-13}	6.34
100	2	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	7.84
	3	2.0×10^{-13}	-1.0×10^{-13}	7.84
200	2	1.7×10^{-13}	-8.6×10^{-15}	8.87
	3	2.3×10^{-13}	-6.9×10^{-14}	8.87

表(十九) 內外等體積內管進外管出模型以式(B4)之泰勒展開式收斂

情形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$ 。

Gz	N	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	2	0.069	-0.687	0.16
	3	-0.002	0.002	0.16
10	2	-2.2×10^{-10}	-4.0×10^{-12}	2.24
	3	-1.4×10^{-8}	-1.8×10^{-8}	2.24
50	2	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	6.07
	3	1.5×10^{-13}	-1.2×10^{-13}	6.07
100	2	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	7.61
	3	2.0×10^{-13}	-1.0×10^{-13}	7.61
200	2	1.7×10^{-13}	-8.6×10^{-15}	8.72
	3	2.3×10^{-13}	-6.9×10^{-14}	8.72

表(二十) 內外等體積外管進內管出模型以式(B4)之泰勒展開式收斂

情形當 $N = 2$ 和 $N = 3$ 於 $\kappa = 0.5$ 且 $M = 1$ 。

Gz	N	$\theta_{2b}(0.7)$	$\theta_{3b}(0.7)$	\overline{Nu}
1	2	0.069	-0.687	0.25
	3	-0.002	0.002	0.25
10	2	-2.2×10^{-10}	-4.0×10^{-12}	2.69
	3	-1.4×10^{-8}	-1.8×10^{-8}	2.69
50	2	1.7×10^{-13}	-8.1×10^{-15}	6.61
	3	1.5×10^{-13}	-1.2×10^{-13}	6.61
100	2	1.7×10^{-13}	-8.5×10^{-15}	8.02
	3	2.0×10^{-13}	-1.0×10^{-13}	8.02
200	2	1.7×10^{-13}	-8.6×10^{-15}	8.97
	3	2.3×10^{-13}	-6.9×10^{-14}	8.97

4.1 二行程無迴流模型之結果討論

(A) 內管進外管出

二行程無迴流型式之中，影響熱傳效率的主要因素為流體於各個管道中的流速，內管中的流體被加熱的隔板位置與格拉茲數。以無因次管壁溫度對軸向截面位置作圖，如圖(4.1-1)，結果得知，在固定隔板位置時，無因次管壁溫度隨著格拉茲數增加(即管道愈短或流量愈大)而變小，因為流體在管道中流速增加，熱傳係數變大，使得溫度梯度降低。如果當隔板位置越接近外管，則外管變小，故流體流經外管的流速增加，所以在固定格拉茲數之下，在 $\kappa=0.7$ 時，則外管管壁溫度較低。與單行程系統做比較，可知當在 $Gz=10$ 時，管壁溫度和單行程系統溫度差不多，但在 $Gz=100$ 時，管壁溫度低於單行程系統，且隨著格拉茲數增加則管壁溫度趨於平緩。

圖(4.1-2)以納塞數對軸向位置做圖，可發現當隔板位置 κ 越接近外管或格拉茲數增加時，其納塞數震盪情形會越大，圖(4.1-3)以平均納塞數對格拉茲數作圖，當格拉茲數 $Gz > 10$ 的情況下，相較於單行程系統其熱傳效率提升均有顯著的改善，且熱傳效率隨著隔板位置越接近外管而升高。將此二行程無迴流型式系統與單行程系統作比較，如圖(4.1-5)及表(二十一)可知，在隔板位置 $\kappa > 0.4$ 且 $Gz > 10$ 時，熱傳效率增加百分比為正，亦即雙套管加熱系統對於熱傳效率之改善為一

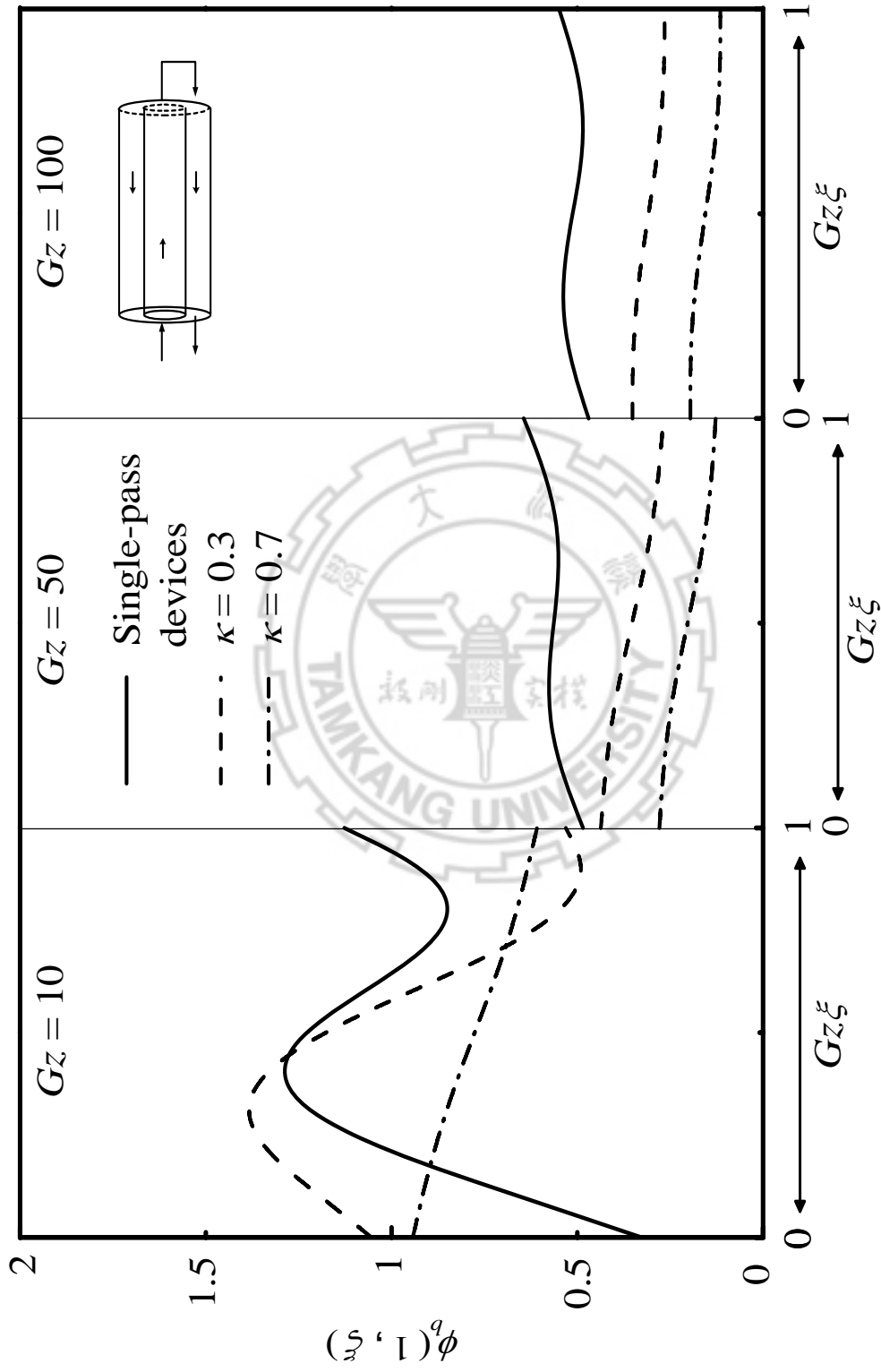
可行且具高熱傳效率的設計；圖(4.1-4)以平均納塞數對隔板位置作圖，可發現當隔板位置 κ 越接近外管，則平均納塞數越高，且隨著格拉茲數增加趨勢越明顯。

(B) 外管進內管出

此迴流型式之系統與內管進外管出之系統，結果的趨勢大致相同。其影響加熱效果的主要因素為流體於各管道中的流速，故隔板的位置與格拉茲數為影響熱傳效率之重要因素。以無因次管壁溫度對軸向截面位置作圖，如圖(4.1-6)，顯示外管壁溫度隨著格拉茲數變大而降低但對於軸向位置之變化情形則因為流動方向的相反而與內進外出無迴流系統相異。

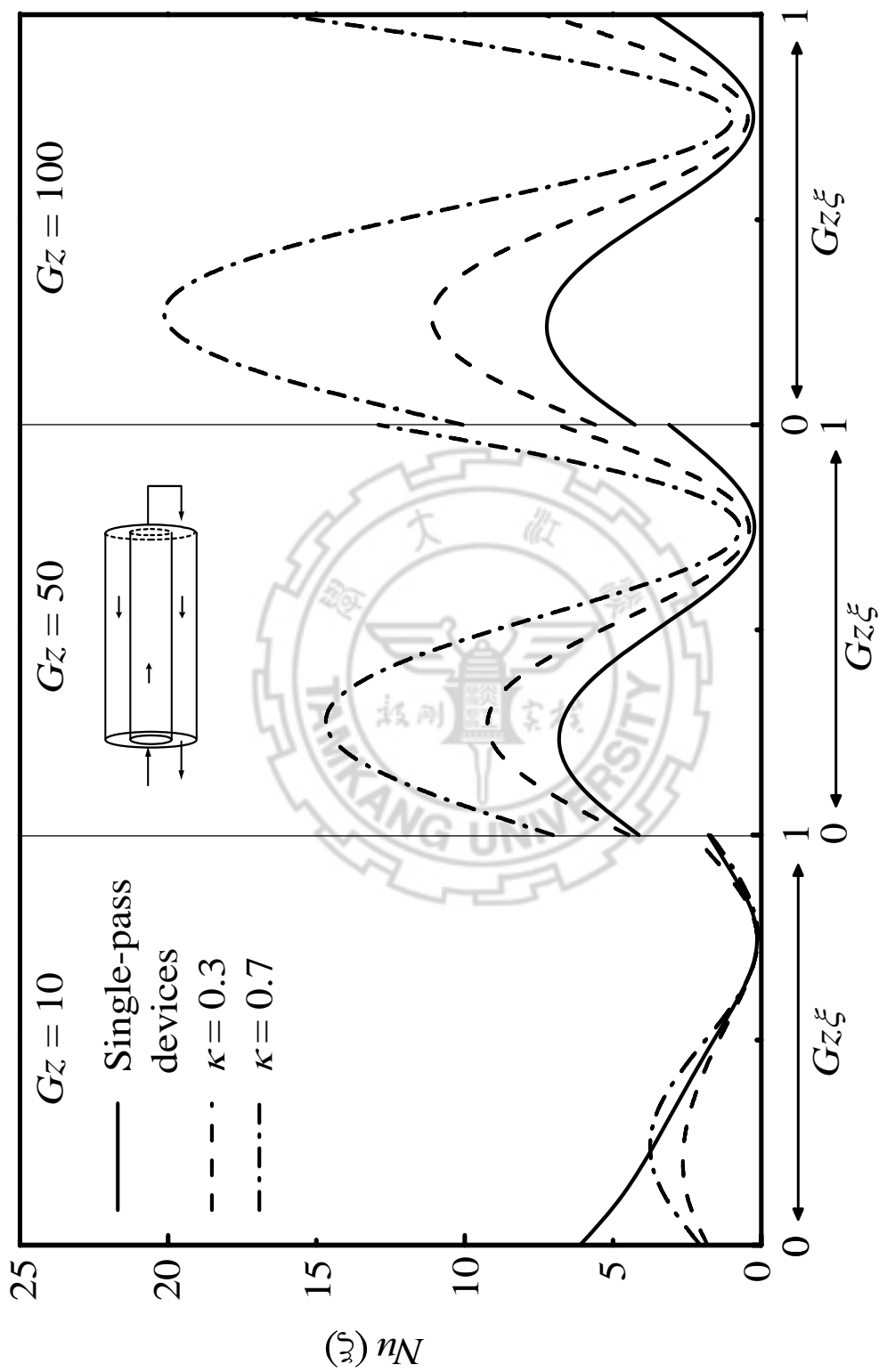
圖(4.1-7)以納塞數對軸向位置做圖，可發現當隔板位置 κ 越接近外管或格拉茲數增加時，其納塞數震盪情形會越大。

另外，平均納塞數之定義可知，平均納塞數和熱傳效率百分比皆與平均管壁溫度有關，故由圖(4.1-8)、圖(4.1-10)，可看出其趨勢和定義一樣與管壁溫度之趨勢成反比；圖(4.1-9)以平均納塞數對隔板位置作圖，可發現當隔板位置 κ 越接近外管，則平均納塞數越高，且隨著格拉茲數增加趨勢越明顯。由圖(4.1-10)及表(二十二)可知 $Gz > 10$ 時，熱傳效率增加百分比皆為正，亦即雙套管加熱系統對於熱傳效率之改善為一可行且具高熱傳效率的設計。



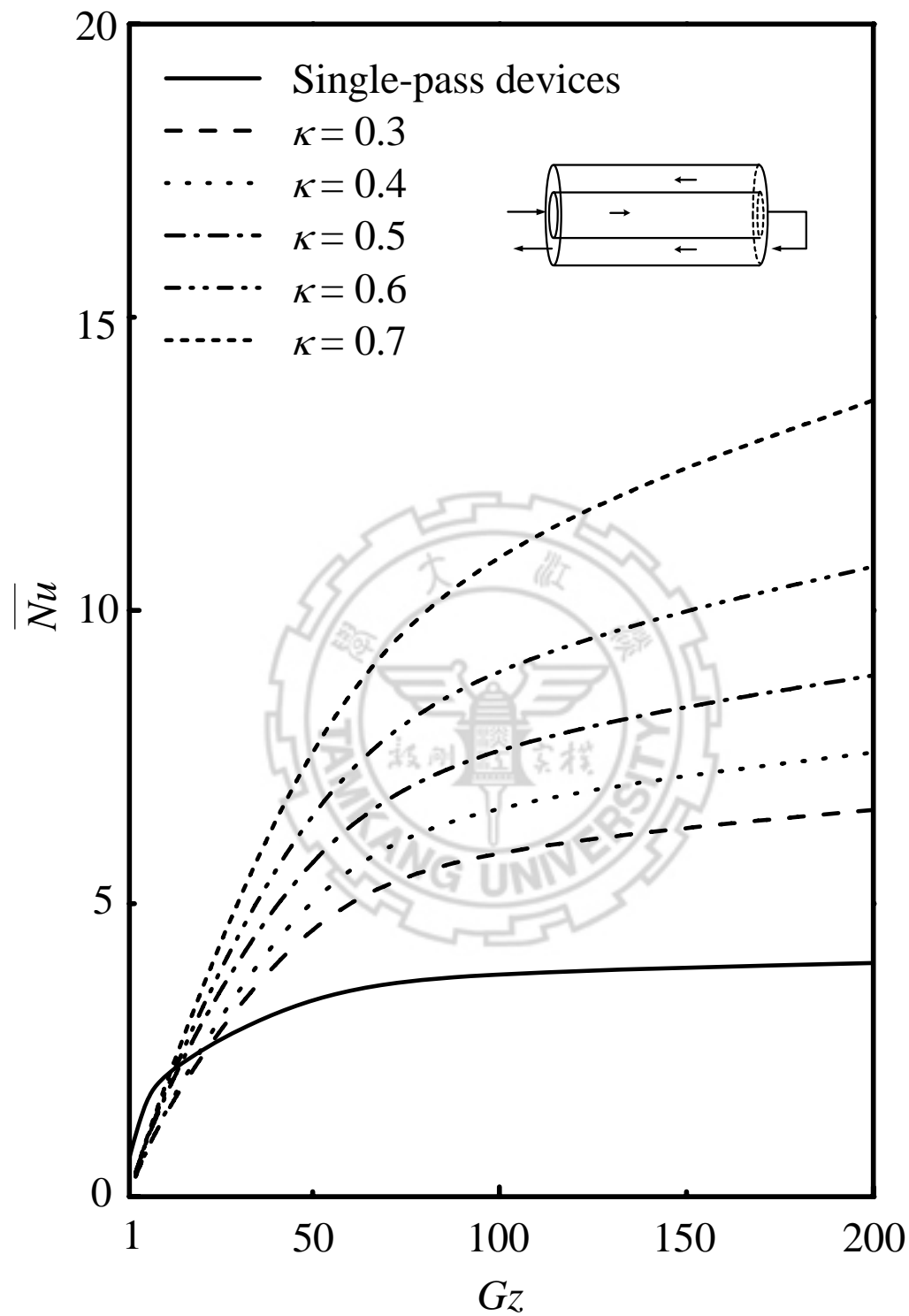
圖(4.1-1) 二行程無迴流裝置內管進外管出，軸向位置與管壁溫度於不同格拉

茲數及隔板位置之關係。

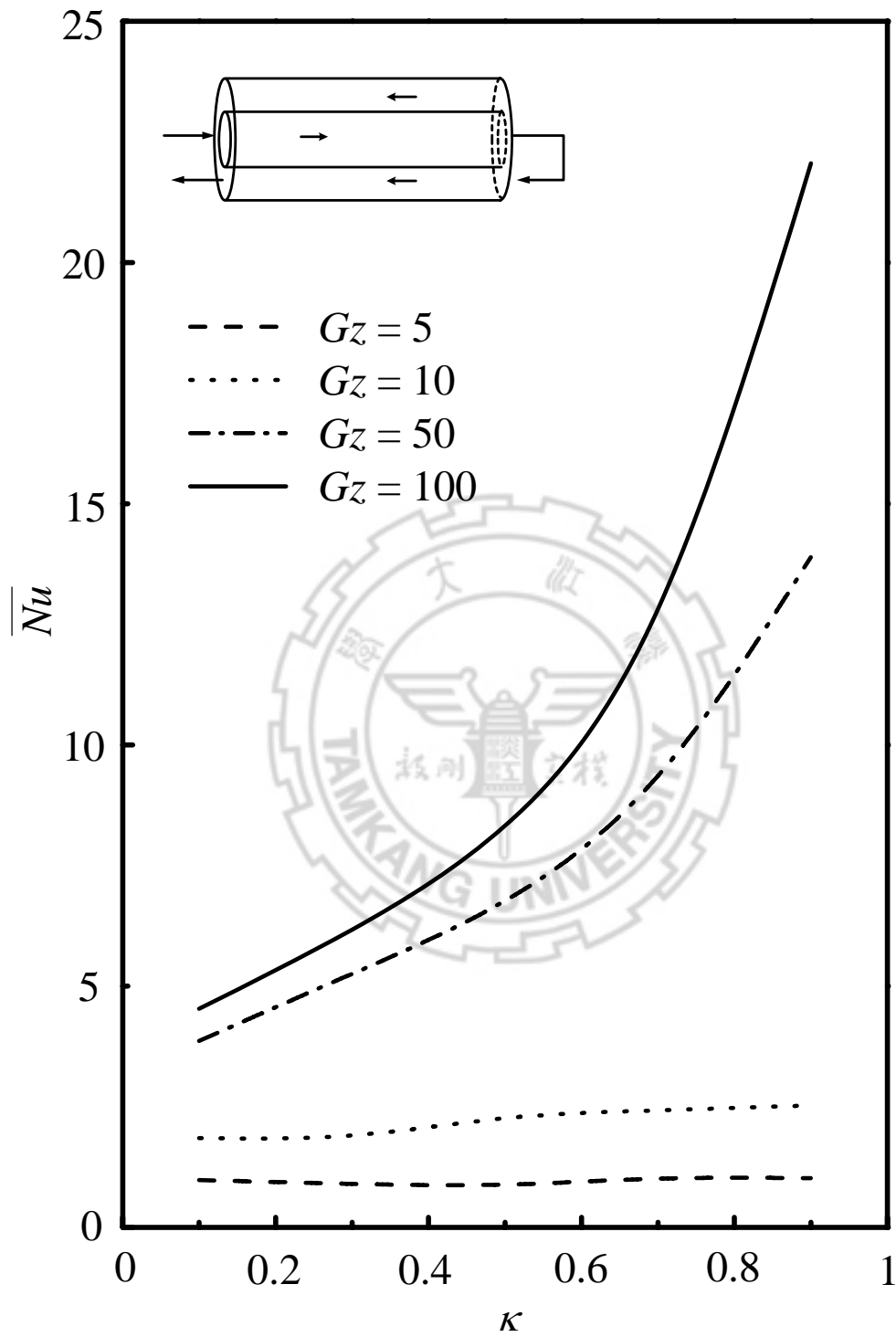


圖(4.1-2) 二行程無迴流裝置內管進外管出，軸向位置與納塞數於不同格拉茲

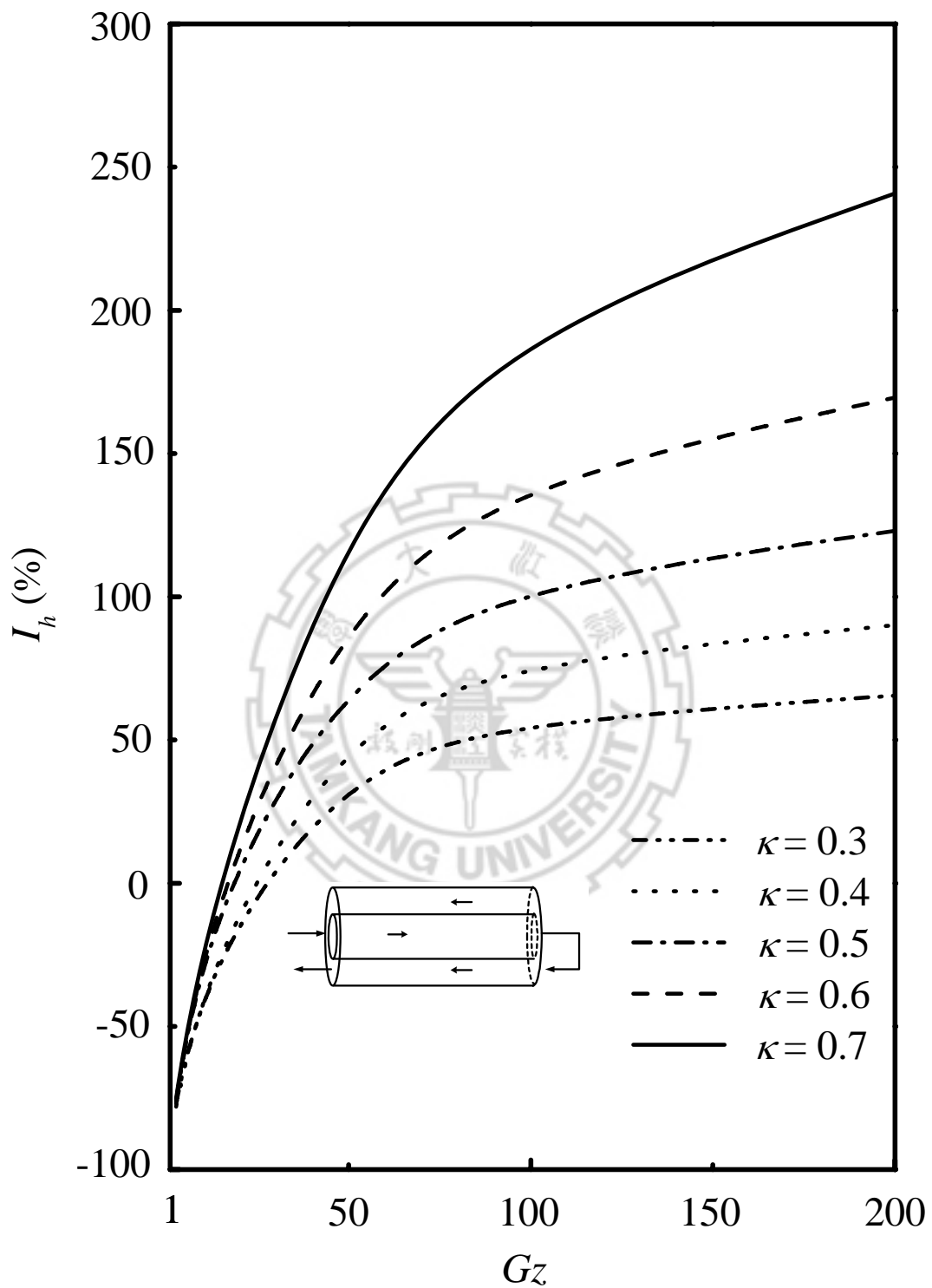
數及隔板位置之關係。



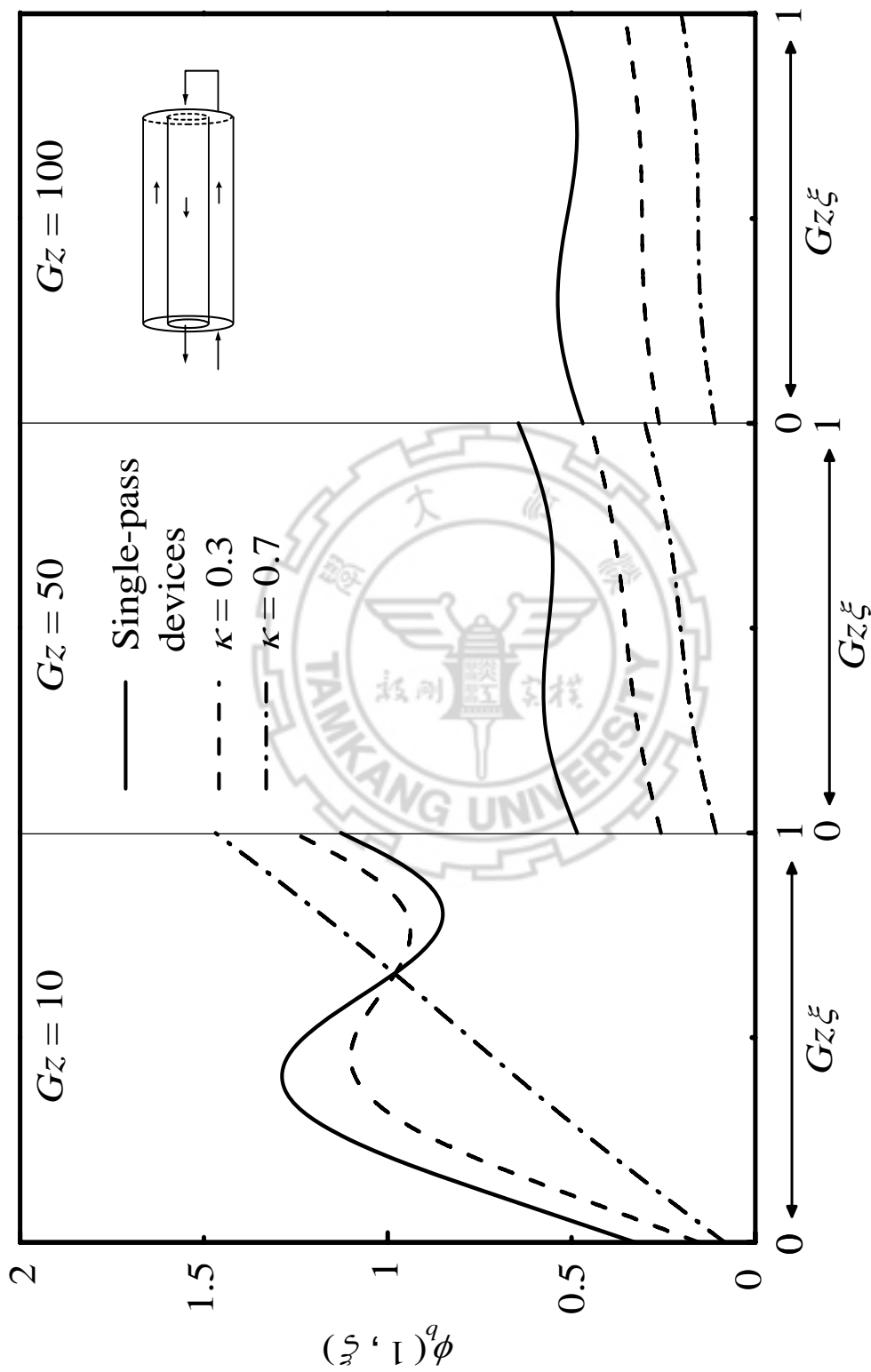
圖(4.1-3) 二行程無迴流裝置內管進外管出，格拉茲數與平均納塞數於不同隔板位置之關係。



圖(4.1-4) 二行程無迴流裝置內管進外管出，隔板位置與平均納塞數於不同格拉茲數之關係。

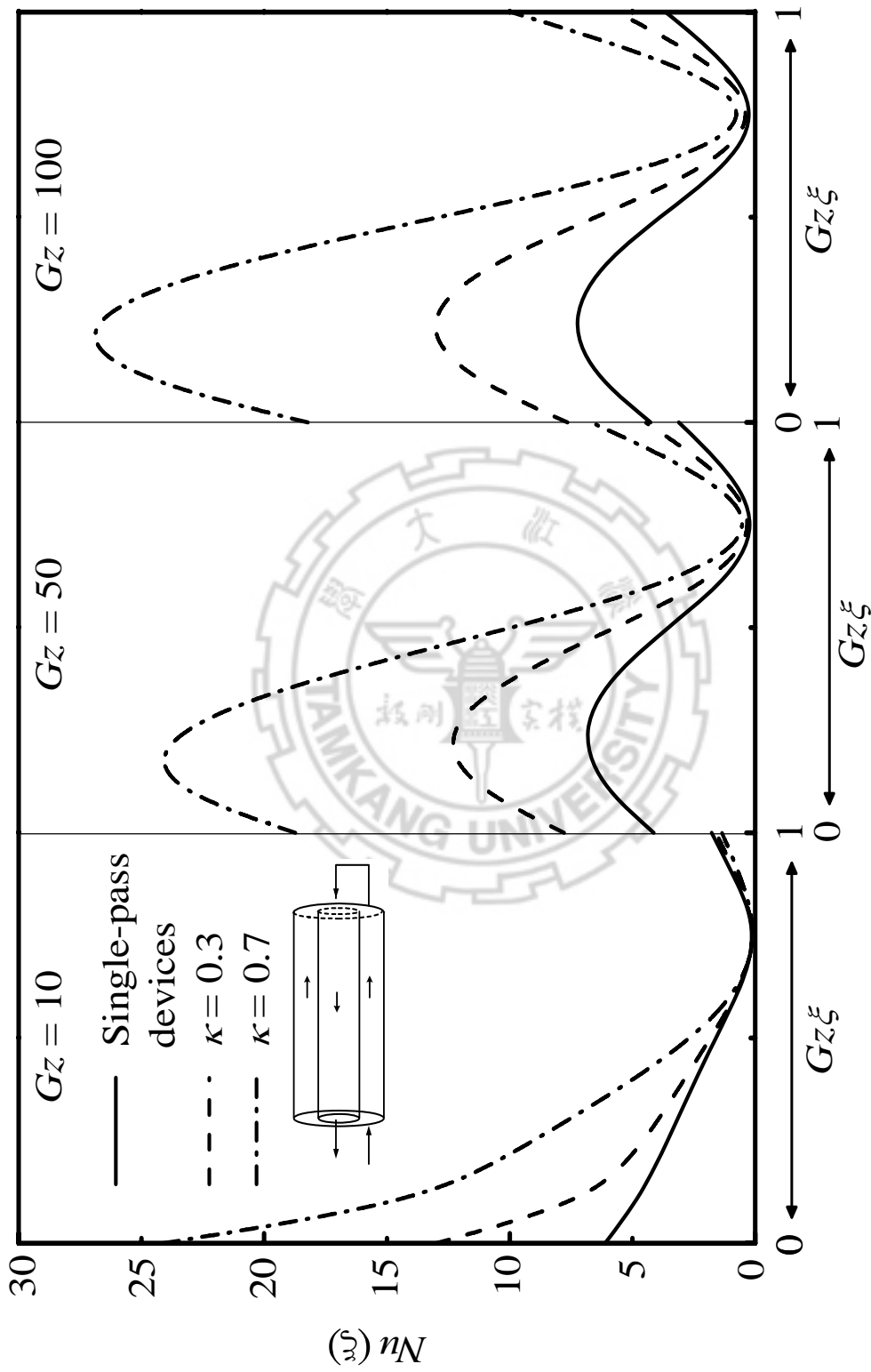


圖(4.1-5) 二行程無迴流裝置內管進外管出，格拉茲數與熱傳效率百分比於不同隔板位置之關係。

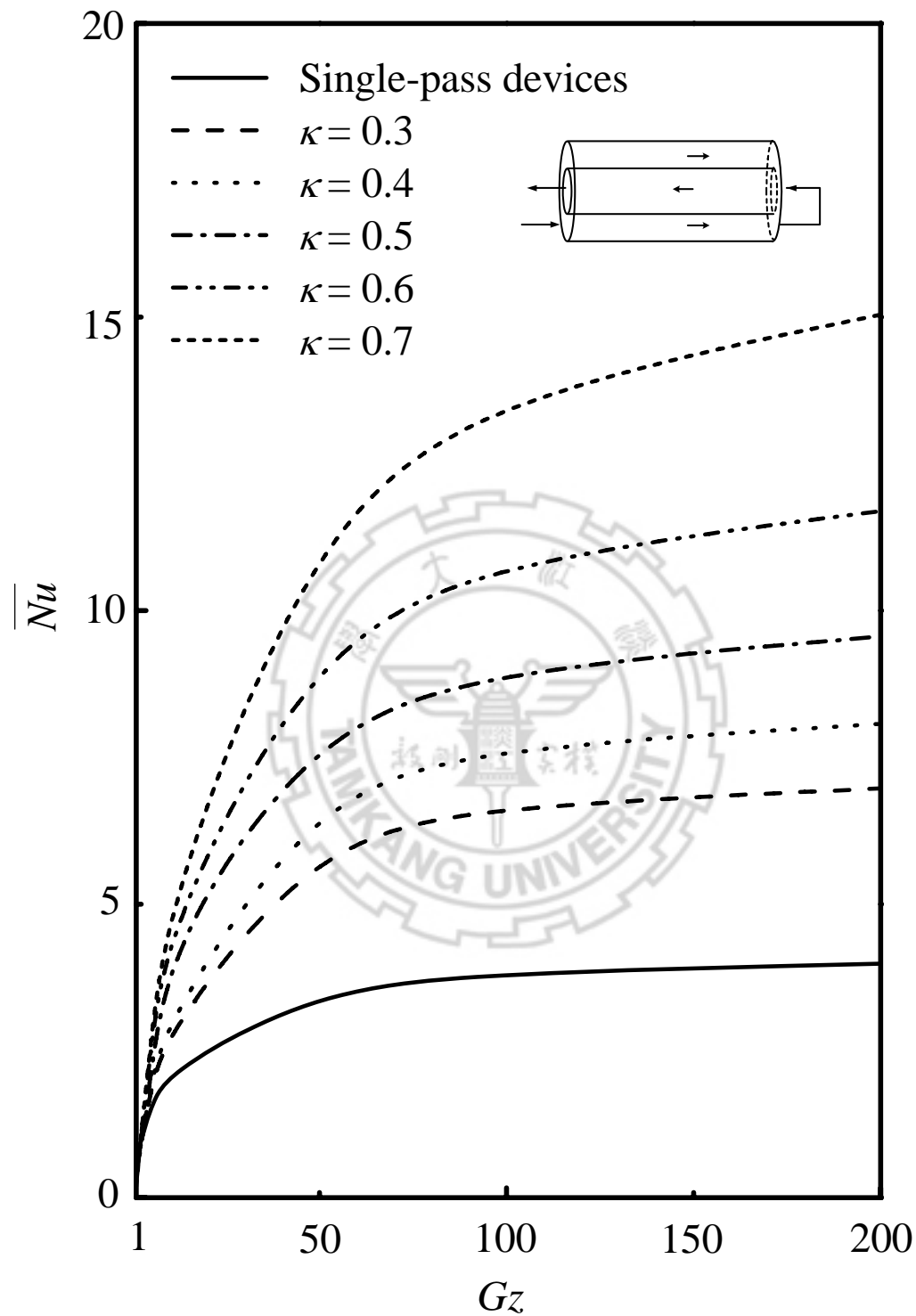


圖(4.1-6) 二行程無迴流裝置外管進內管出，軸向位置與管壁溫度於不同格拉

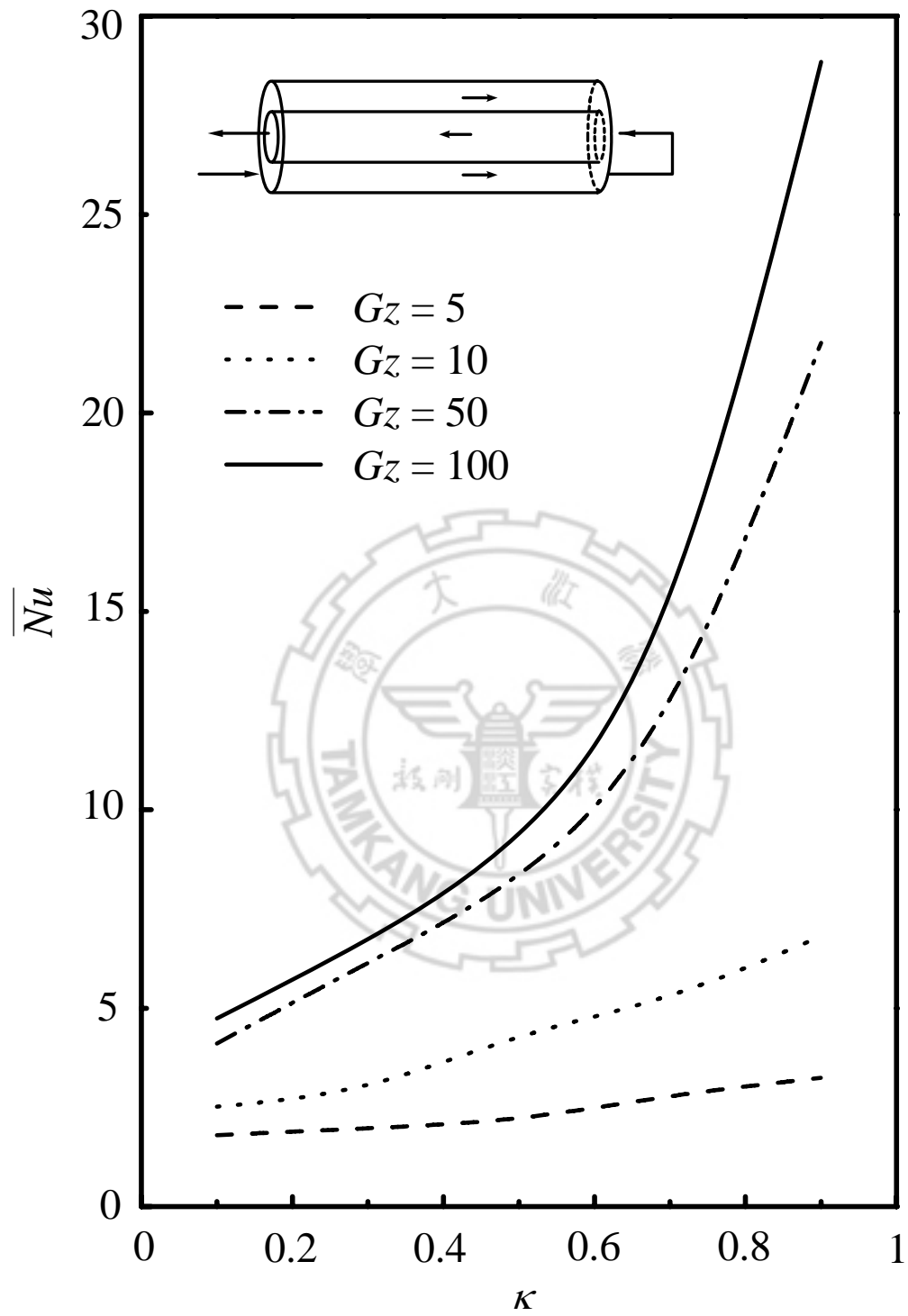
茲數及隔板位置之關係。



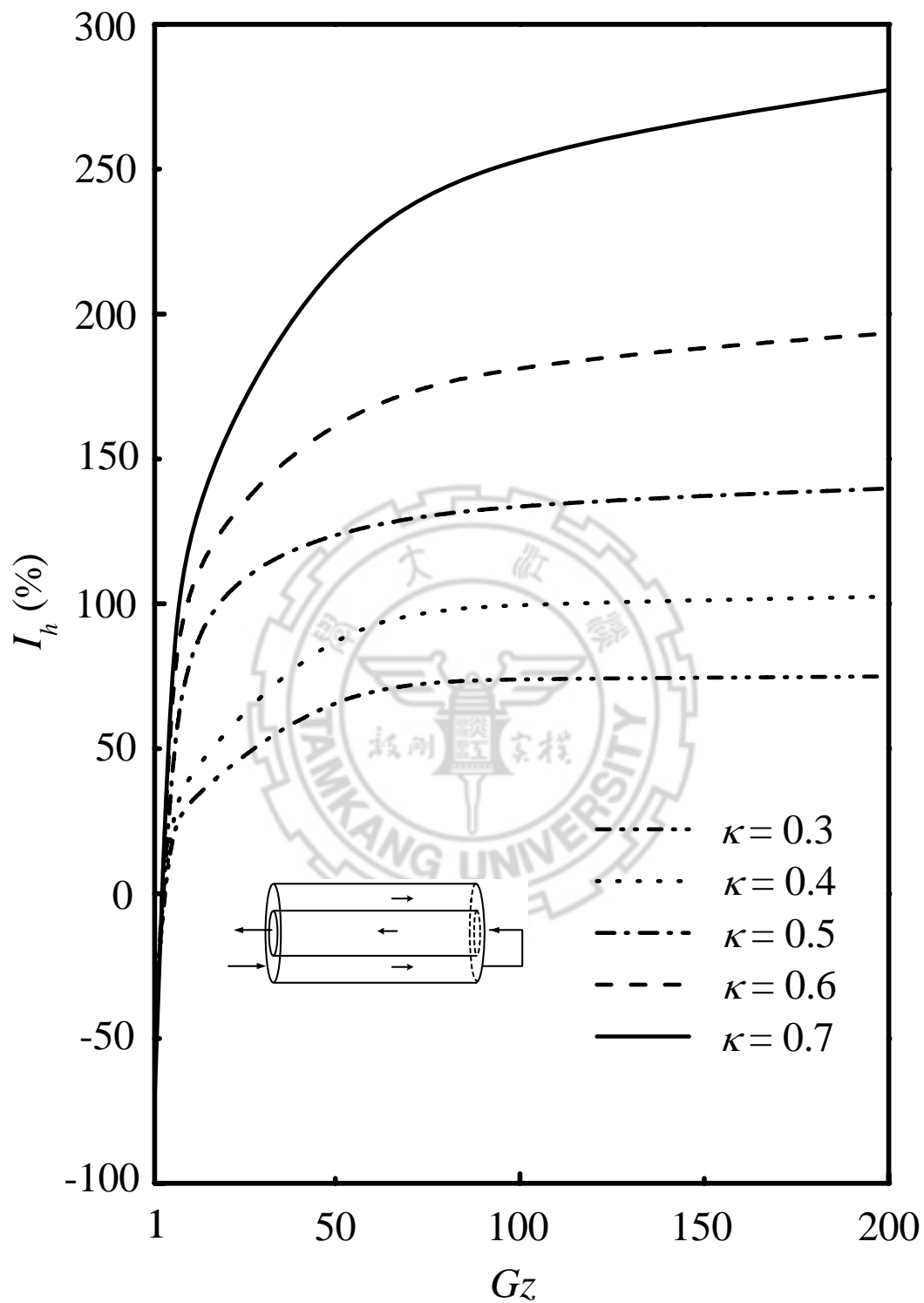
圖(4.1-7) 二行程無迴流裝置外管進內管出，軸向位置與納塞數於不同格拉茲數及隔板位置之關係。



圖(4.1-8) 二行程無迴流裝置外管進內管出，格拉茲數與平均納塞數於不同隔板位置之關係。



圖(4.1-9) 二行程無迴流裝置外管進內管出，隔板位置與平均納塞數於不同格拉茲數之關係。



圖(4.1-10) 二行程無迴流裝置外管進內管出，格拉茲數與熱傳效率百分比於不同隔板位置之關係。

表(二十一) 二行程無迴流裝置內管進外管出模型以隔板位置為參數
之熱傳效率增加百分比

I_h (%)	κ					
	G_z	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
1		-87.58	-88.91	-90.57	-90.17	-89.67
10		-29.41	-29.70	-12.85	-12.41	-11.56
100		56.53	77.39	104.60	141.76	195.71
200		65.48	90.07	122.99	169.57	240.78

表(二十二) 二行程無迴流裝置外管進內管出模型以隔板位置為參數
之熱傳效率增加百分比

I_h (%)	κ					
	G_z	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
1		-39.85	-45.47	-46.28	-63.57	-71.01
10		32.80	42.26	102.63	118.43	139.19
100		74.07	100.11	134.78	183.56	257.52
200		74.93	102.49	139.78	193.42	277.31

4.2 末端出口模型之結果討論

(A) 內管進內管出

對於雙套管熱傳系統而言，加入迴流裝置，會產生流速增加及預混效應兩種影響，其中流速增加會使熱傳係數增大，增進熱傳效率，但預混效應會降低熱傳驅動力(溫度差降低)，所以影響熱傳效率的主要因素即是此兩種效應相互競爭的結果。如圖(4.2-1)所示，無因次入口溫度，當迴流比值愈大，溫度越高，預混效應越大，但隨著格拉茲數增加及隔板位置越接近外管，無因次入口溫度會降低。

由圖(4.2-2)及(4.2-3)，可知當在 $Gz=10$ 時，管壁溫度平均略高於單行程系統溫度，但在 $Gz=100$ 時，管壁溫度低於單行程系統，由此可知，隨著格拉茲數增加、迴流比變大或隔板位置越接近外管，無因次管壁溫度會降低。

圖(4.2-4)以納塞數對軸向位置做圖，可發現當隔板位置 κ 越接近外管或格拉茲數增加時，其納塞數震盪情形會越大。

圖(4.2-5)以平均納塞數對格拉茲數作圖，並以單行程無隔板系統為比較基準。當格拉茲數越大的情況下，相較於單行程系統其熱傳效率提升均有顯著的改善，且熱傳效率隨著隔板位置變大而升高，此外，當固定隔板位置加上不同迴流比值時，會有不同的熱傳效率，而結果顯示迴流比值越大，熱傳效率增加。將此迴流型式系統與單行程

系統作比較，如圖(4.2-7)及表(二十三)所示，在所有不同隔板位置 κ 及迴流比，在 $Gz > 60$ 之後效率增加百分比皆為正，亦即此加熱系統對於熱傳效率之改善為一可行且具高熱傳效率的設計；圖(4.2-6)以平均納塞數對隔板位置作圖，可發現當隔板位置 κ 越接近外管，則平均納塞數越高，且隨著格拉茲數增加趨勢越明顯。

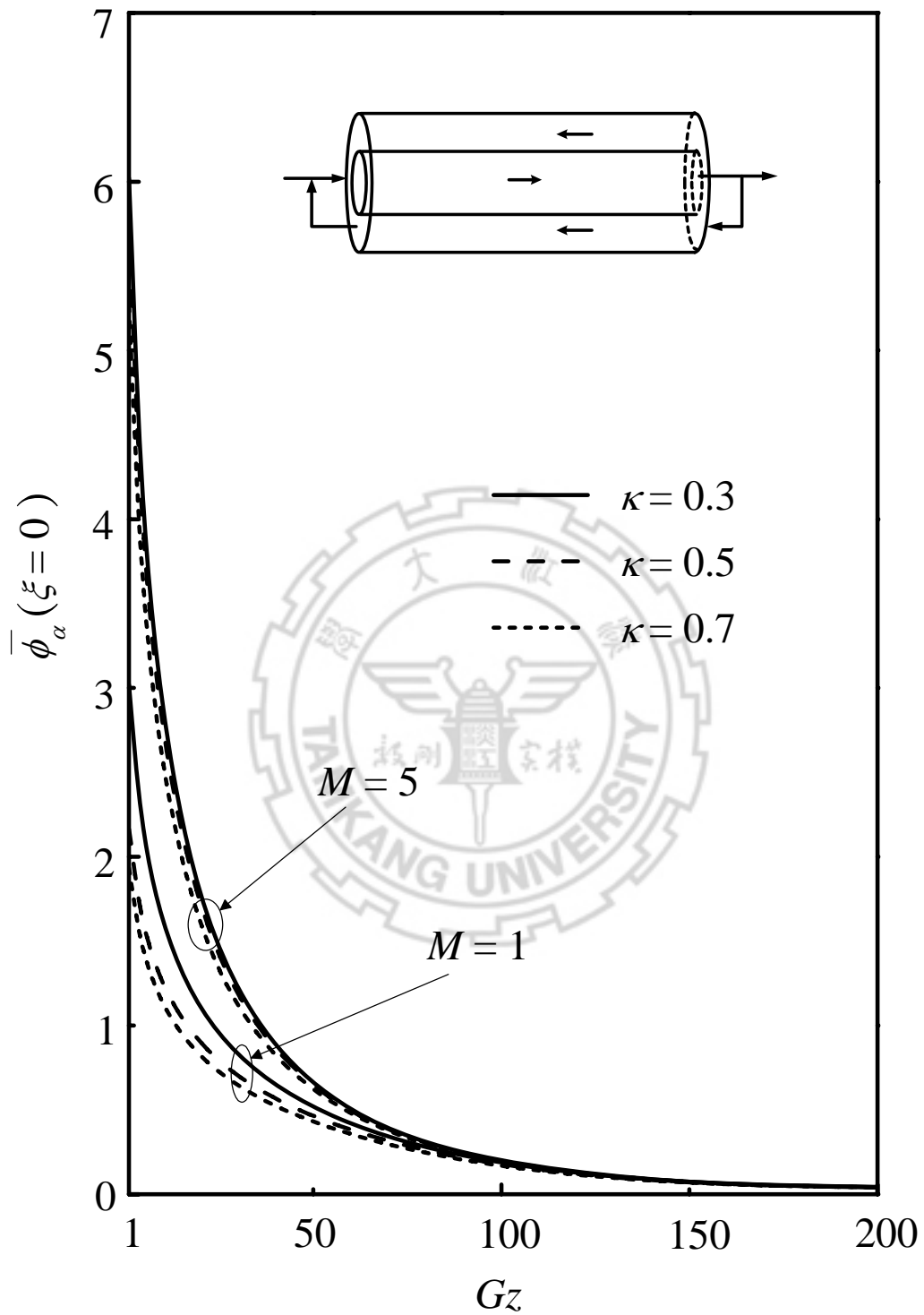
(B) 外管進外管出

外管進外管出的流動型式與前一節的入口位置有所不同，在圖(4.2-8)中，在不同隔板位置以無因次入口混合溫度對不同的迴流比值時，隨著格拉茲數增加，經由內層套管迴流至入口混合後之無因次入口溫度會降低。且在固定格拉茲數之下，結果顯示在迴流比越大或隔板位置越接近內管，入口混合溫度越大。

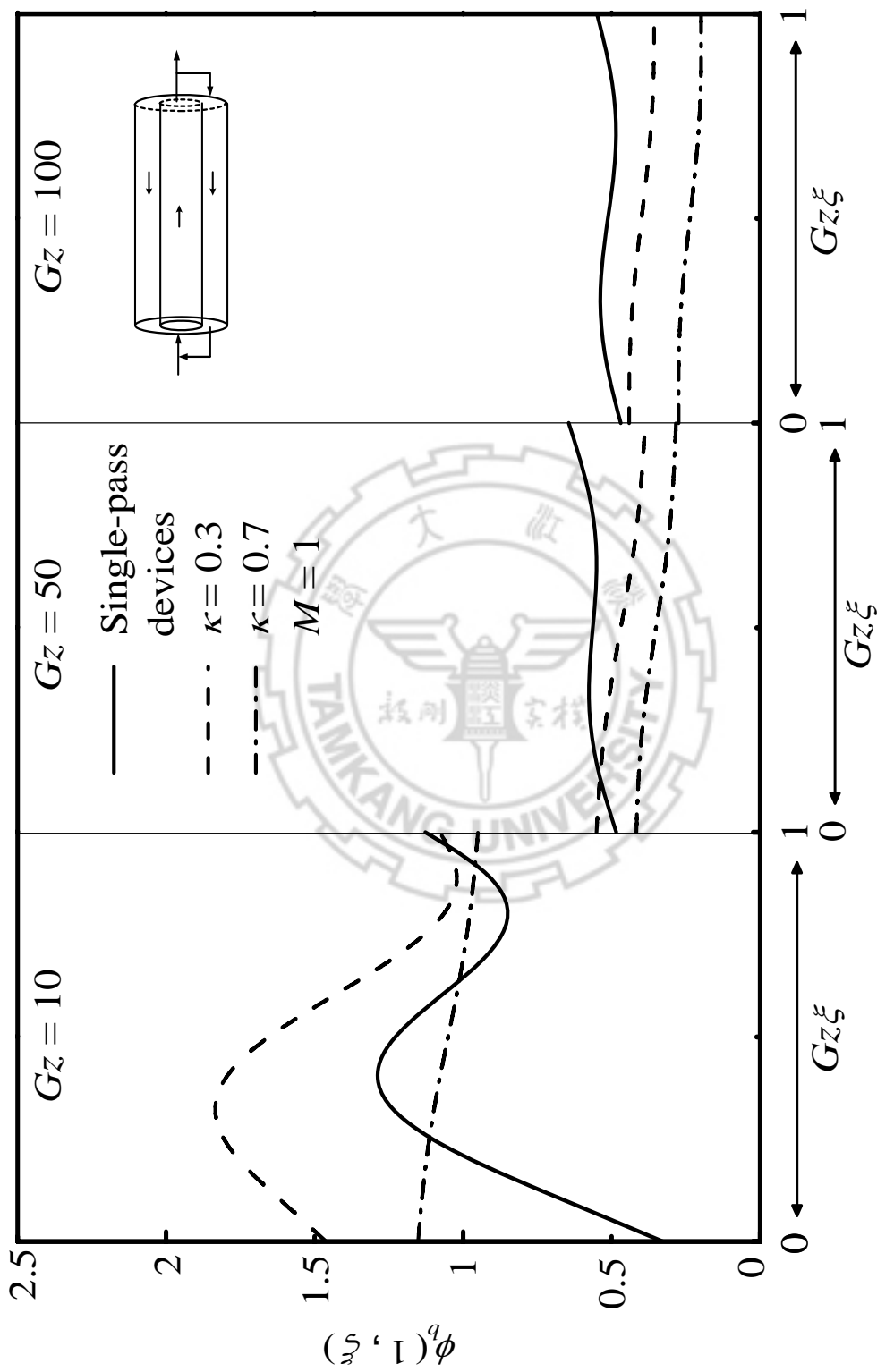
對於無因次管壁溫度部分，如圖(4.2-9)和圖(4.2-10)所示，由於外層套管同時接受管壁熱通量及隔板間的熱傳導，故溫度隨著 $Gz\xi$ 增加而升高。而與單行程系統做比較，可知當在 $Gz=10$ 時，管壁溫度與單行程系統溫度差不多，但由圖(4.2-9)之結果顯示在 $Gz=100$ 時，管壁溫度明顯低於單行程系統。由以上結果結果顯示，隨著格拉茲數增加或隔板位置越接近外管，無因次管壁溫度會降低。由圖(4.2-10)迴流比對管壁溫度的影響則因為預混效應，迴流比越大，入口溫度升高，管壁溫度隨之越高。

圖(4.2-11)以納塞數對軸向位置做圖，可發現當隔板位置 κ 越接近外管或格拉茲數增加時，其納塞數震盪情形會越大。

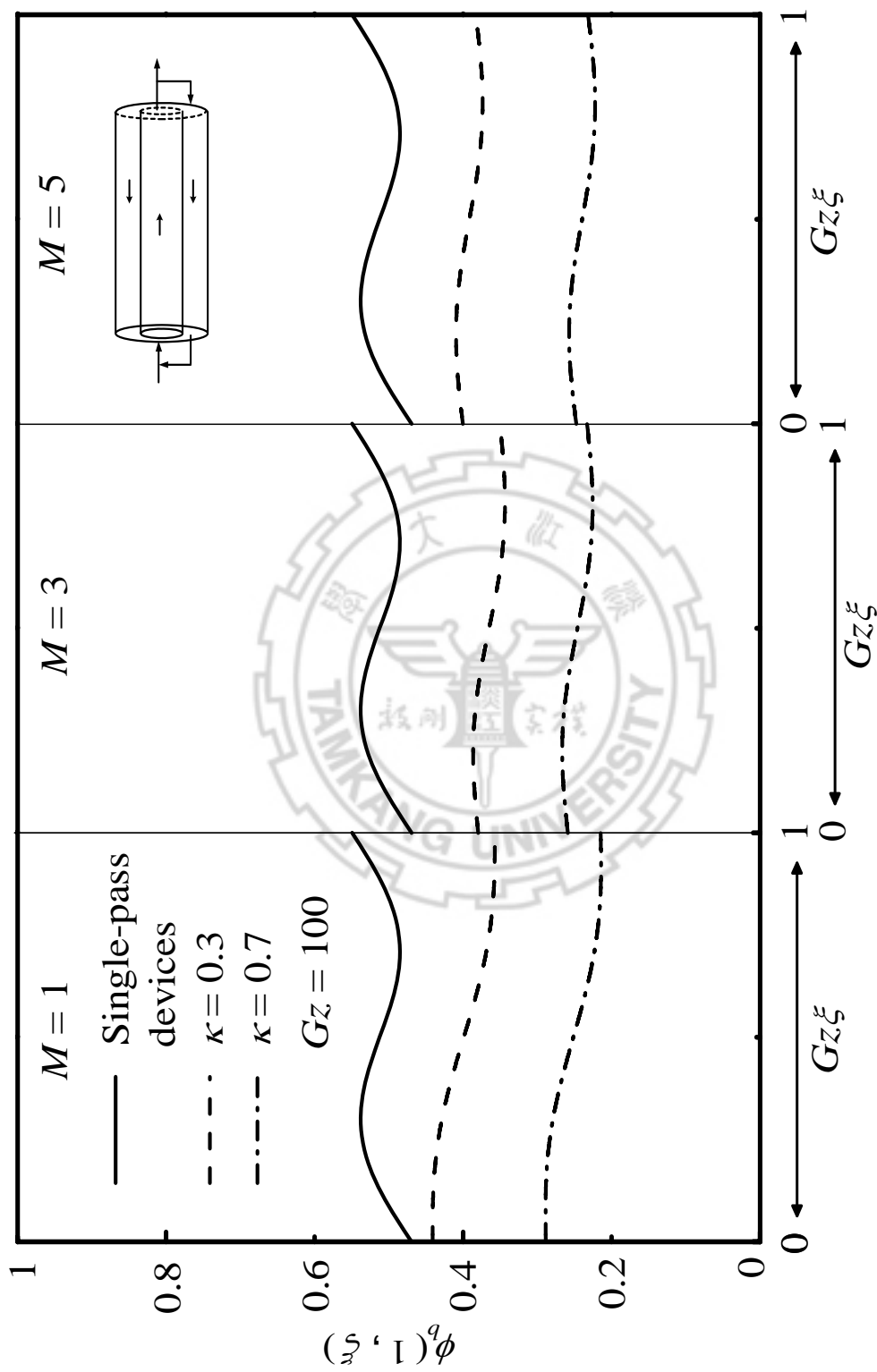
圖(4.2-12)以平均納塞數對格拉茲數作圖，並以單行程無隔板系統為比較基準。當格拉茲數越大的情況下，相較於單行程系統其熱傳效率提升均有顯著的改善，且熱傳效率隨著隔板位置越接近外管而升高，此外，結果顯示迴流比值越大，熱傳效率降低。將此迴流型式系統與單行程系統作比較，如圖(4.2-14)及表(二十四)所示，可知在所有不同隔板位置 κ 及迴流比之下不同格拉茲數之效率提昇率的變化，大約在 $Gz > 30$ 之後所有組合之效率增加百分比皆為正，此故顯示為一可行且具高熱傳效率的設計；圖(4.2-13)以平均納塞數對隔板位置作圖，可發現當隔板位置 κ 越接近外管，則平均納塞數越高，且隨著格拉茲數增加趨勢越明顯。



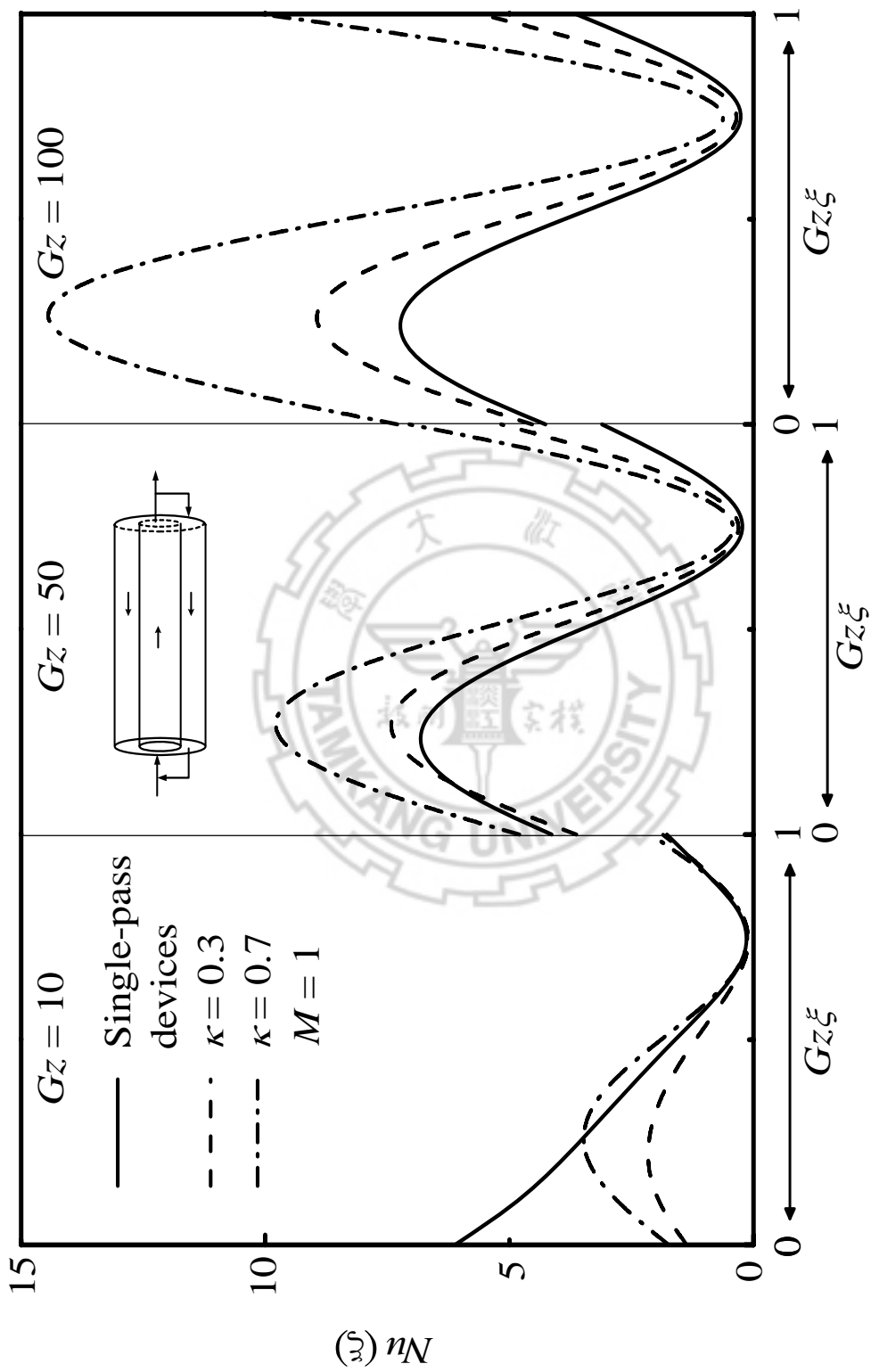
圖(4.2-1) 末端出口內管進內管出模型，格拉茲數與迴流混合溫度於不同迴流比及隔板位置之關係。



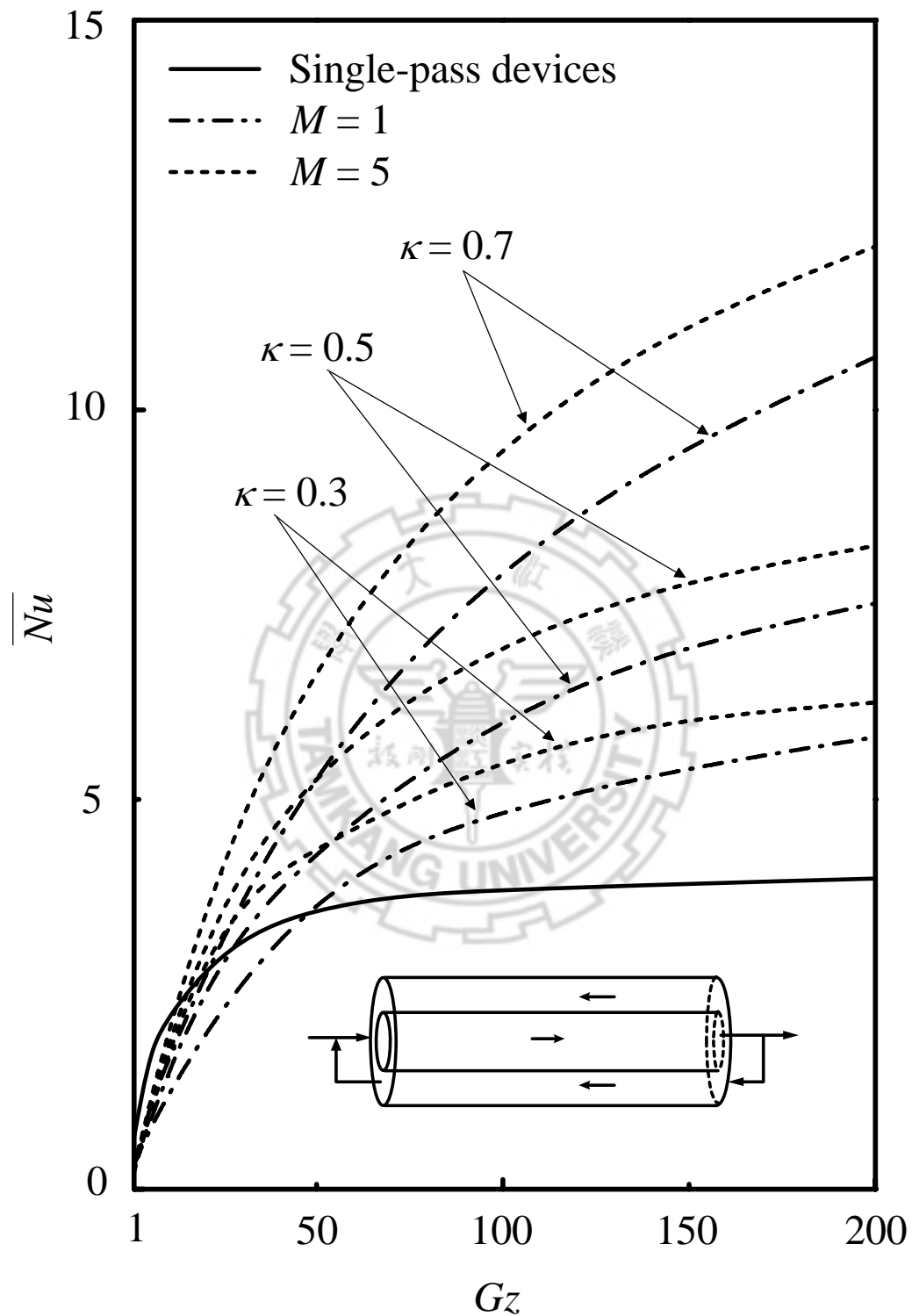
圖(4.2-2) 末端出口內管進內管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同格拉茲數及隔板位置之關係。



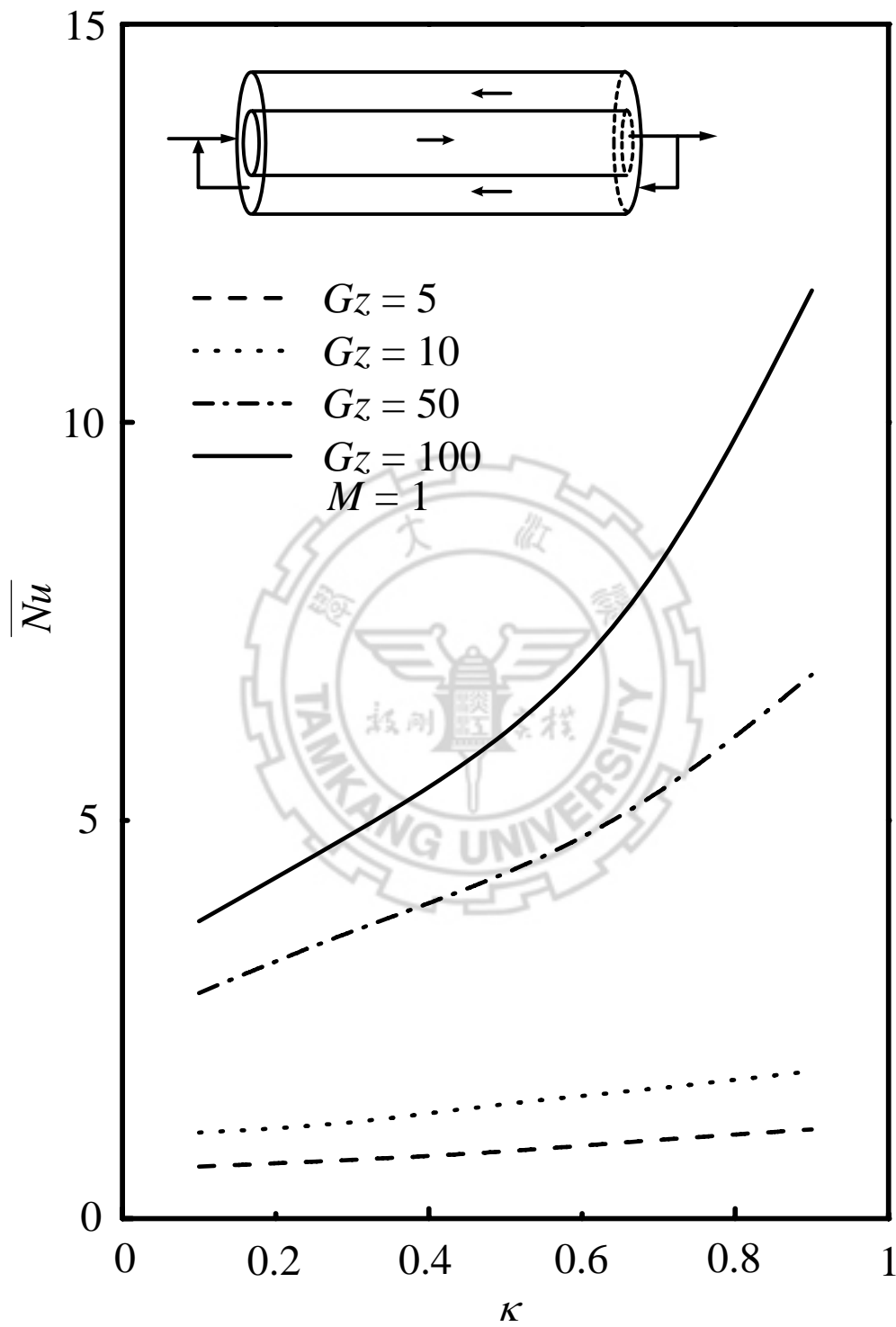
圖(4.2-3) 末端出口內管進內管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同迴流比及隔板位置之關係。



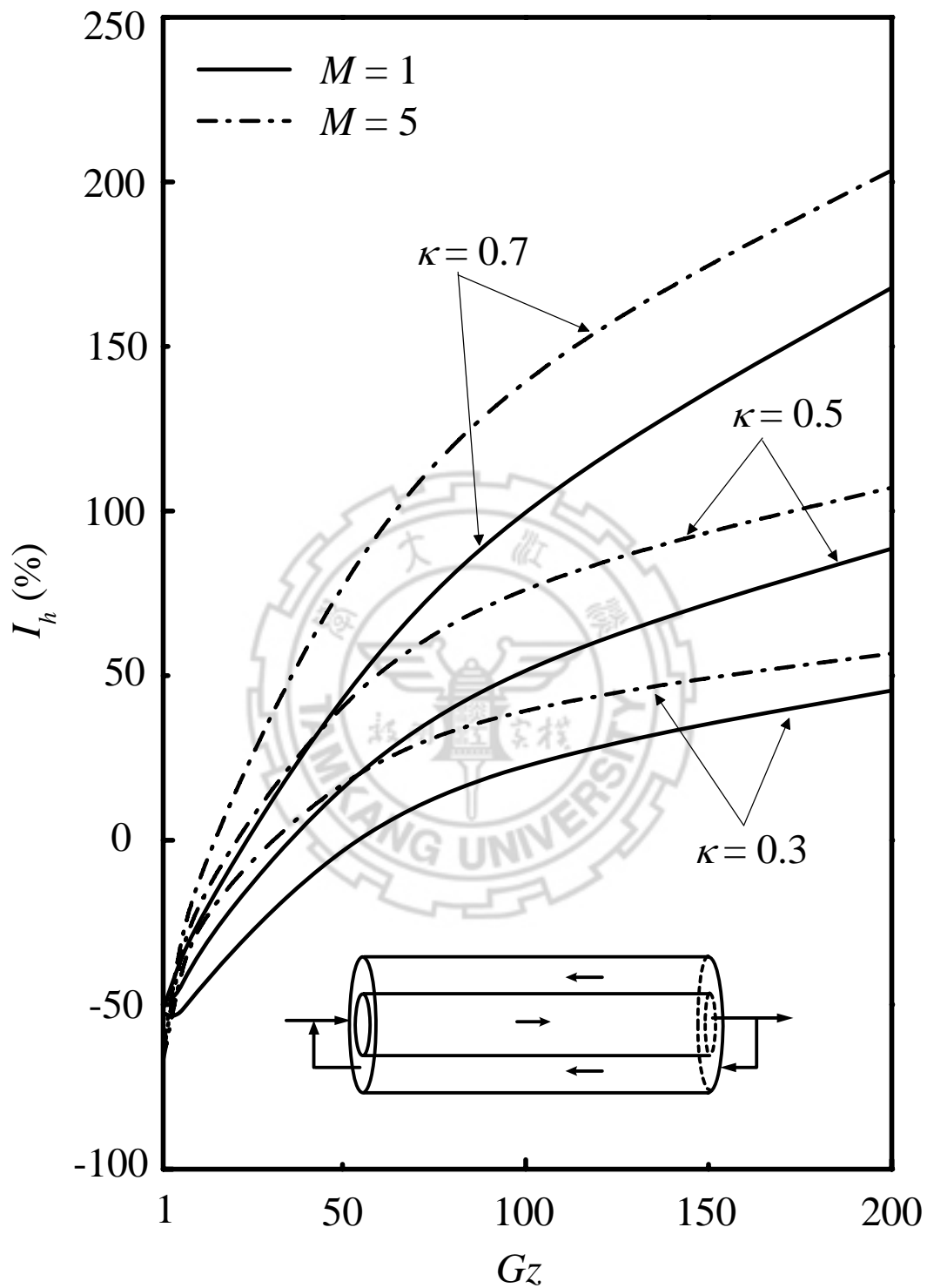
圖(4.2-4) 末端出口內管進內管出模型，軸向位置與納塞數於不同格拉茲數及隔板位置之關係。



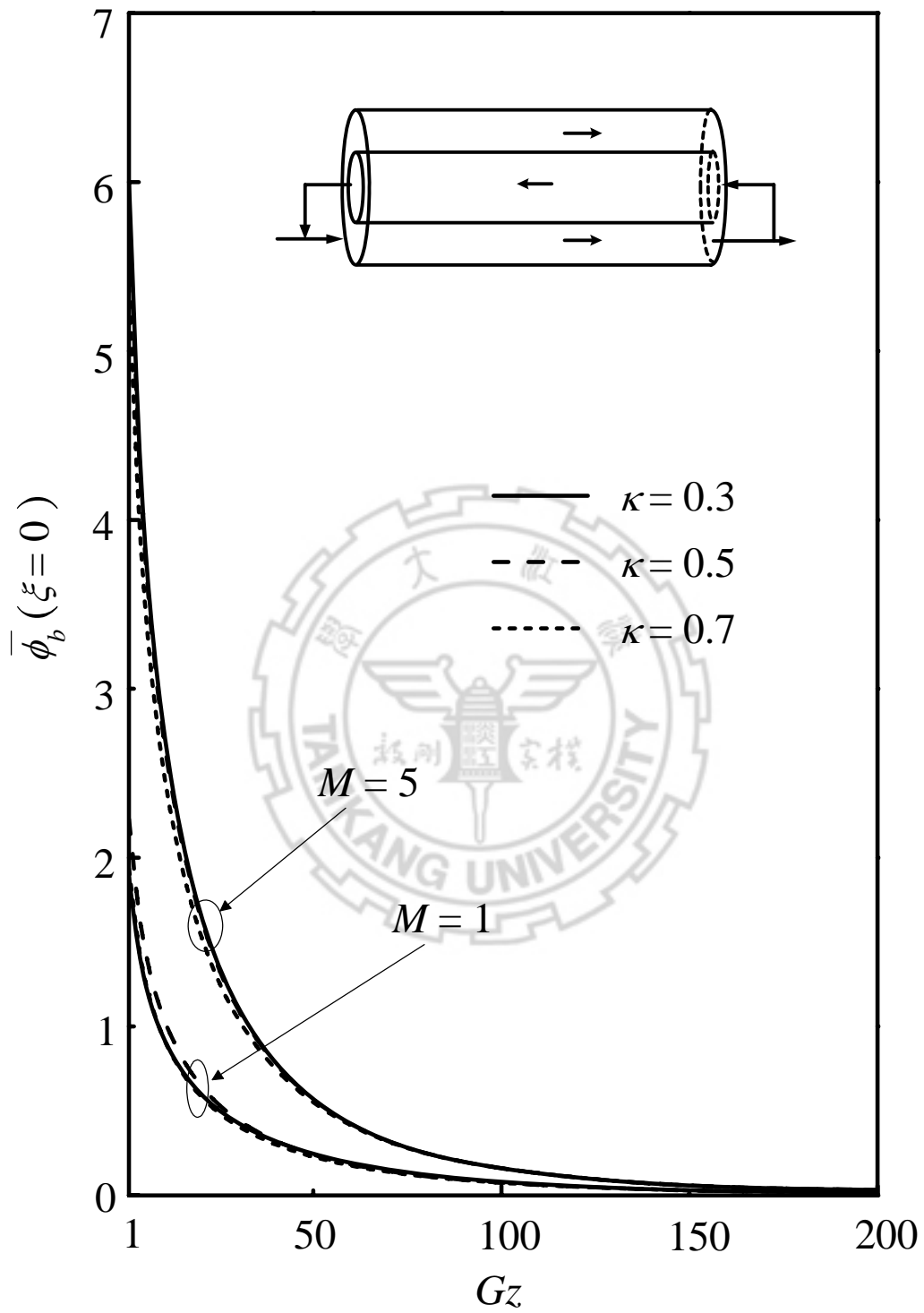
圖(4.2-5) 末端出口內管進內管出模型，格拉茲數與平均納塞數於不同迴流比及隔板位置之關係。



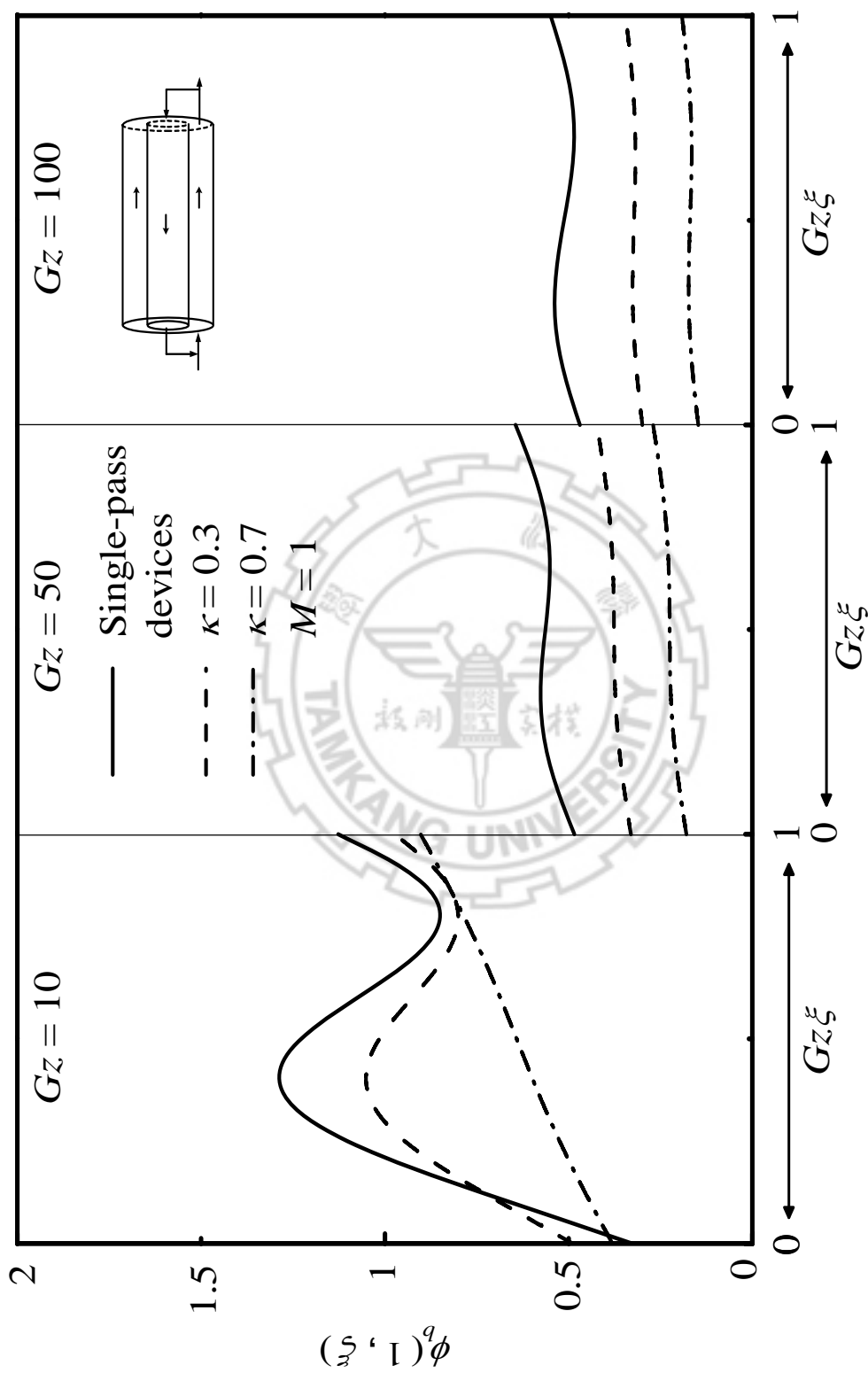
圖(4.2-6) 末端出口內管進內管出模型，隔板位置與平均納塞數於不同格拉茲數之關係。



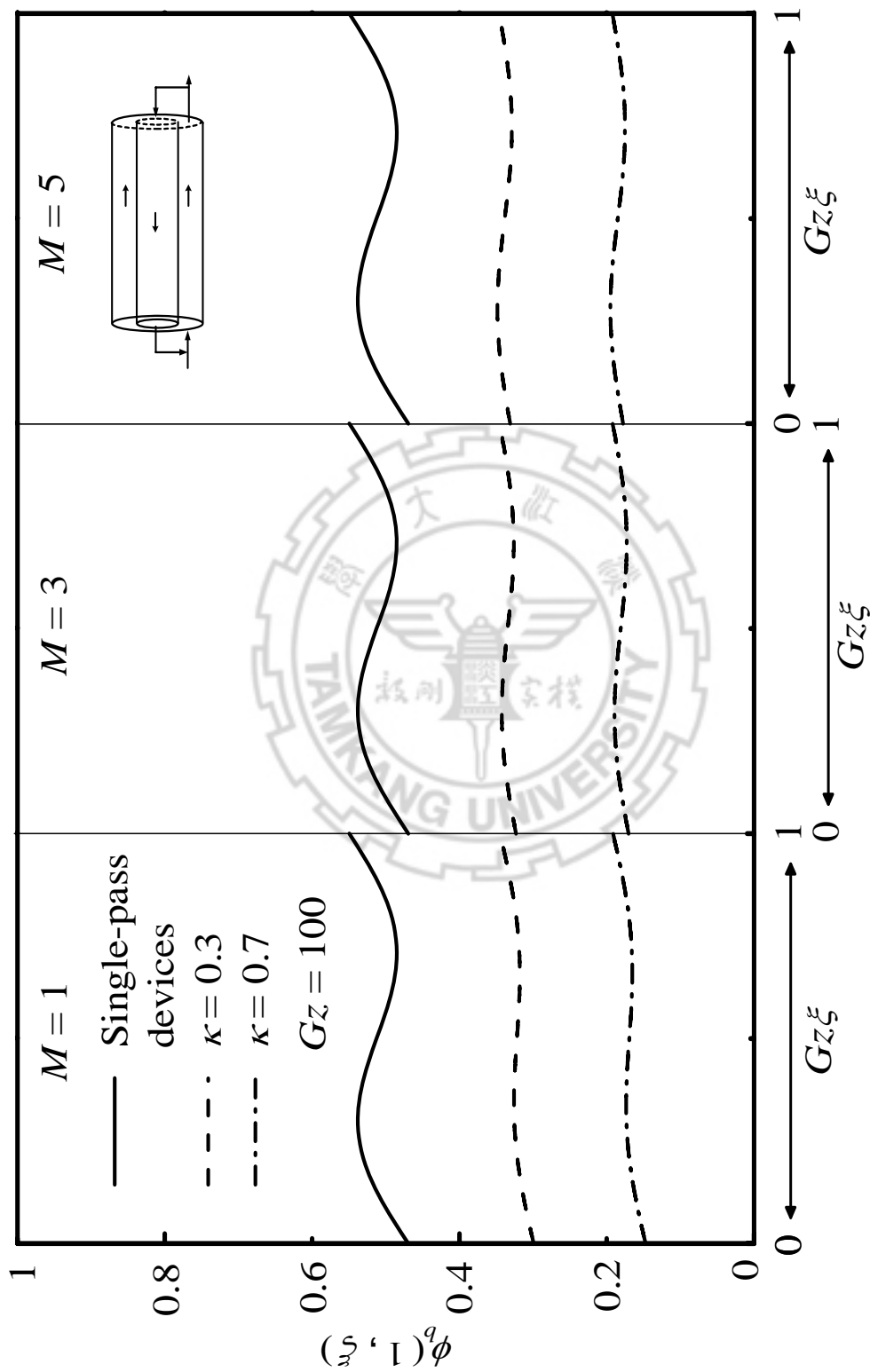
圖(4.2-7) 末端出口內管進內管出模型，格拉茲數與熱傳效率百分比於不同迴流比及隔板位置之關係。



圖(4.2-8) 末端出口外管進外管出模型，格拉茲數與迴流混合溫度於不同迴流比及隔板位置之關係。

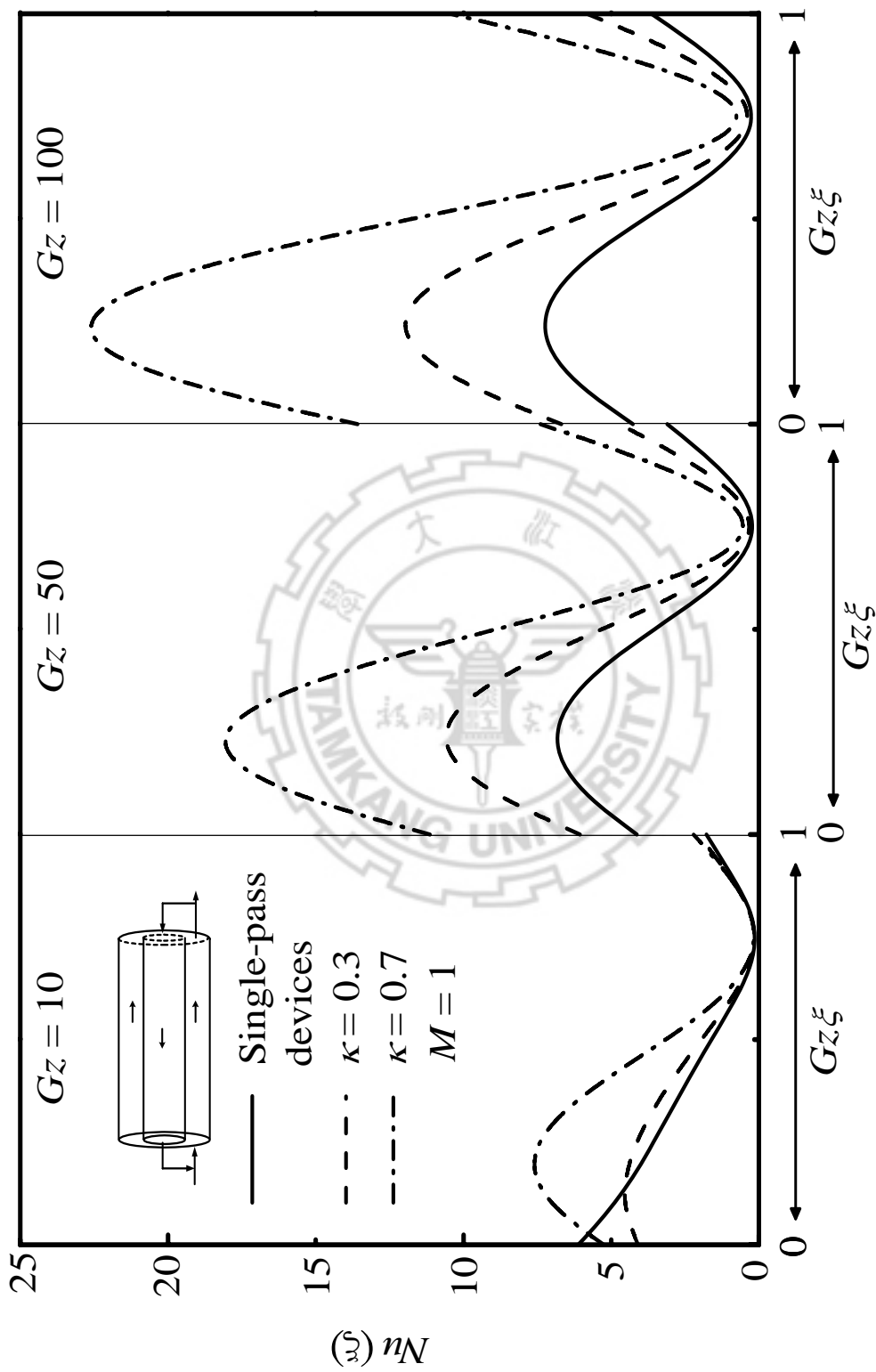


圖(4.2-9) 末端出口外管進外管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同格拉茲數及隔板位置之關係。



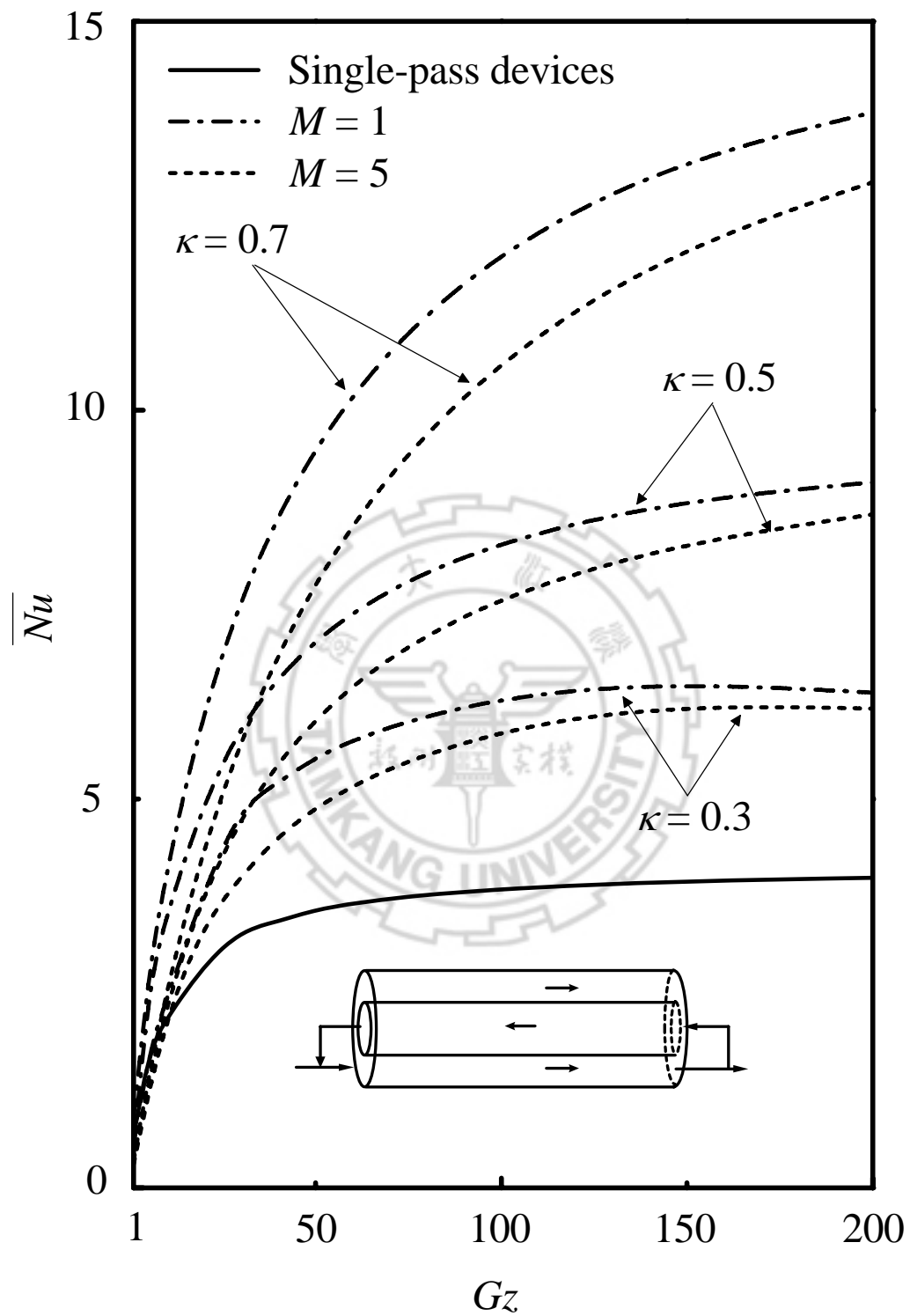
圖(4.2-10) 末端出口外管進外管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同迴流比及

隔板位置之關係。

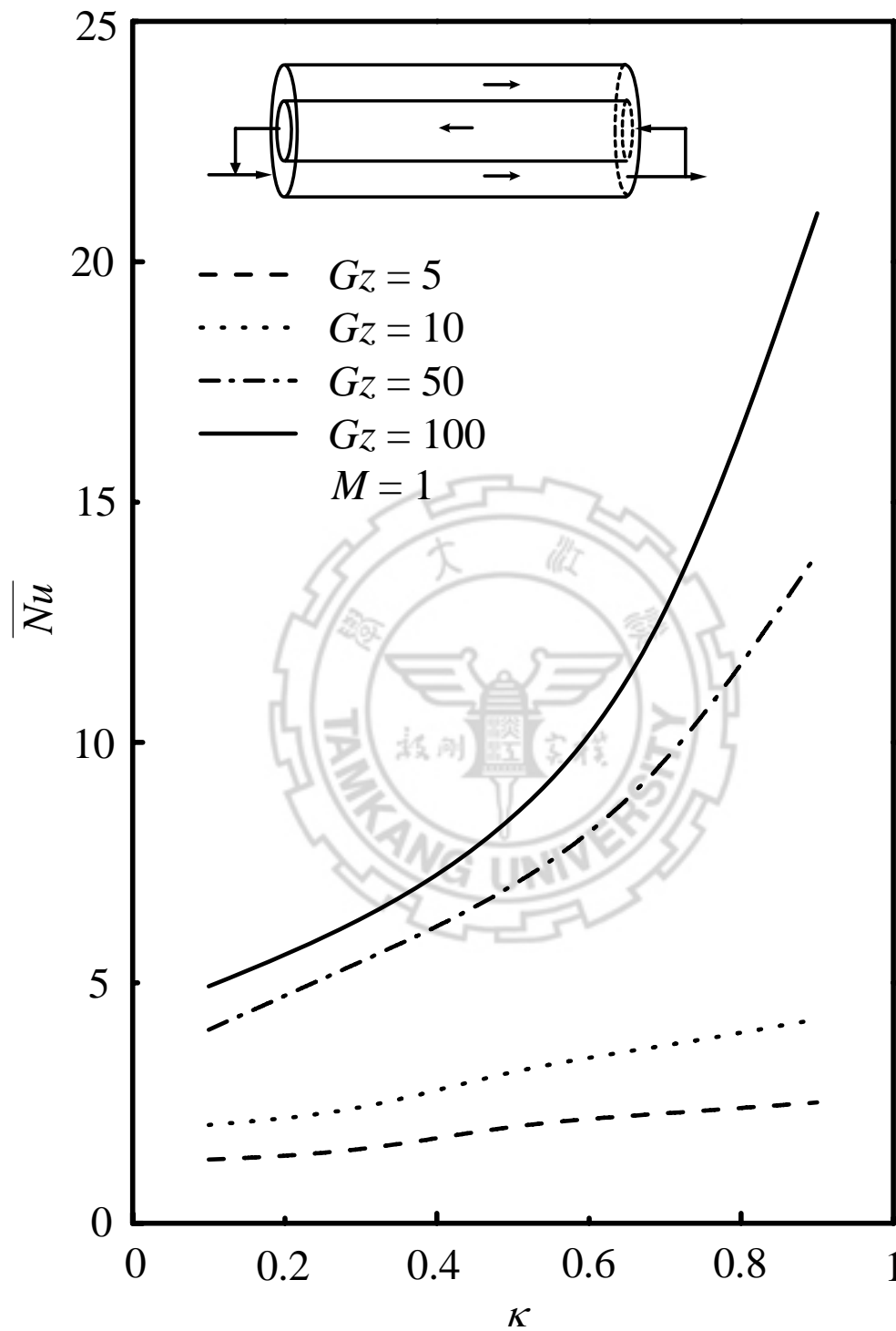


圖(4.2-11) 末端出口外管進外管出模型，軸向位置與納塞數於不同格拉茲數及

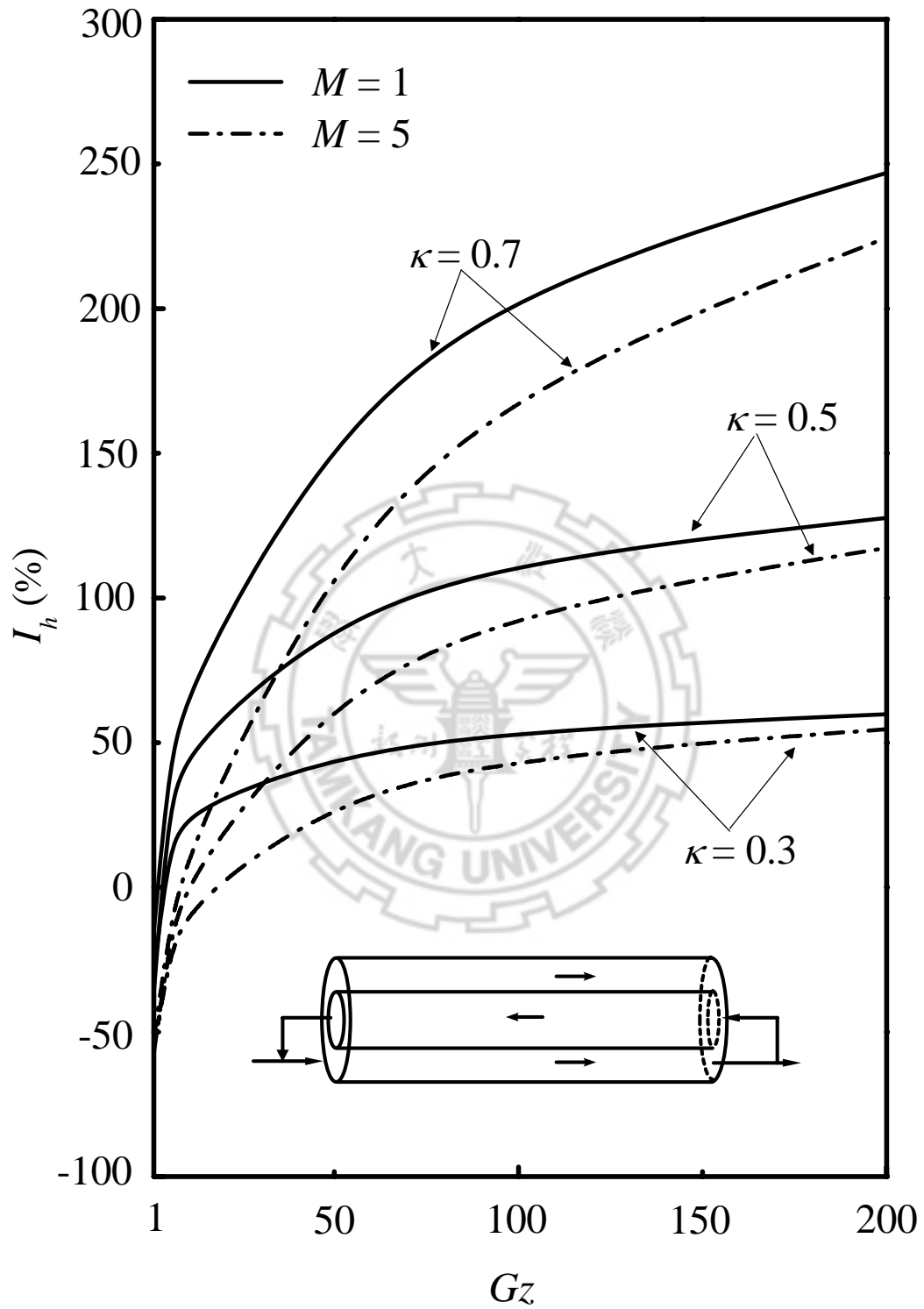
隔板位置之關係。



圖(4.2-12) 末端出口外管進外管出模型，格拉茲數與平均納塞數於不同迴流比及隔板位置之關係。



圖(4.2-13) 末端出口外管進外管出模型，隔板位置與平均納塞數於不同格拉茲數之關係。



圖(4.2-14) 末端出口外管進外管出模型，格拉茲數與熱傳效率百分比於不同迴流比及隔板位置之關係。

表(二十三) 末端出口內管進內管出模型以迴流比值及隔板位置為參

數之熱傳效率增加百分比

I_h (%)	$M = 1$			$M = 5$		
	κ			κ		
Gz	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7
1	-52.57	-48.76	-51.18	-66.80	-64.97	-63.14
10	-45.34	-32.91	-24.81	-22.65	-16.82	-9.84
100	25.73	55.96	105.87	42.27	80.80	146.95
200	45.46	88.58	167.80	56.71	107.12	203.48

表(二十四) 末端出口外管進外管出模型以迴流比值及隔板位置為參

數之熱傳效率增加百分比

I_h (%)	$M = 1$			$M = 5$		
	κ			κ		
Gz	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7
1	-29.89	-36.31	-15.31	-55.51	-57.29	-52.32
10	27.01	48.63	69.82	-5.70	4.47	13.92
100	54.19	113.45	208.45	45.09	96.27	174.88
200	59.80	127.63	246.93	54.64	117.31	224.46

4.3 出口迴流至末端模型之結果討論

(A) 內管入外管出

雙套管出口迴流至末端之模型中，首先，討論管末端外層無因次進口溫度的變化，而影響此混合溫度的變化主要關係著迴流流體溫度與內管管末端溫度兩種效應相互競爭的結果。如圖(4.3-1)所示，以無因次混合溫度對格拉茲數作圖，結果得知，隨著格拉茲數增加及隔板位置越小，迴流至管末端之混合溫度會降低。

管壁溫度部分，如圖(4.3-2)和圖(4.3-3)所示，因為加熱段在於外層套管，流體經由外層套管同時接受管壁熱通量及隔板間的熱傳導，故溫度隨著 $Gz\xi$ 減少而升高。而與單行程系統做比較的話，由圖(4.3-2)可知在 $Gz=10$ 時，管壁溫度略高於單行程系統溫度，但在 $Gz=100$ 時，管壁溫度明顯低於單行程系統。由以上結果顯示，隨著格拉茲數增加或隔板位置越接近外管，無因次管壁溫度會降低。

圖(4.3-4)以納塞數對軸向位置做圖，可發現當隔板位置 κ 越接近外管或格拉茲數增加時，其納塞數震盪情形會越大。

圖(4.3-5)以平均納塞數對格拉茲數作圖，並以單行程無隔板系統為比較基準。當格拉茲數越大的情況下，相較於單行程系統其熱傳效率提升均有顯著的改善，且熱傳效率隨著隔板位置變大或迴流比值越小而升高。將此迴流型式系統與單行程系統作比較，如圖(4.3-7)及表

(二十五)所示，在所有不同隔板位置 κ 及迴流比，在 $Gz > 30$ 之下效率增加百分比皆為正；圖(4.3-6)以平均納塞數對隔板位置作圖，可發現當隔板位置 κ 越接近外管，則平均納塞數越高，且隨著格拉茲數增加趨勢越明顯。

(B) 外管入內管出

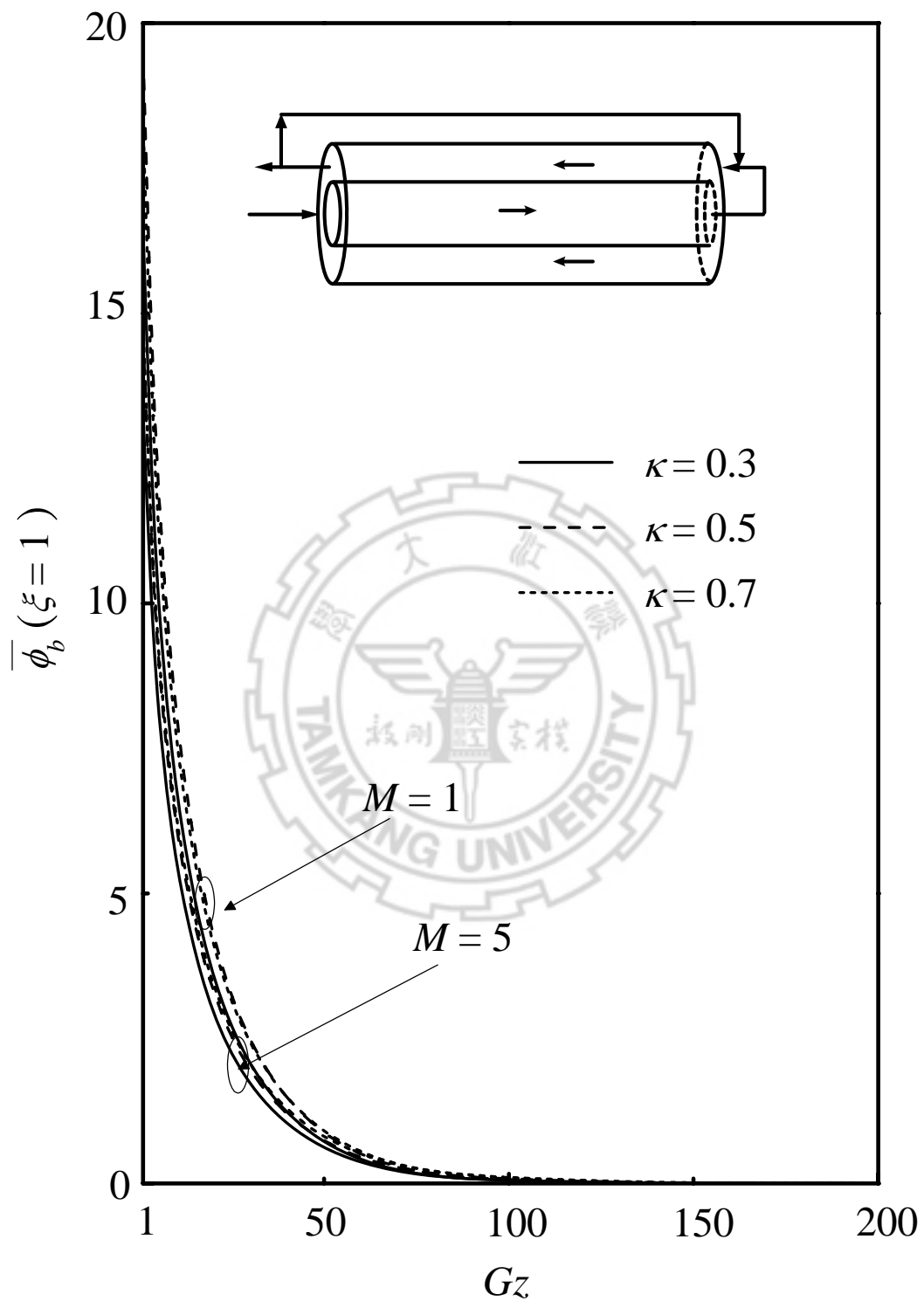
外管進內管出的流動型式與前一小節差別除了入口位置有所不同之外，和迴流有影響的通道也由外管變成內管。如圖(4.3-7)所示，以無因次混合溫度對格拉茲數作圖，在迴流比值愈小，內管管末端溫度越高，且隨著迴流比值增加、格拉茲數增加及隔板位置越接近內管，所以內層出口之溫度降低，故迴流至管末端之混合溫度會降低。

在無因次管壁溫度部分，如圖(4.3-9)和圖(4.3-10)所示，經由外層套管同時接受管壁熱通量及隔板間的熱傳導，故溫度隨著 $Gz\xi$ 增加而升高。而與單行程系統做比較，由圖(4.3-9)可知在 $Gz = 10$ 時，管壁溫度略低於單行程系統溫度，但在 $Gz = 100$ 時，管壁溫度明顯低於單行程系統。由圖(4.3-10)因為此型式之迴流只有對內管會有影響，故外管管壁溫度不受迴流大小的影響，所以隨著格拉茲數增加或隔板位置越大，無因次管壁溫度會降低。

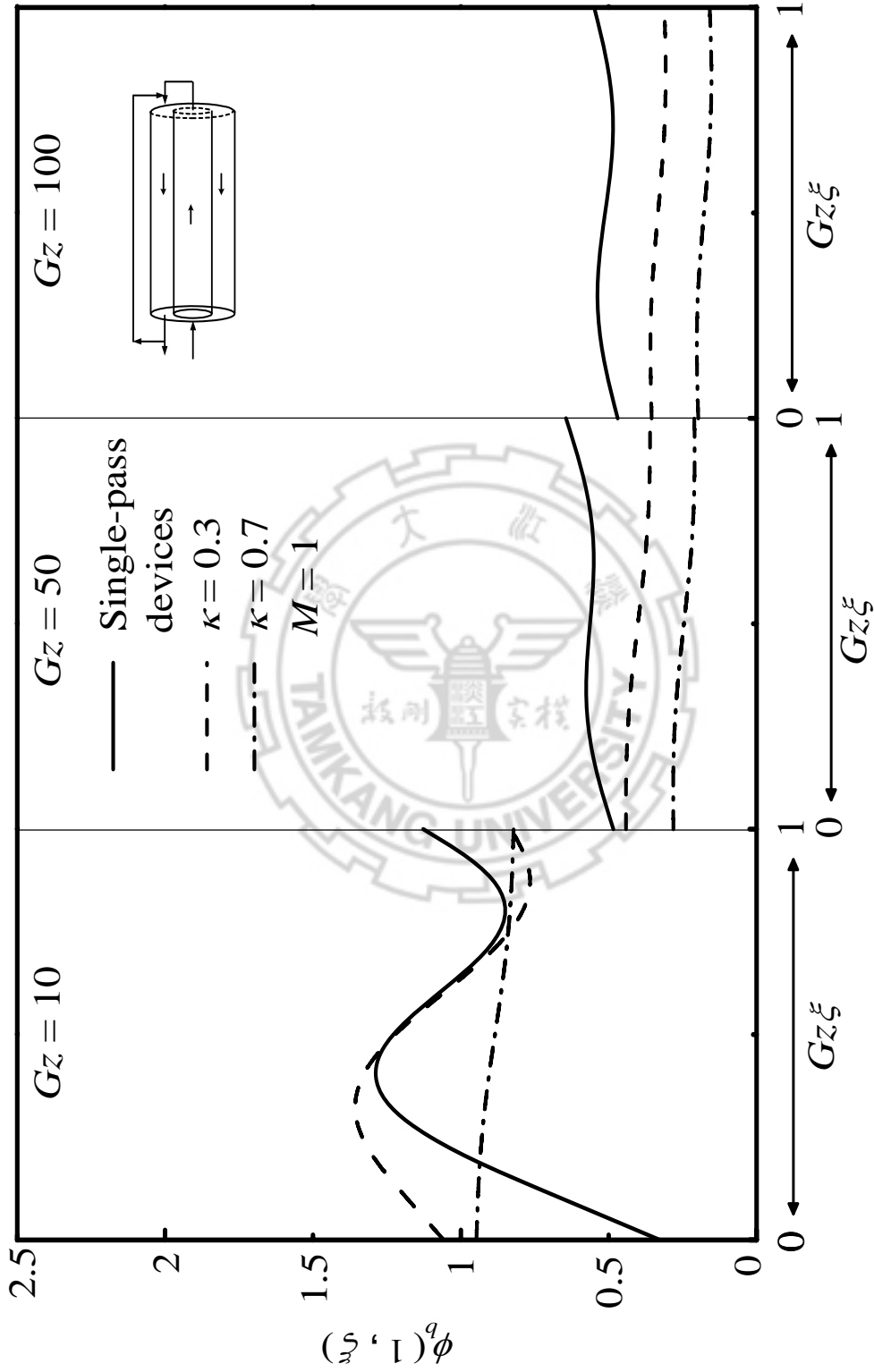
圖(4.3-11)以納塞數對軸向位置做圖，可發現當隔板位置 κ 越接近外管或格拉茲數增加時，其納塞數震盪情形會越大。

前面已經有討論到此迴流型式的管壁溫度與迴流比無關，如圖(4.3-12)所示，納塞數確實與迴流比的變化無關。當格拉茲數越大的情況下，相較於單行程系統其熱傳效率提升均有顯著的改善，且熱傳效率隨著隔板位置變大而升高。將此迴流型式系統與單行程系統作比較表，如圖(4.3-14)及表(二十六)所示，可知在所有不同隔板位置 κ 及迴流比之下不同格拉茲數之效率提昇率的變化，在 $Gz > 10$ 之後所有組合之效率增加百分比皆為正；圖(4.3-13)以平均納塞數對隔板位置作圖，可發現當隔板位置 κ 越接近外管，則平均納塞數越高，且隨著格拉茲數增加趨勢越明顯。



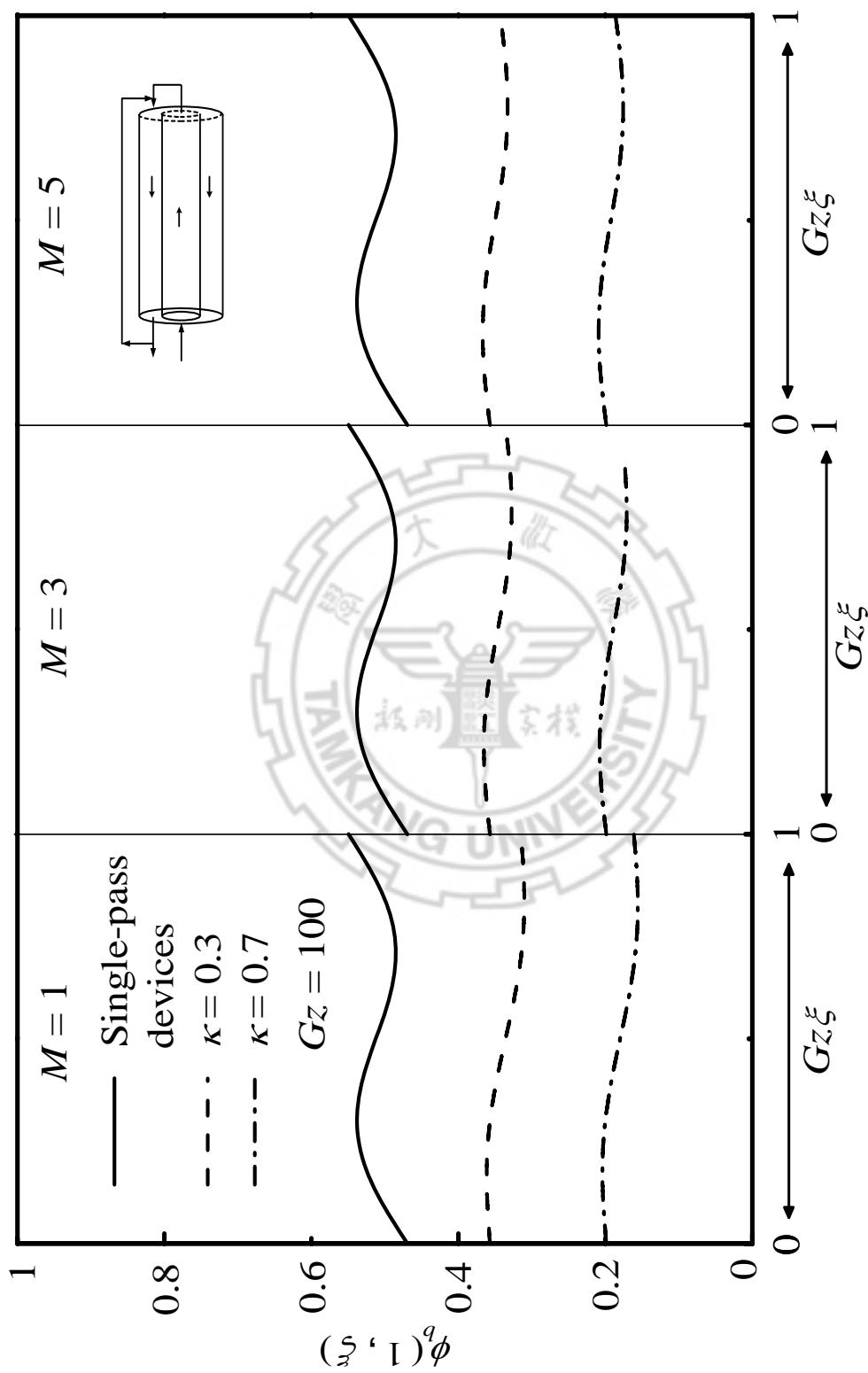


圖(4.3-1) 出口迴流至末端內管進外管出模型，格拉茲數與迴流混合溫度於不同迴流比及隔板位置之關係。

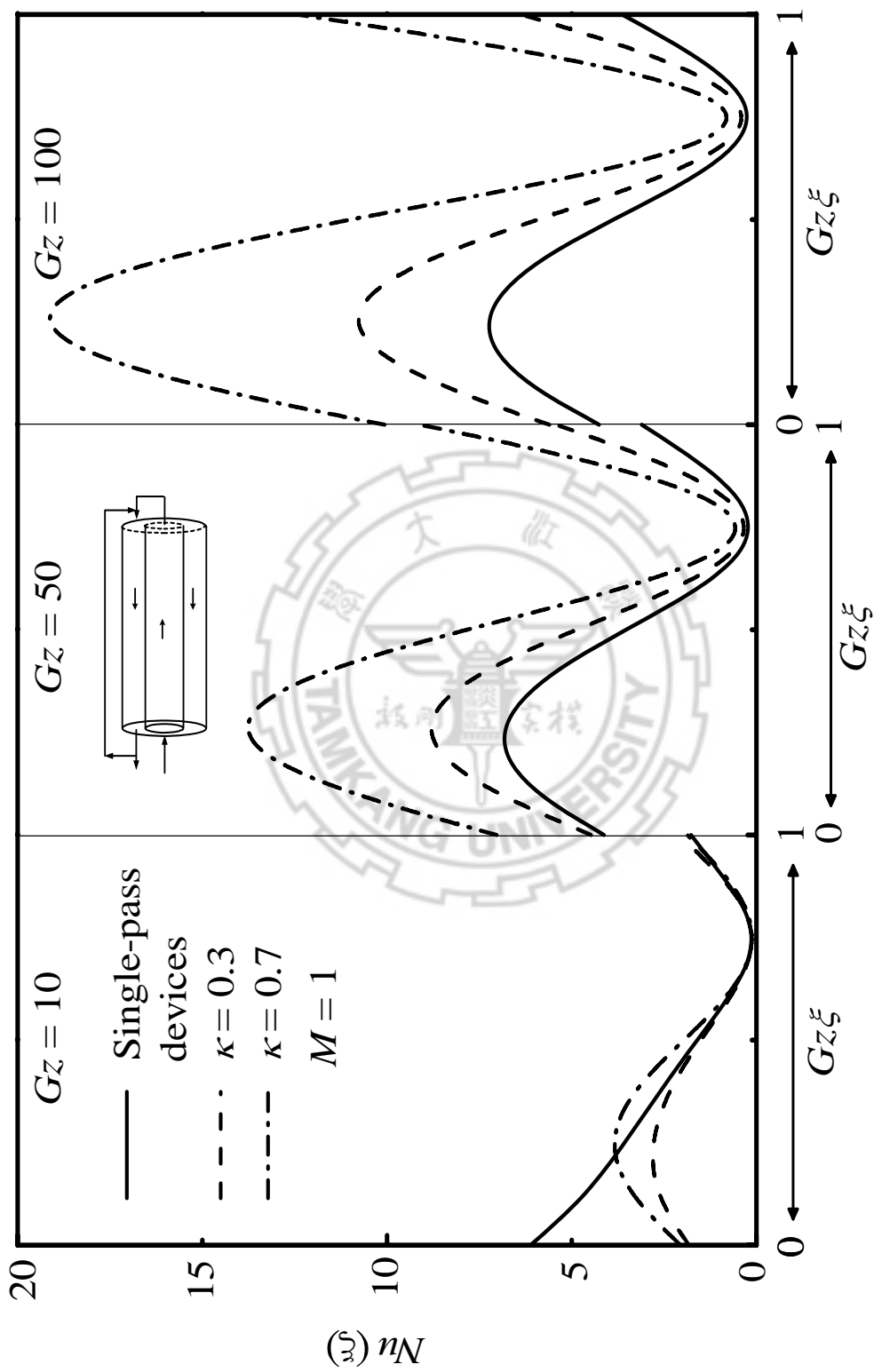


圖(4.3-2) 出口迴流至末端內管進外管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同格

拉茲數及隔板位置之關係。

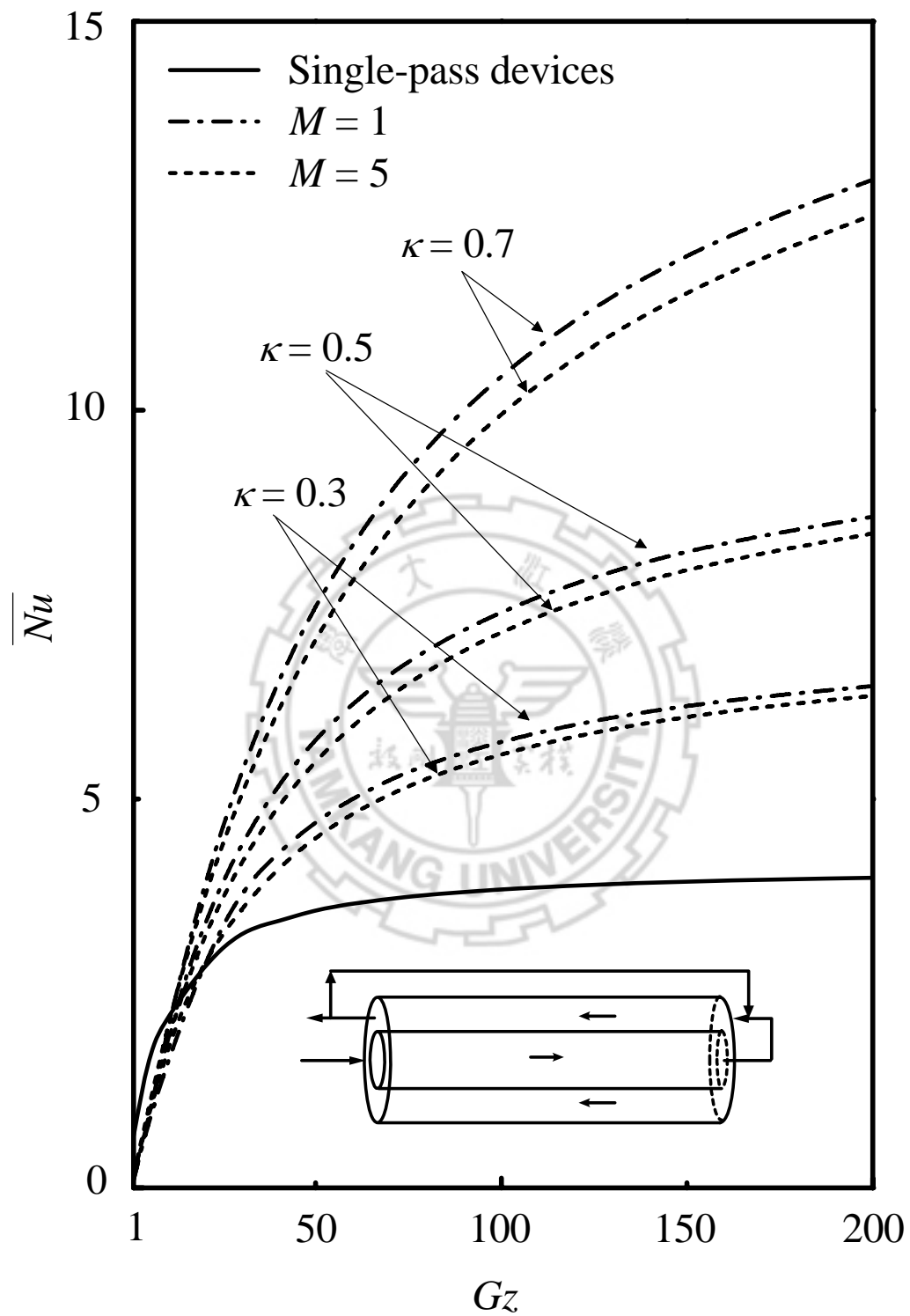


圖(4.3-3) 出口迴流至末端內管進外管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同迴流比及隔板位置之關係。

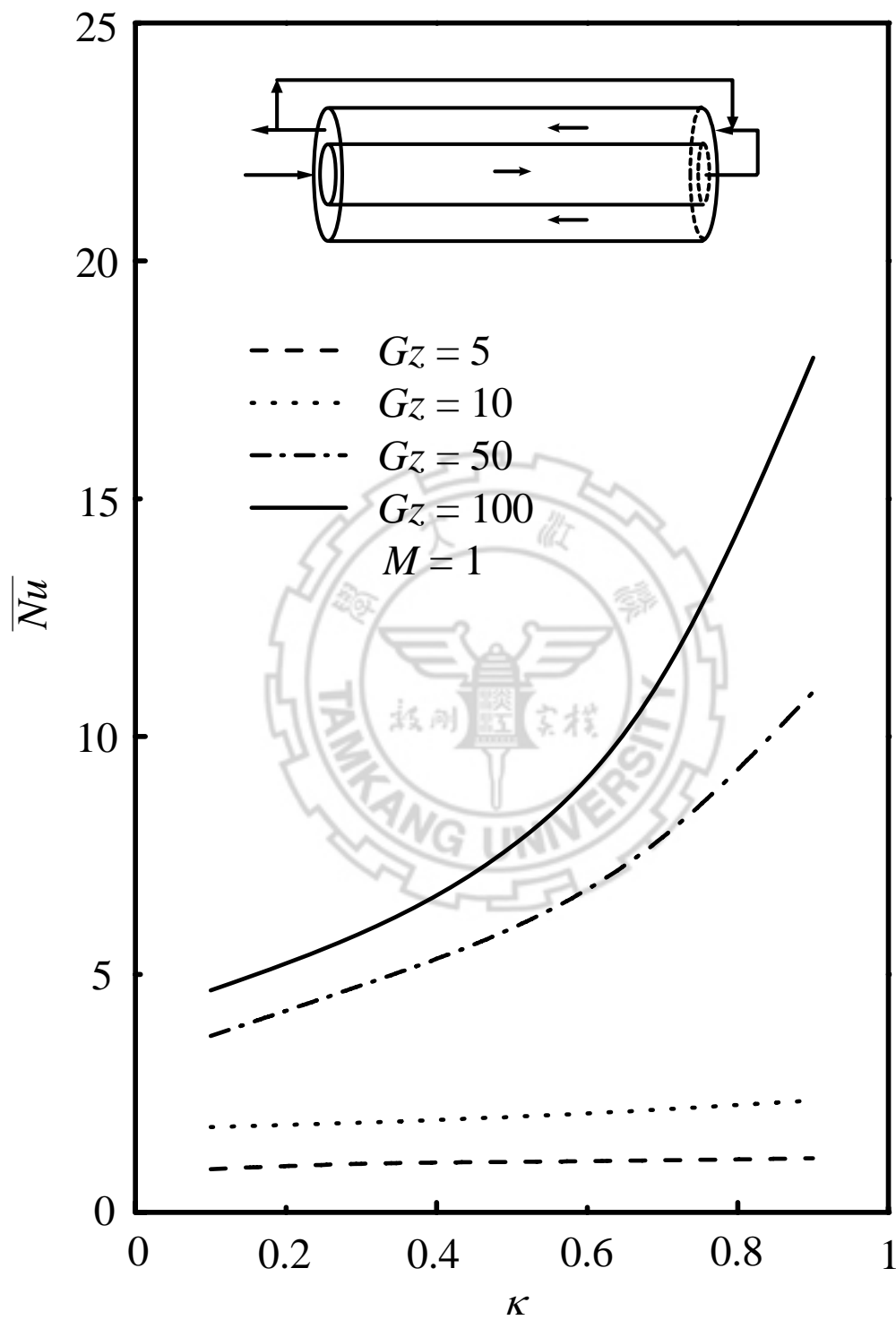


圖(4.3-4) 出口迴流至末端內管進外管出模型，軸向位置與納塞數於不同格拉

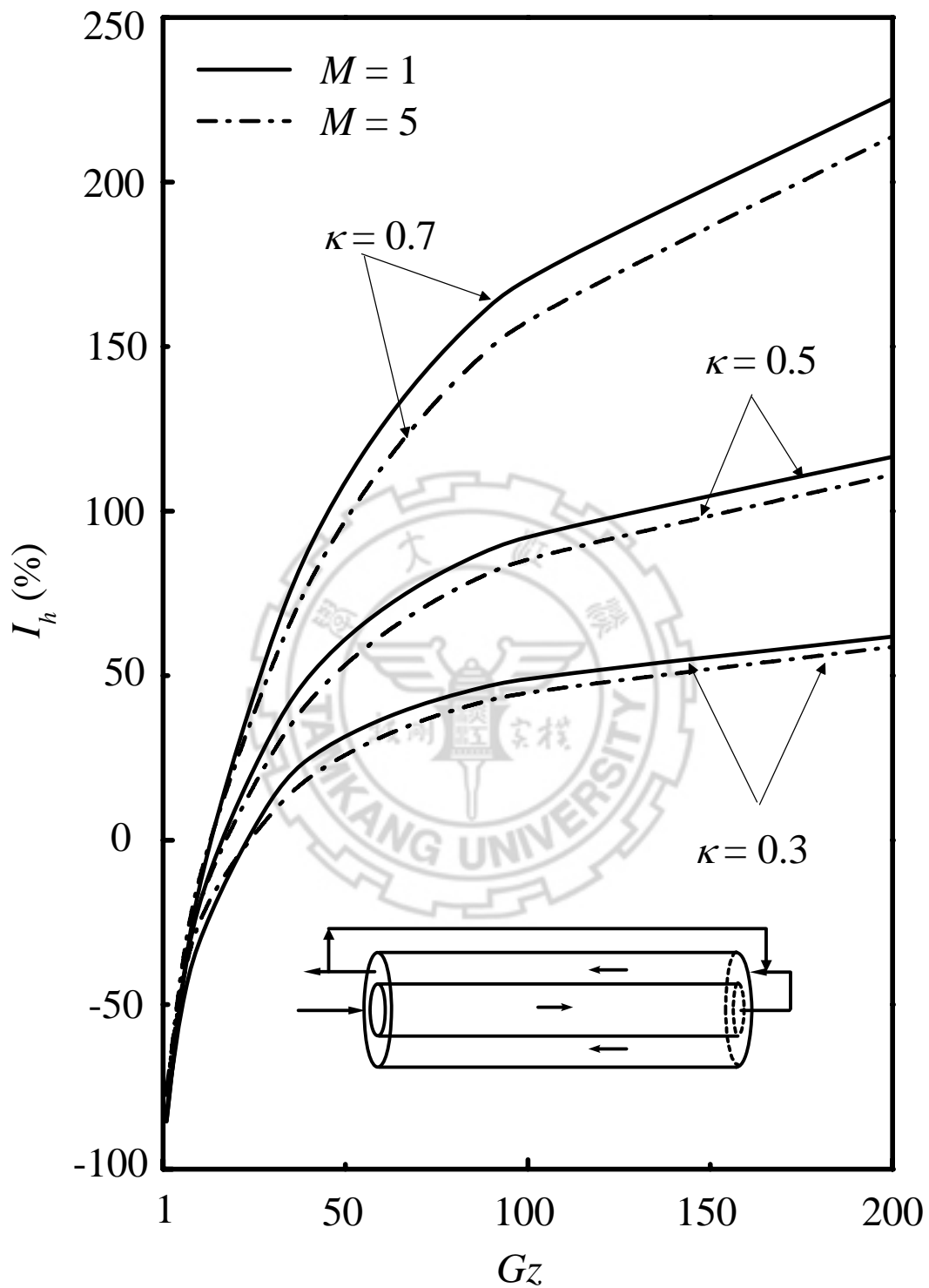
茲數及隔板位置之關係。



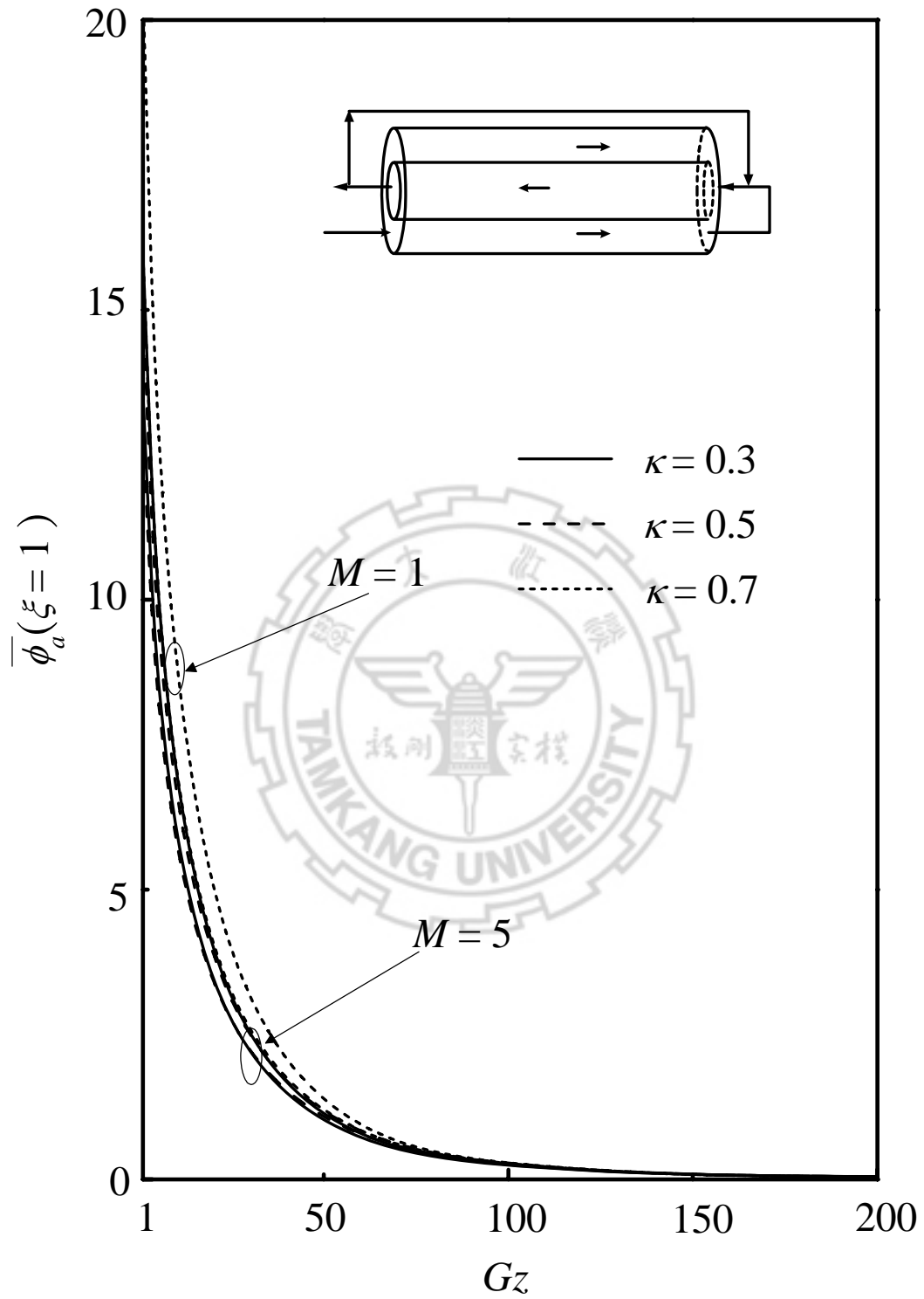
圖(4.3-5) 出口迴流至末端內管進外管出模型，格拉茲數與平均納塞數於不同迴流比及隔板位置之關係。



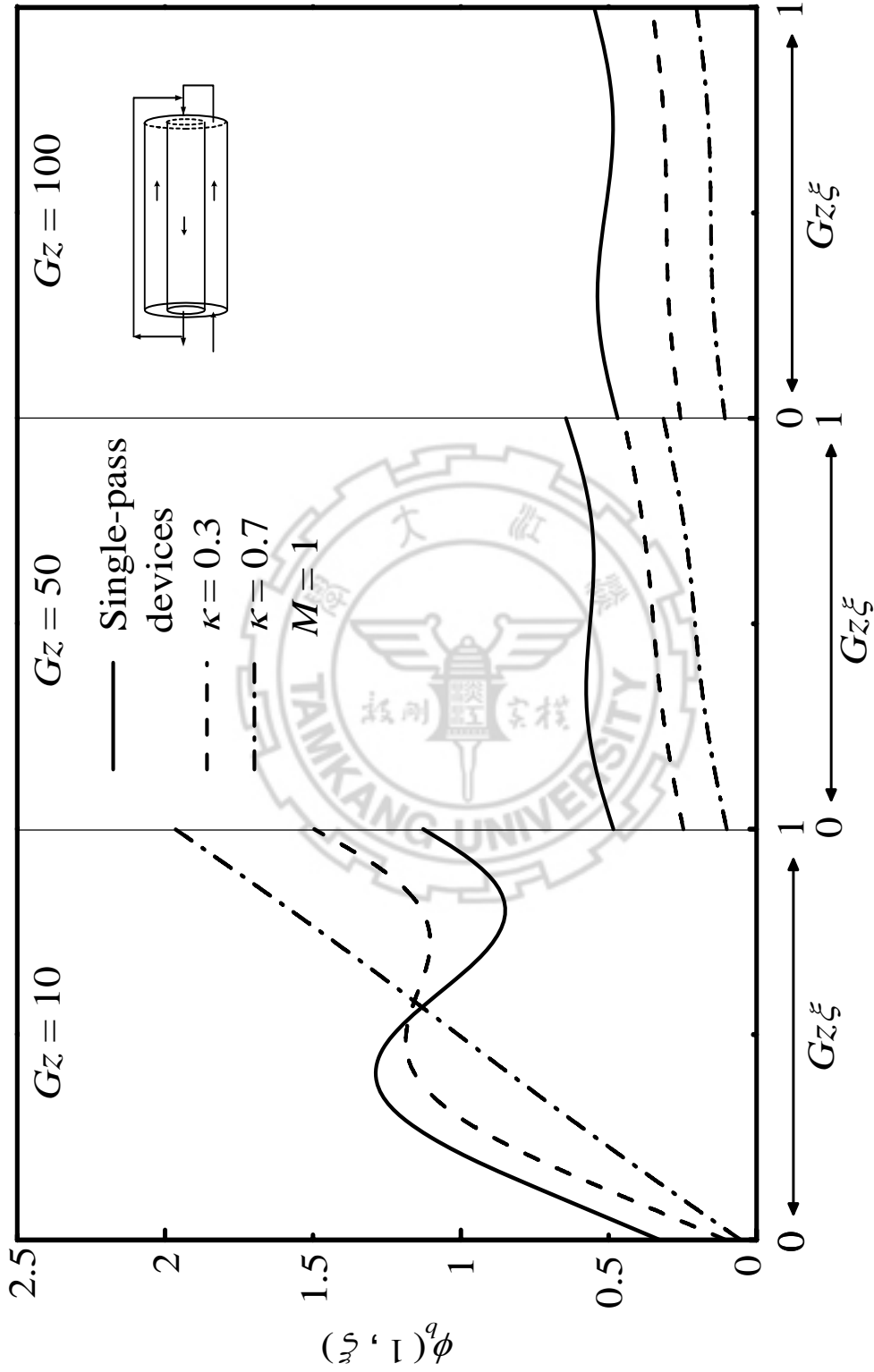
圖(4.3-6) 出口迴流至末端內管進外管出模型，隔板位置與平均納塞數於不同格拉茲數之關係。



圖(4.3-7) 出口迴流至末端內管進外管出模型，格拉茲數與熱傳效率百分比於不同迴流比及隔板位置之關係。

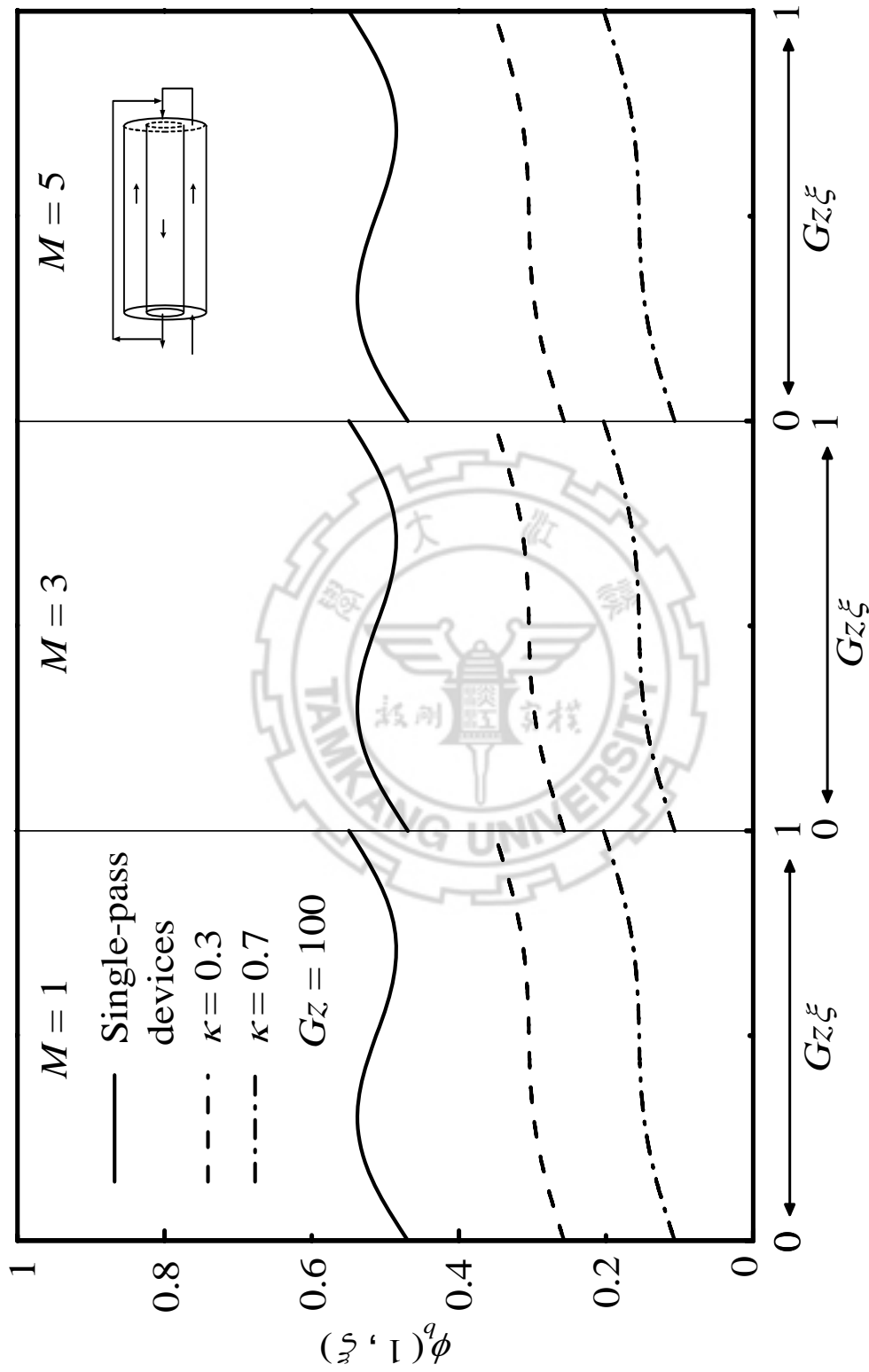


圖(4.3-8) 出口迴流至末端外管進內管出模型，格拉茲數與迴流混合溫度於不同迴流比及隔板位置之關係。



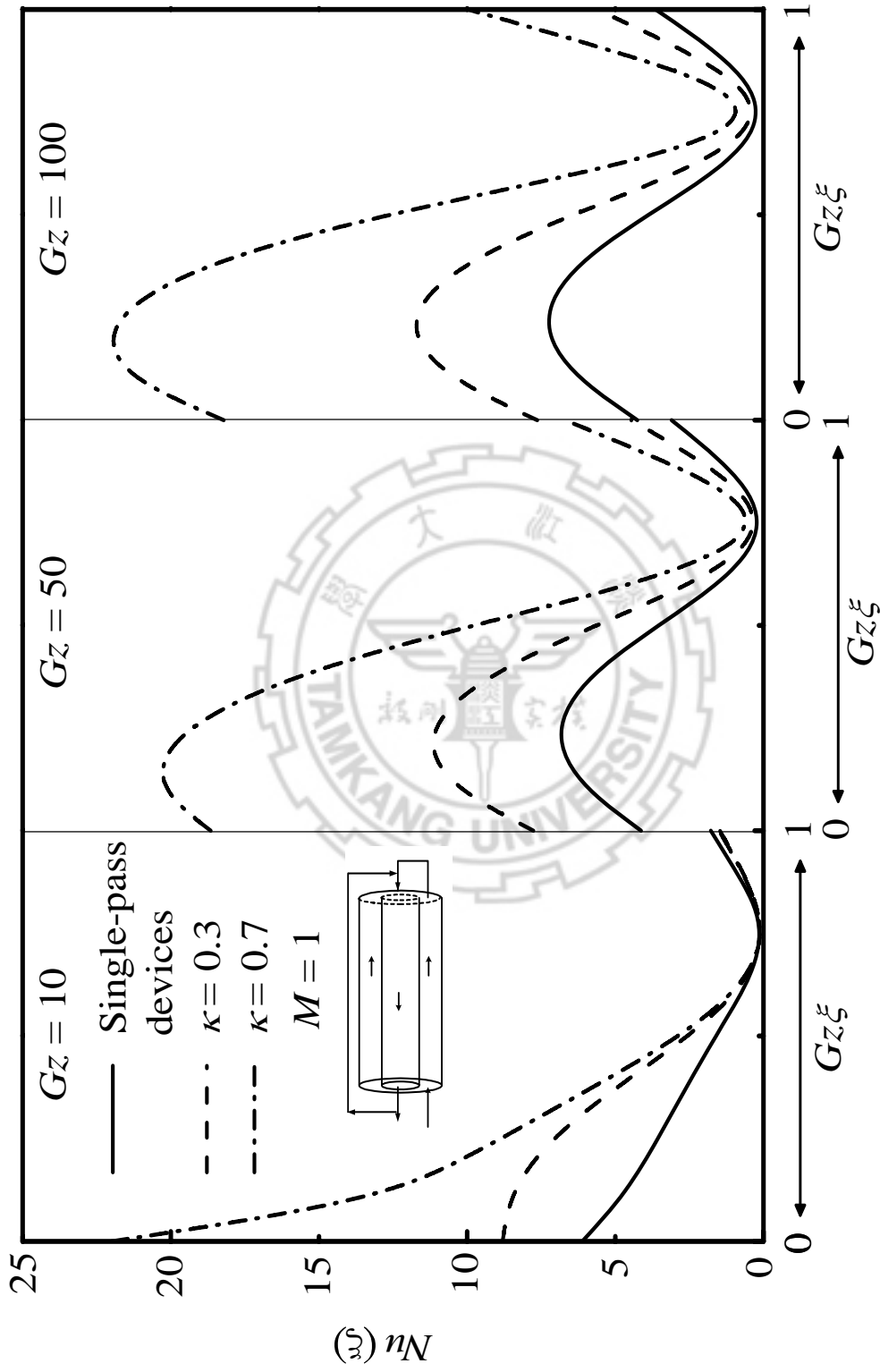
圖(4.3-9) 出口迴流至末端外管進內管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同格

拉茲數及隔板位置之關係。



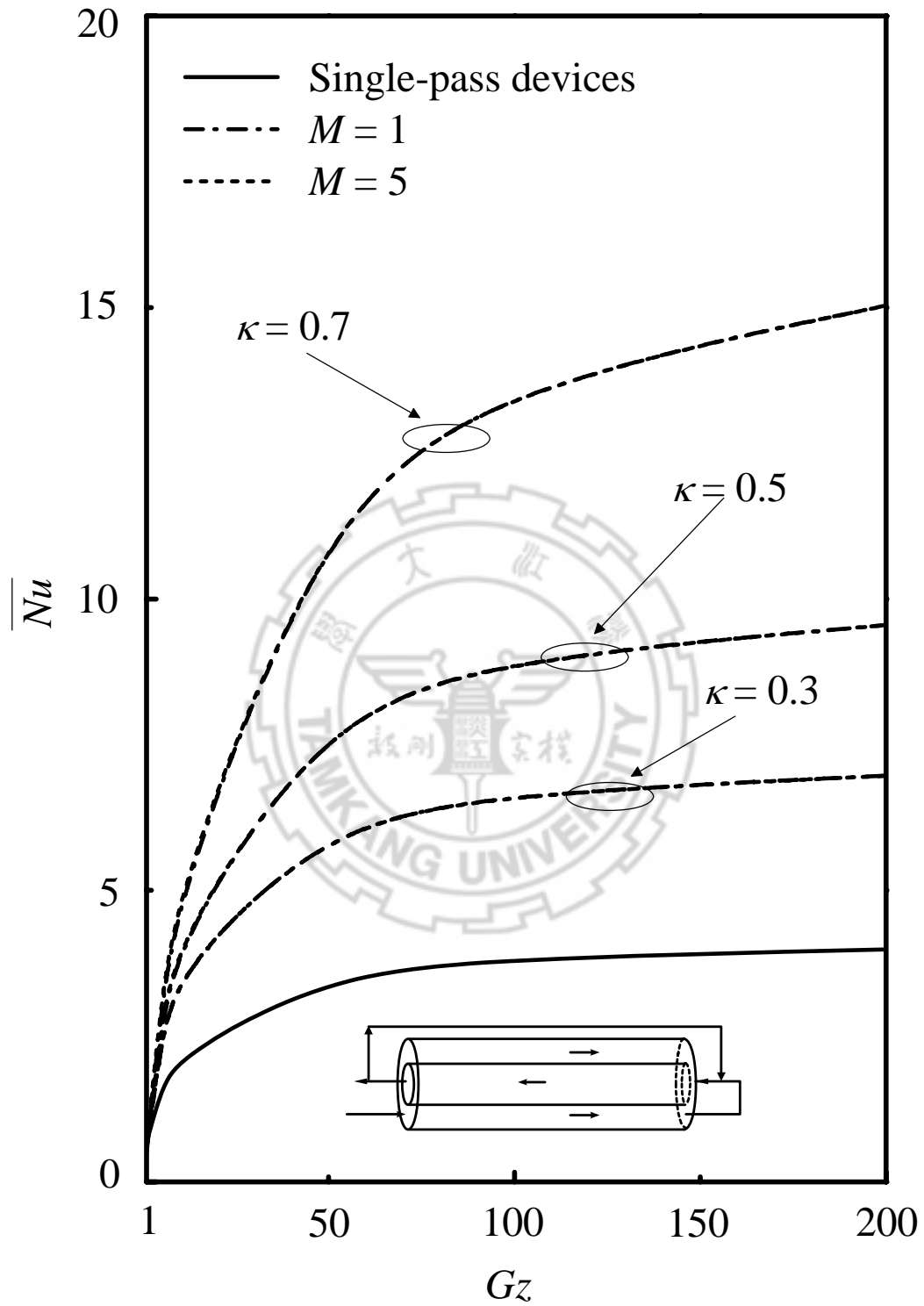
圖(4.3-10) 出口迴流至末端外管進內管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同迴

流比及隔板位置之關係。

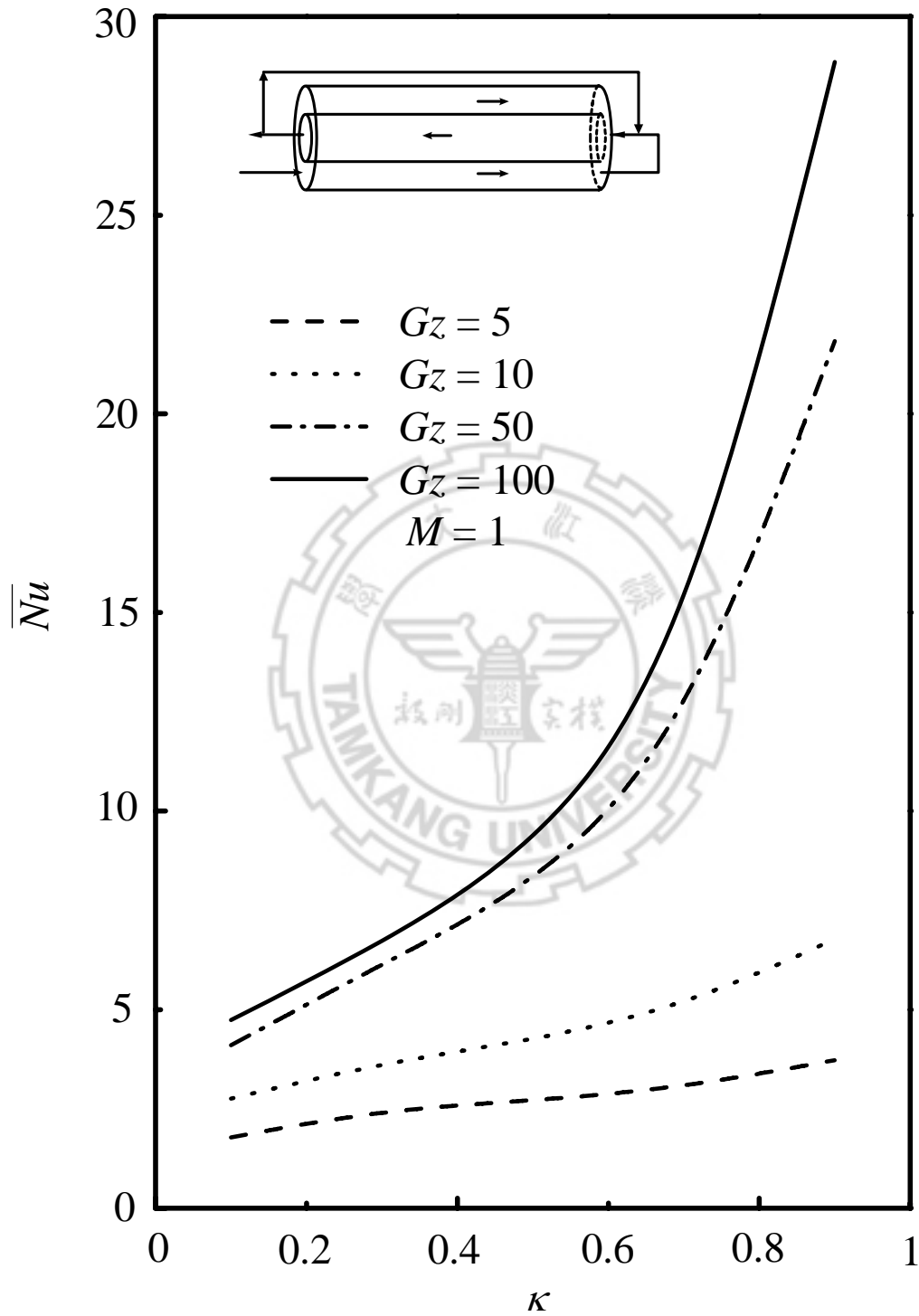


圖(4.3-11) 出口迴流至末端外管進內管出模型，軸向位置與納塞數於不同格拉

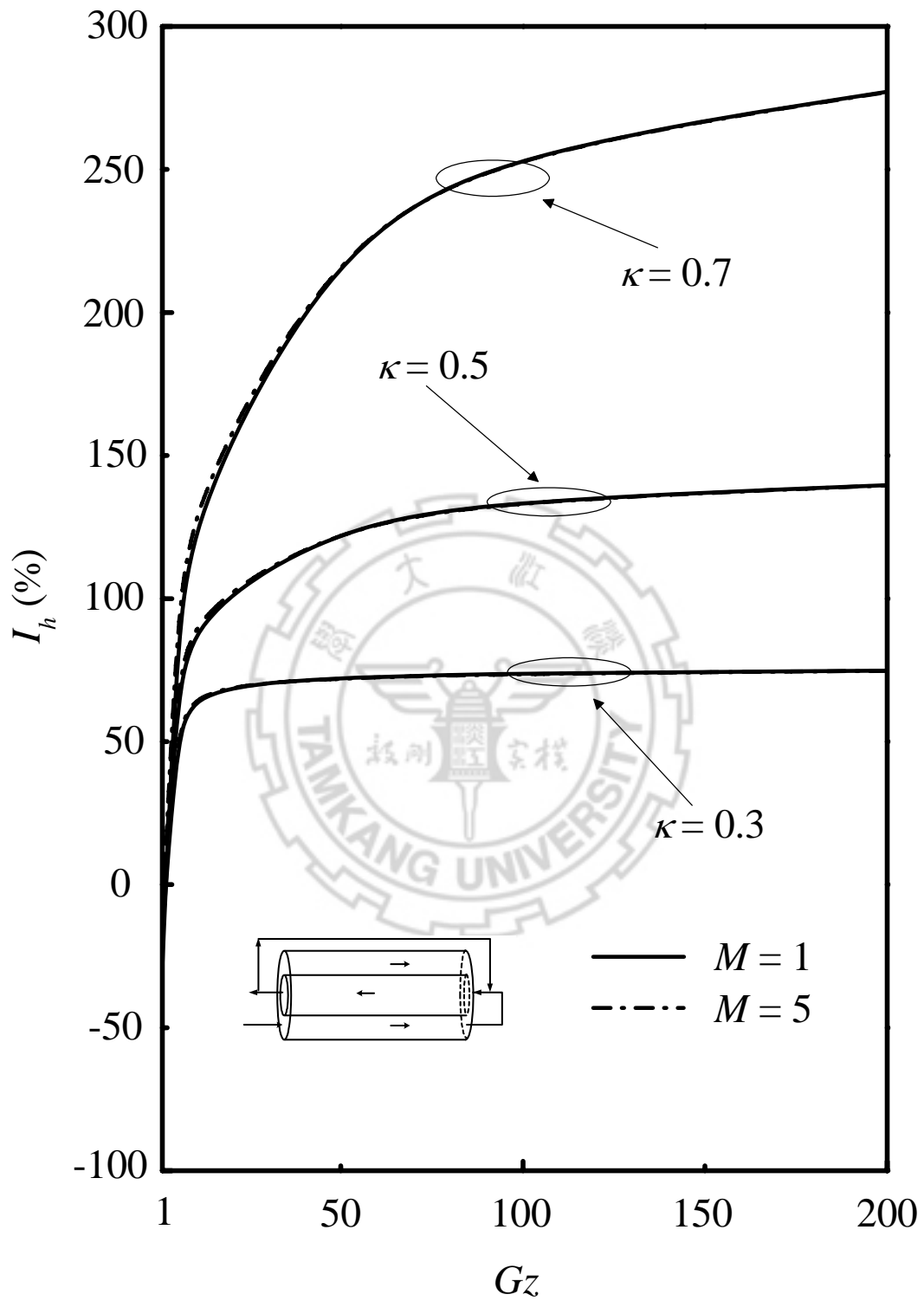
茲數及隔板位置之關係。



圖(4.3-12) 出口迴流至末端外管進內管出模型，格拉茲數與平均納塞數於不同迴流比及隔板位置之關係。



圖(4.3-13) 出口迴流至末端外管進內管出模型，隔板位置與平均納塞數於不同格拉茲數之關係。



圖(4.3-14) 出口迴流至末端外管進內管出模型，格拉茲數與熱傳效率百分比於不同迴流比及隔板位置之關係。

表(二十五) 出口迴流至末端內管進外管出以迴流比值及隔板位置為

參數之熱傳效率增加百分比

I_h (%)	$M = 1$			$M = 5$		
	κ			κ		
Gz	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7
1	-82.46	-85.24	-85.53	-75.35	-77.10	-77.46
10	-49.10	-44.00	-44.40	-43.04	-39.69	-37.29
100	49.46	92.85	171.98	45.27	86.13	159.29
200	61.89	116.48	225.22	58.76	111.08	213.85

表(二十六) 出口迴流至末端外管進內管出以迴流比值及隔板位置為

參數之熱傳效率增加百分比

I_h (%)	$M = 1$			$M = 5$		
	κ			κ		
Gz	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7
1	-17.76	-16.82	-28.69	-10.89	-9.99	-15.35
10	68.94	95.00	133.76	69.13	96.40	137.71
100	73.88	134.52	257.28	73.76	134.36	257.12
200	74.84	139.64	277.15	74.77	139.55	277.04

4.4 末端迴流至入口模型之結果討論

(A) 內管入外管出

雙套管末端迴流至入口模型中，由內管末端將流體迴流至入口處在預混效應與前面幾節的型式相較起來略不明顯，如圖(4.4-1)所示。而迴流比值或隔板位置大小的改變，對於混合後無因次入口溫度的影響雖不像前面幾節所討論的那麼明顯，但實際上還是有些微的影響，在 $Gz < 50$ 時隨著格拉茲數增加及隔板位置越接近內管，迴流至管入口之混合溫度會降低，且隨迴流比值增加，入口混合溫度會升高。而在 $Gz > 50$ 後迴流比值及隔板位置的改變對於入口混合溫度則無明顯變化，但隨著格拉茲數增加，入口溫度還是會些微降低。

管壁溫度部份，如圖(4.4-2)和圖(4.4-3)所示，結果顯示，因為加熱段在於外層套管，再加上迴流主要影響內管部分，所以迴流比沒直接影響到管壁溫度的變化，因此流體經由外層套管就單純接受管壁熱通量及隔板間的熱傳導，溫度隨著 $Gz\xi$ 減少而升高。隨著格拉茲數增加或隔板位置越大，無因次管壁溫度會降低。而與單行程系統做比較，由圖(4.4-2)可知在 $Gz = 10$ 時，平均管壁溫度與單行程系統溫度差不多，但在 $Gz = 100$ 時，管壁溫度明顯低於單行程系統。

圖(4.4-4)以納塞數對軸向位置做圖，可發現當隔板位置 κ 越接近外管或格拉茲數增加時，其納塞數震盪情形會越大。

圖(4.4-5)以平均納塞數對格拉茲數作圖，並以單行程無隔板系統為比較基準。當格拉茲數越大的情況下，相較於單行程系統其熱傳效率提升均有顯著的改善，且熱傳效率隨著隔板位置變大而升高。而在本節前面已提到過迴流主要影響內管部分，所以迴流比的大小沒直接影響到管壁溫度的變化，將此迴流型式系統與單行程系統作比較，如圖(4.4-7)及表(二十七)所示，在所有不同隔板位置 κ 及迴流比，在 $Gz > 10$ 效率增加百分比皆為正；圖(4.4-6)以平均納塞數對隔板位置作圖，可發現當隔板位置 κ 越接近外管，則平均納塞數越高，且隨著格拉茲數增加趨勢越明顯。

(B) 外管入內管出

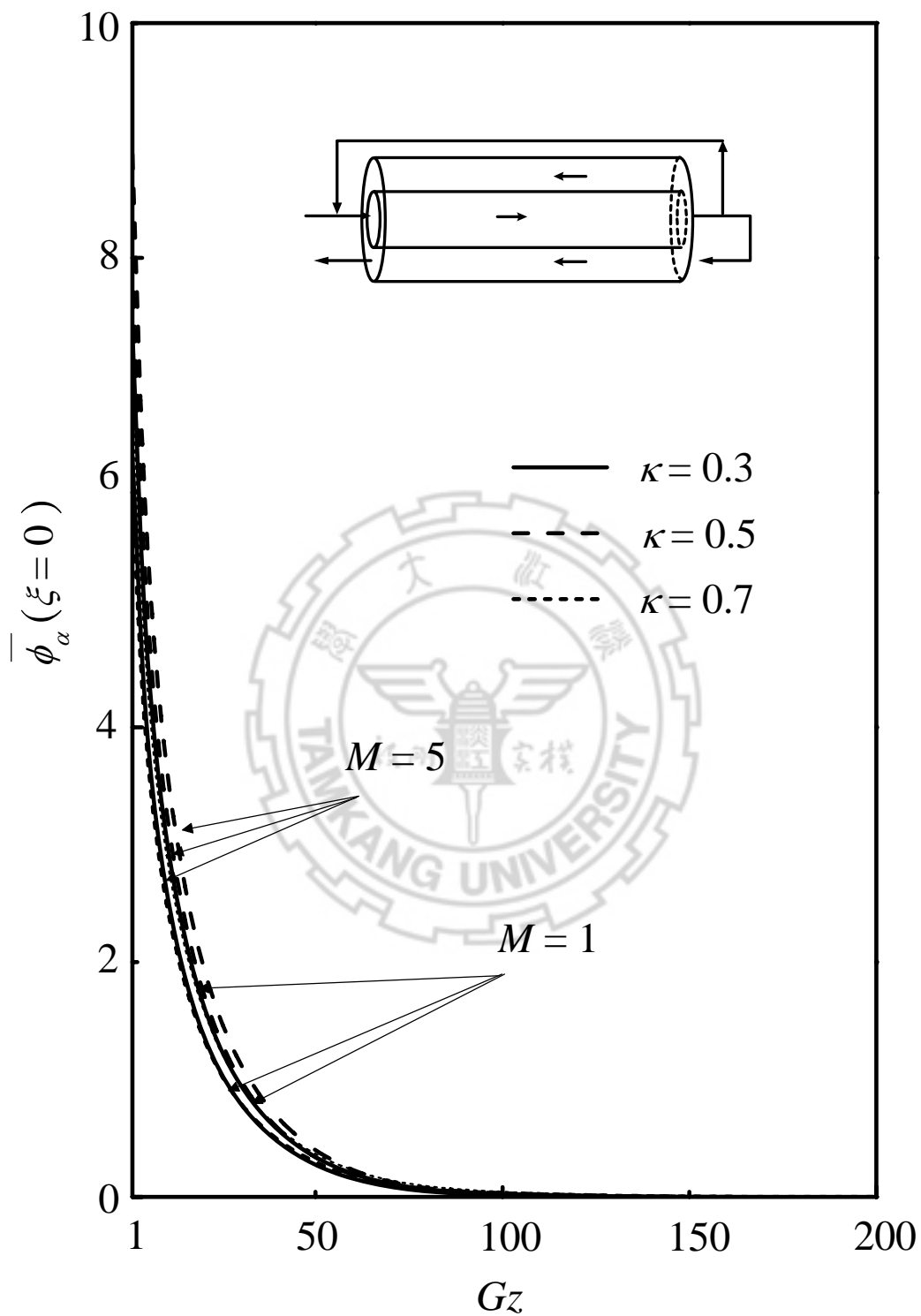
此迴流系統在進料改為外層套管，混合後無因次入口溫度與內管進外管出相較之下變化更小，當 $M = 5$ ，入口混合溫度對隔板位置的變化無明顯改變，如圖(4.4-8)所示。由結果顯示，迴流比值越大，入口混合溫度越高，所以此迴流系統預混效可能比流速增加而使熱傳係數增大來的重要。

至於無因次管壁溫度部分，如圖(4.4-9)和圖(4.4-10)所示，外層套管同時接受管壁熱通量及隔板間的熱傳導，故溫度隨著 $Gz\xi$ 增加而升高。而與單行程系統做比較的話，由圖(4.4-9)可知在 $Gz = 10$ 時，管壁溫度略高於單行程系統溫度，但在 $Gz = 100$ 時，管壁溫度明顯低於單

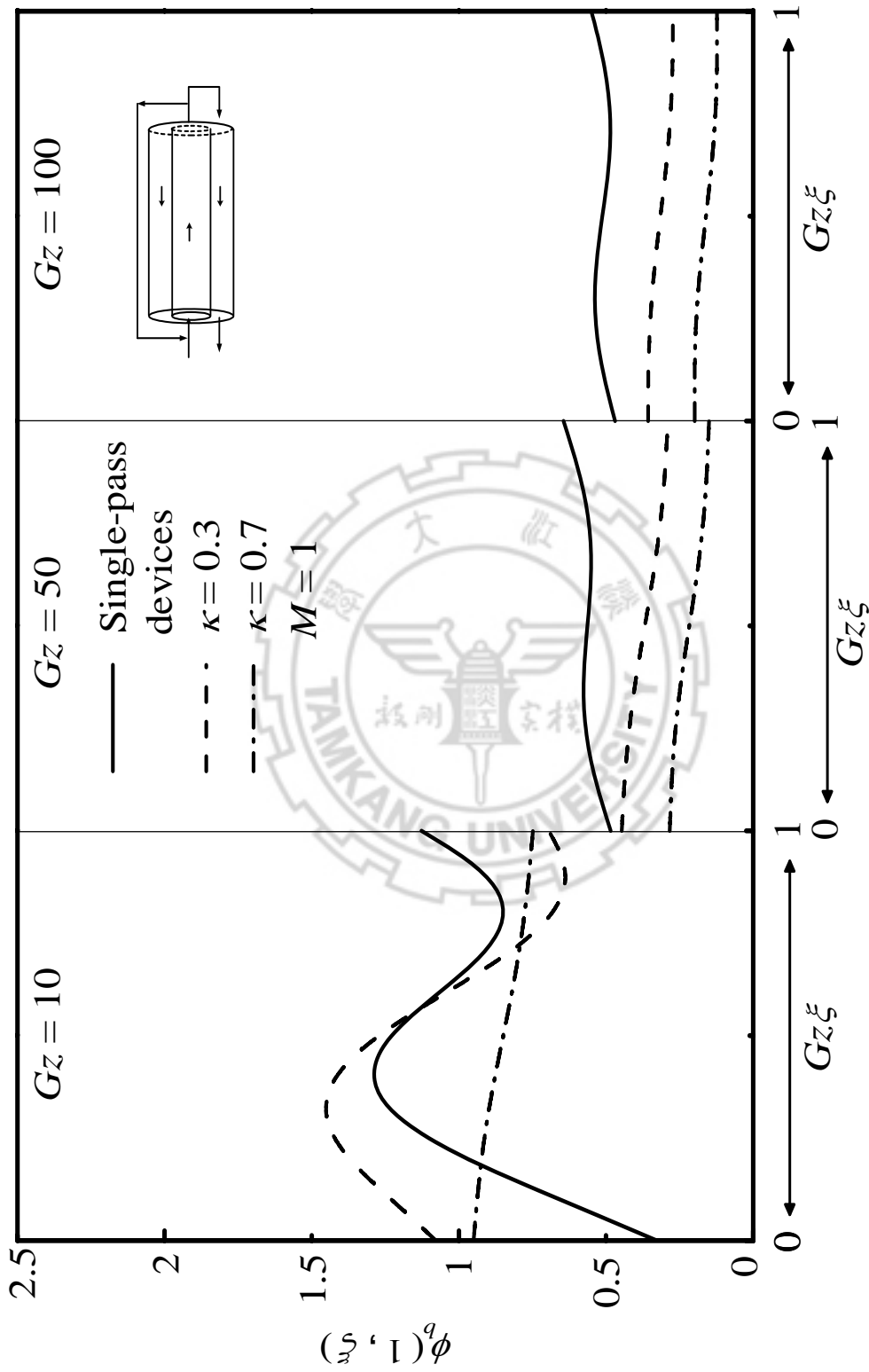
行程系統。所以隨著格拉茲數增加或隔板位置越接近外管，無因次管壁溫度會降低。

圖(4.4-11)以納塞數對軸向位置做圖，可發現當隔板位置 κ 越大或格拉茲數增加時，其納塞數震盪情形會越大。

圖(4.4-12)以平均納塞數對格拉茲數作圖，並以單行程無隔板系統為比較基準。當格拉茲數越大的情況下，相較於單行程系統其熱傳效率提升均有顯著的改善，且熱傳效率隨著隔板位置變大及迴流比變小而升高，將此迴流型式系統與單行程系統對作比較，如圖(4.4-14)及表(二十八)所示，在不同隔板位置 κ 及迴流比，在 $Gz > 30$ 效率增加百分比皆為正；圖(4.4-13)以平均納塞數對隔板位置作圖，可發現當隔板位置 κ 越大，則平均納塞數越高，且隨著格拉茲數增加趨勢越明顯。

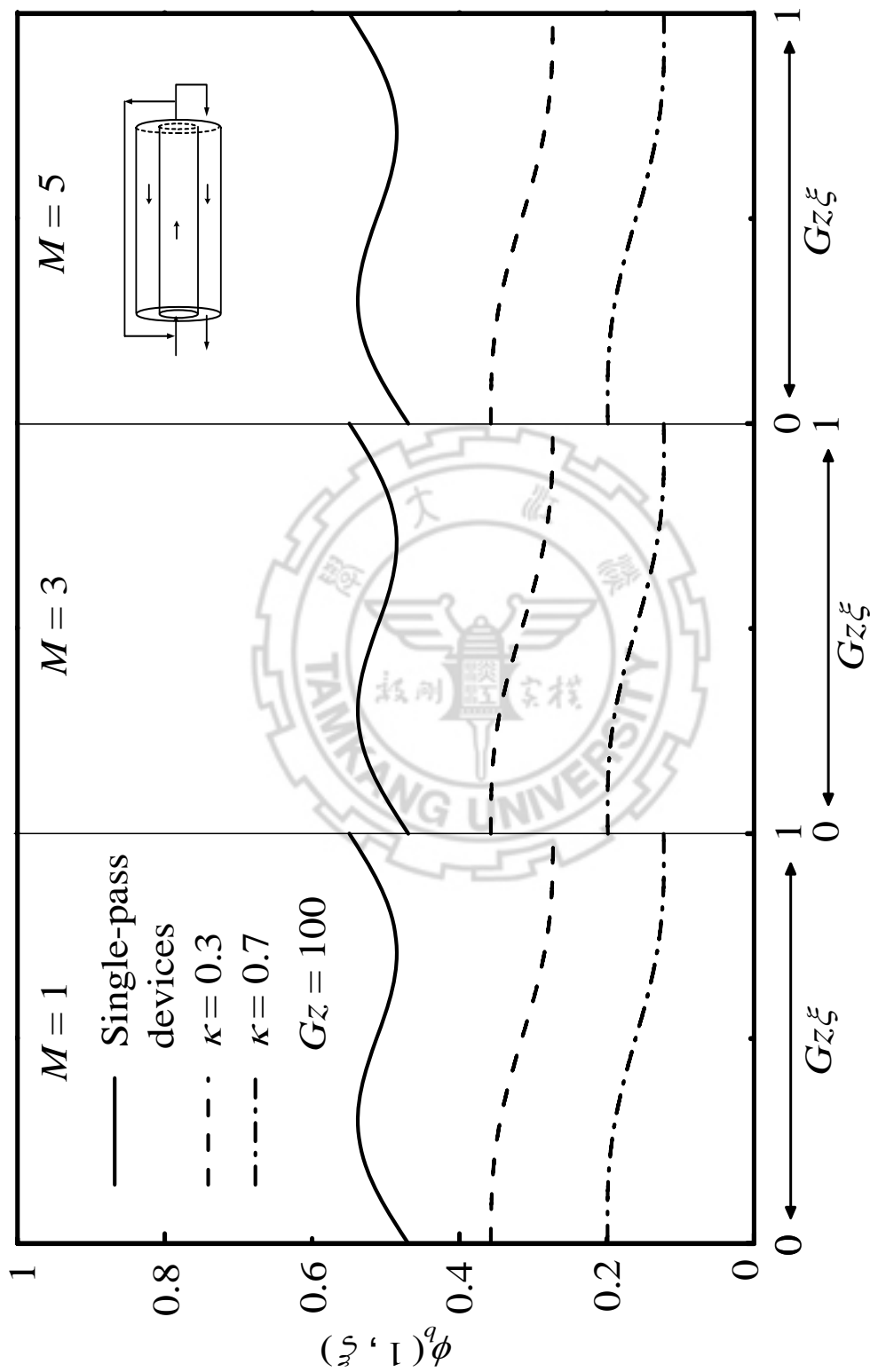


圖(4.4-1) 末端迴流至入口內管進外管出模型，格拉茲數與迴流混合溫度於不同迴流比及隔板位置之關係。

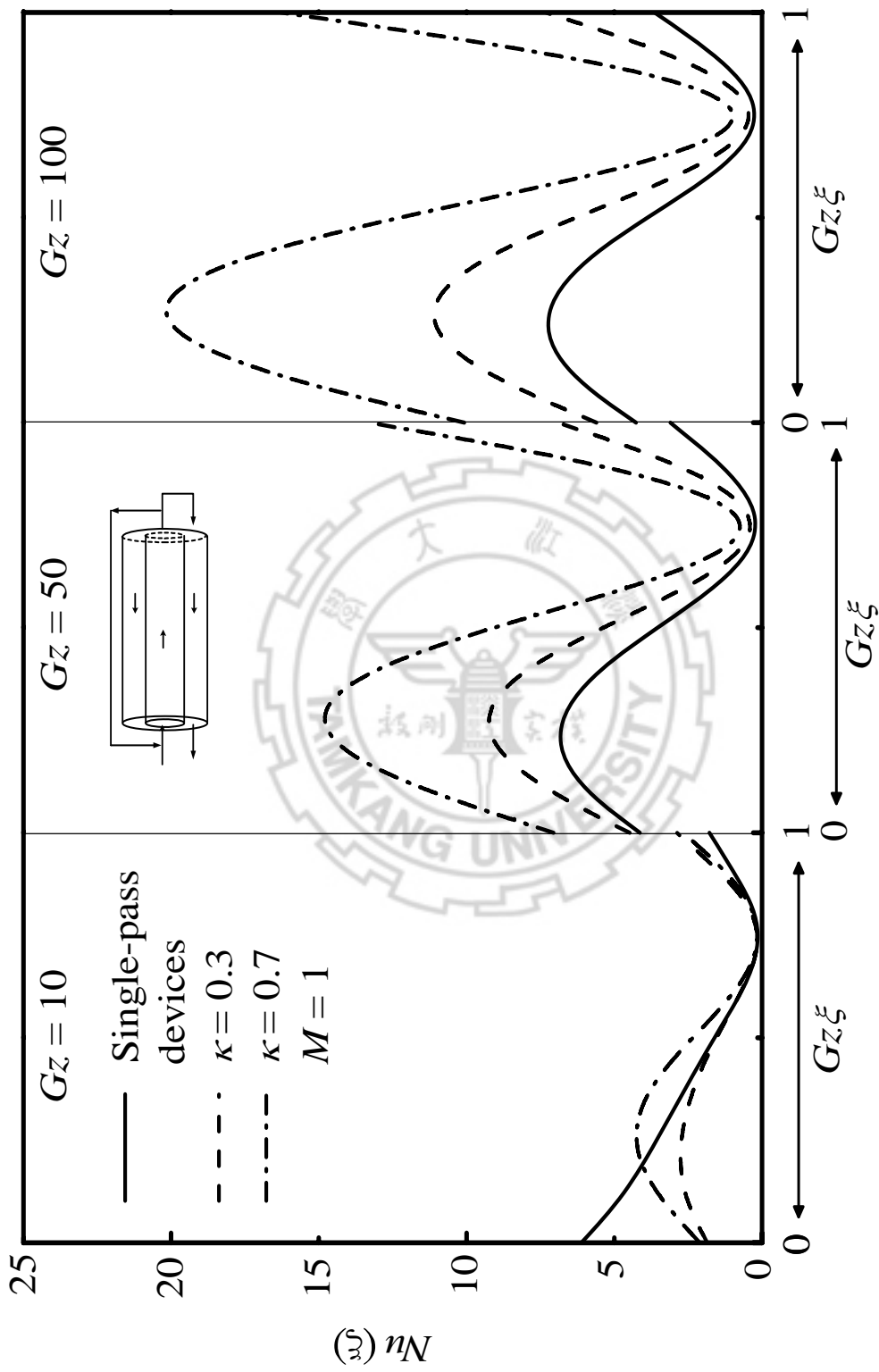


圖(4.4-2) 末端迴流至入口內管進外管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同格

拉茲數及隔板位置之關係。

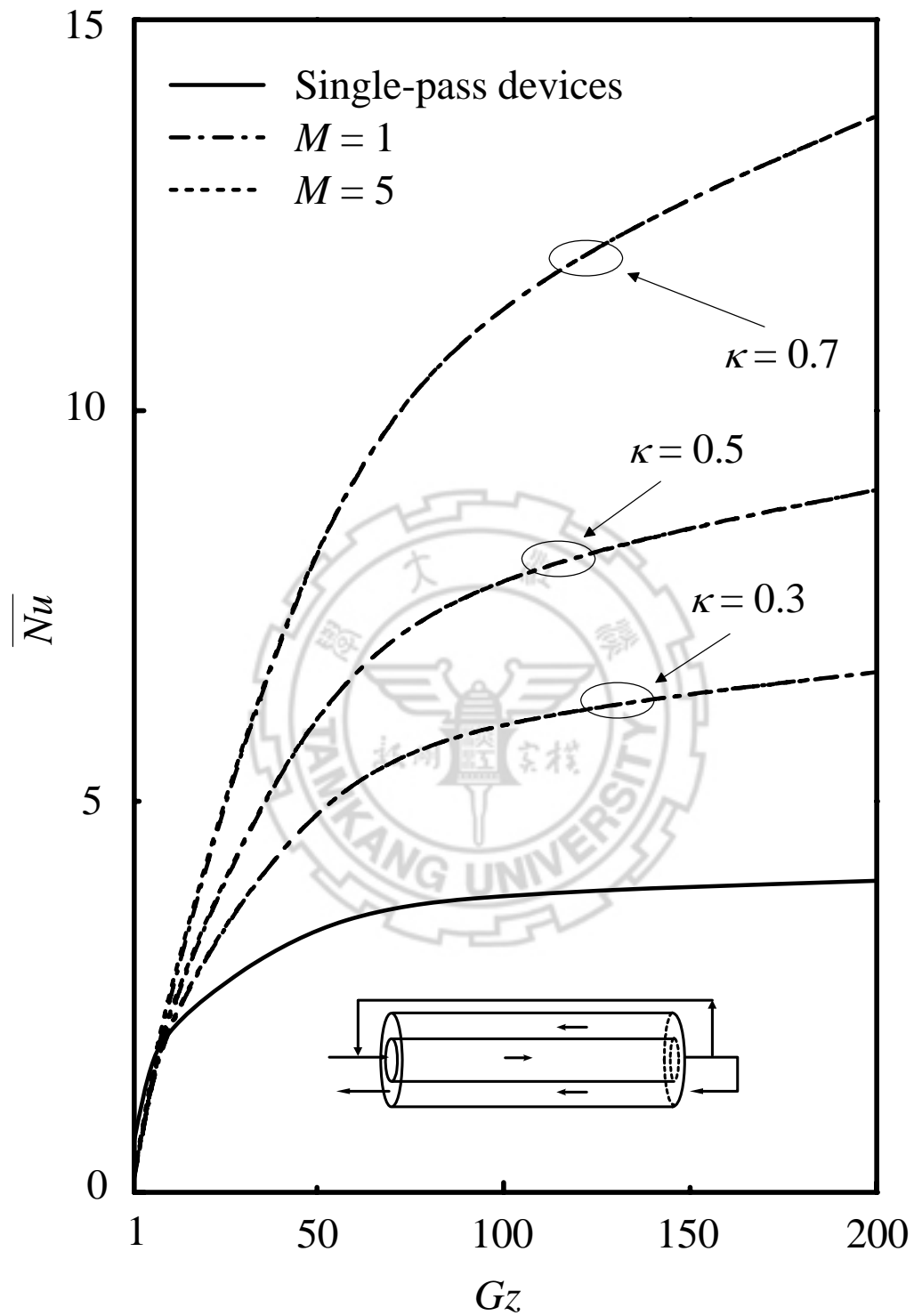


圖(4.4-3) 末端迴流至入口內管進外管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同迴流比及隔板位置之關係。

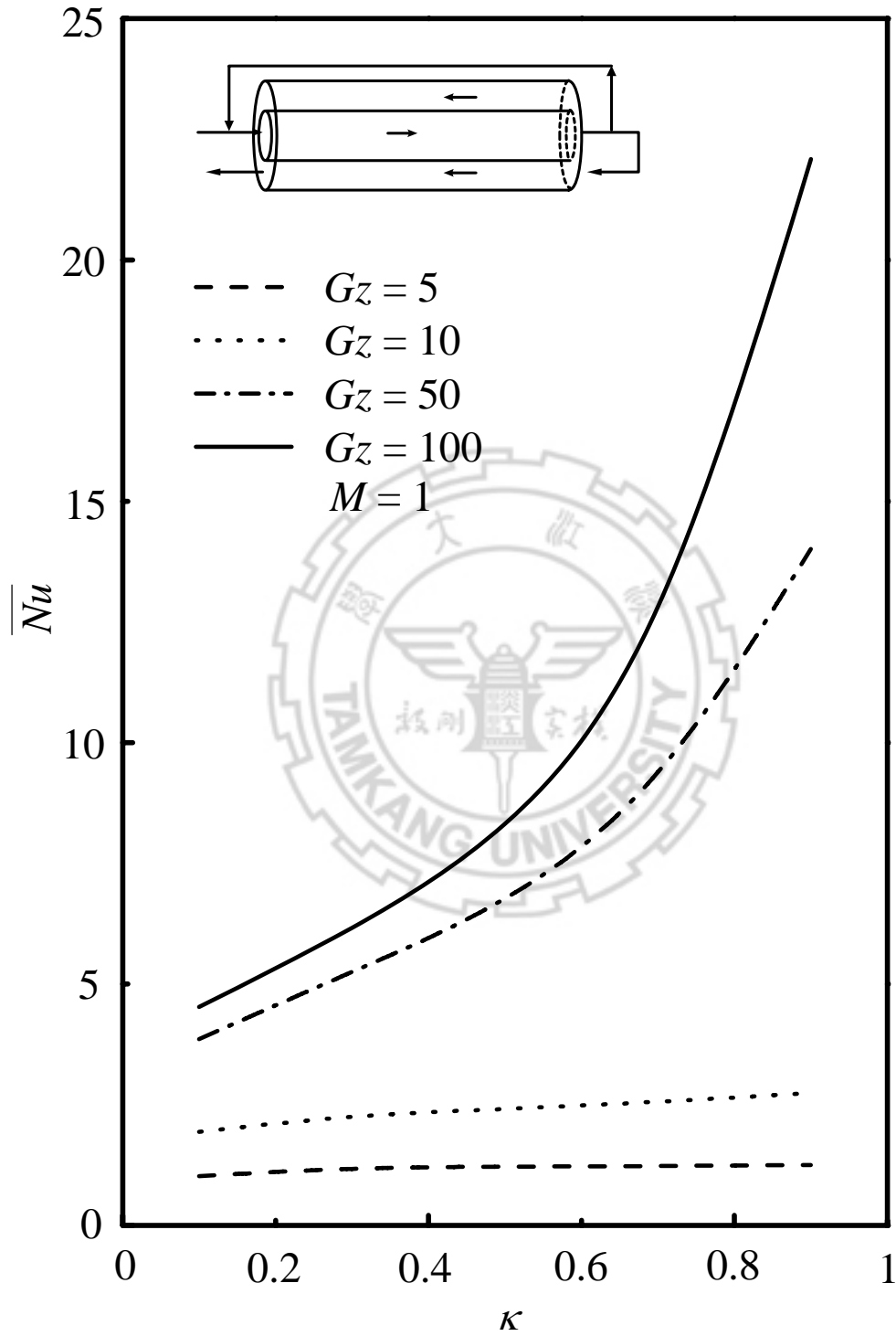


圖(4.4-4) 末端迴流至入口內管進外管出模型，軸向位置與納塞數於不同格拉

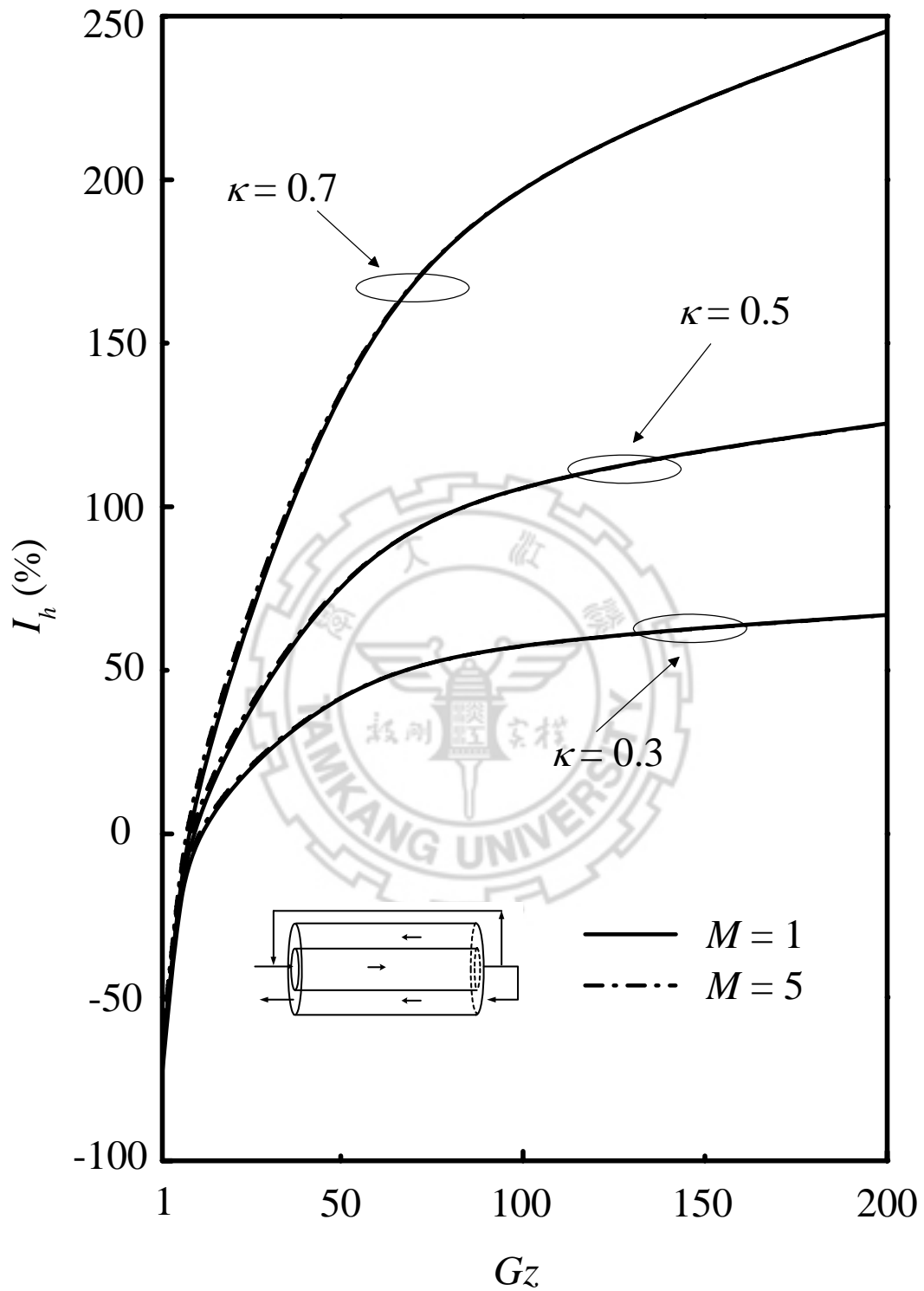
茲數及隔板位置之關係。



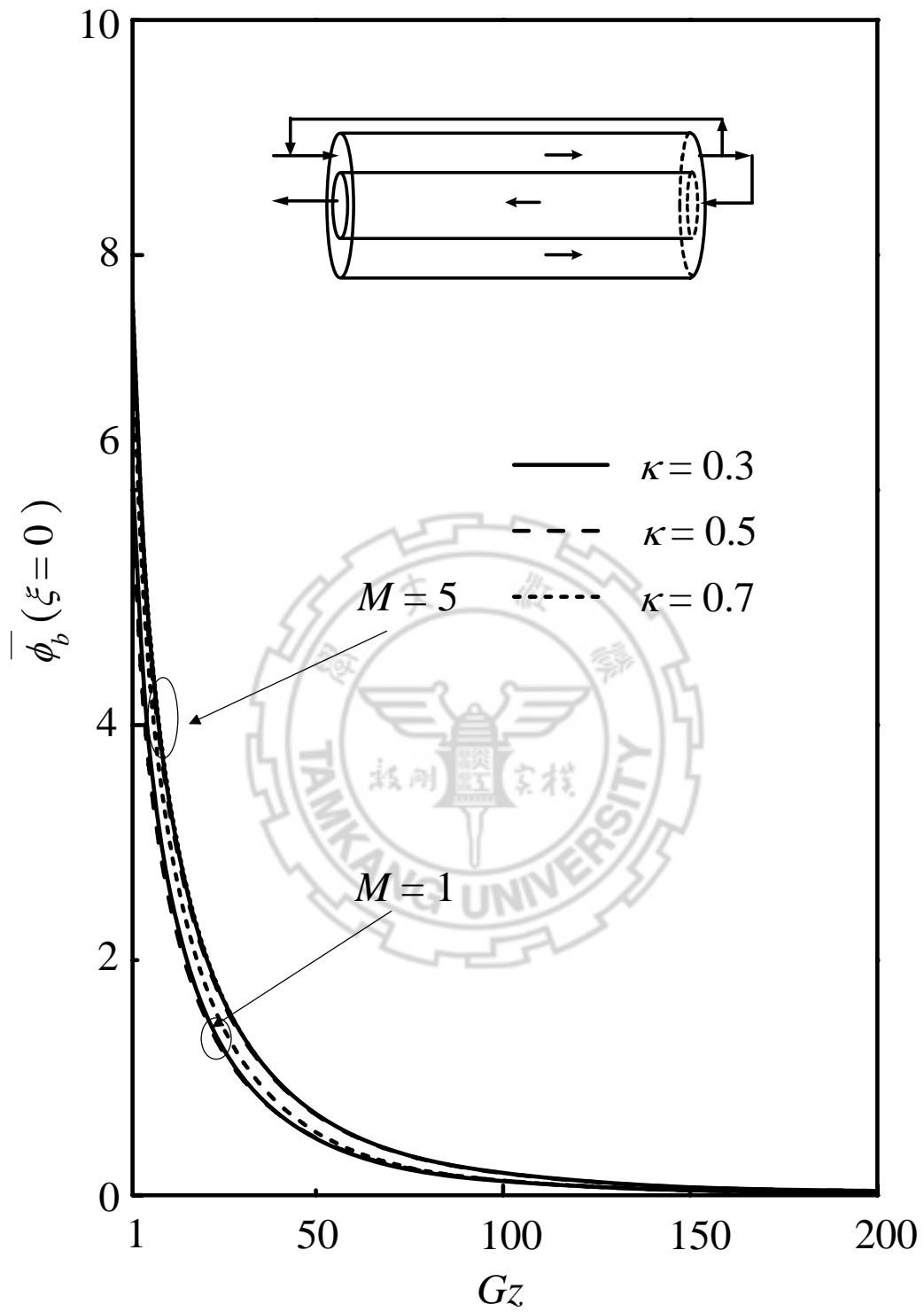
圖(4.4-5) 末端迴流至入口內管進外管出模型，格拉茲數與平均納塞數於不同迴流比及隔板位置之關係。



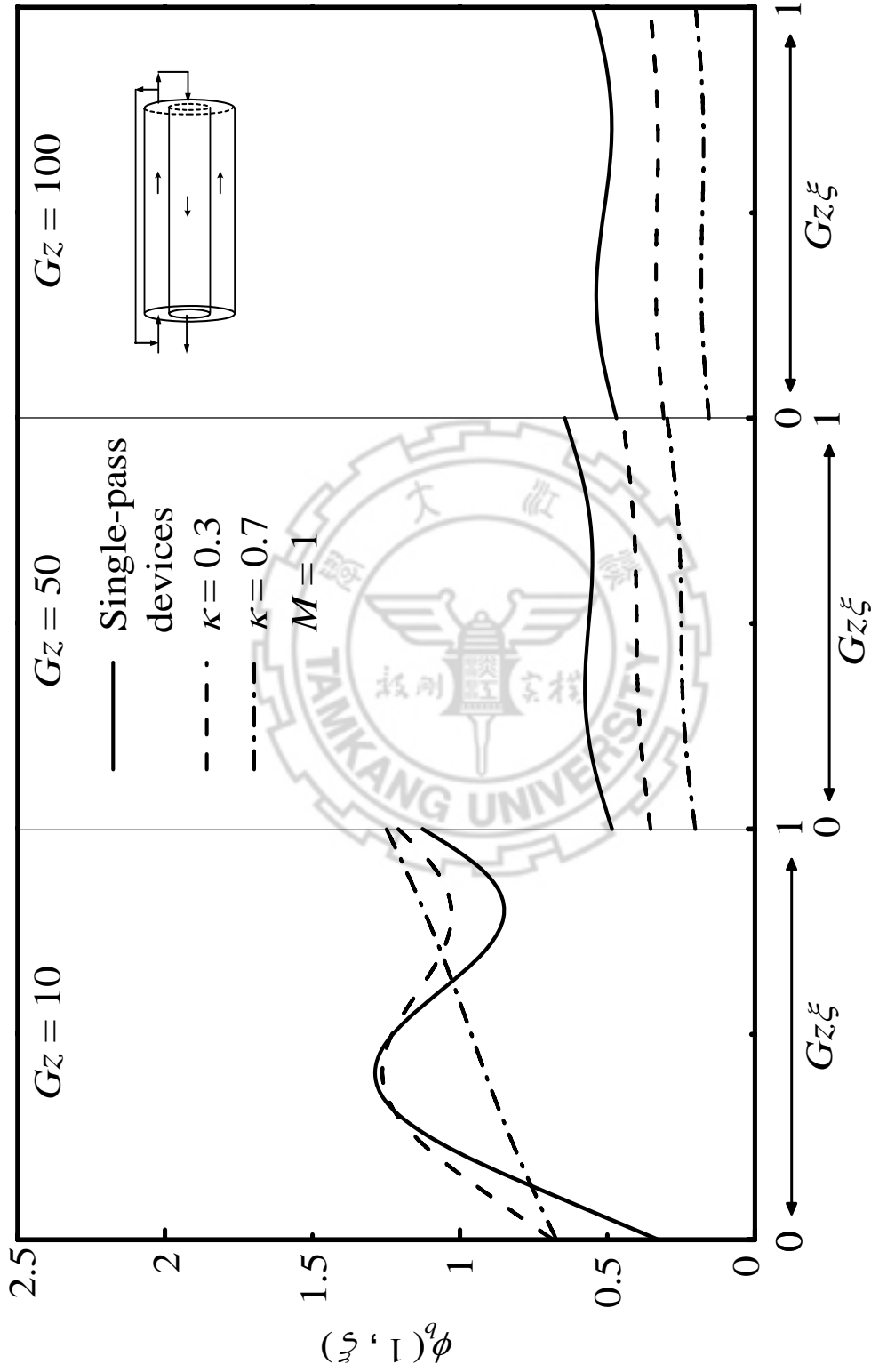
圖(4.4-6) 末端迴流至入口內管進外管出模型，隔板位置與平均納塞數於不同格拉茲數之關係。



圖(4.4-7) 末端迴流至入口內管進外管出模型，格拉茲數與熱傳效率百分比於不同迴流比及隔板位置之關係。

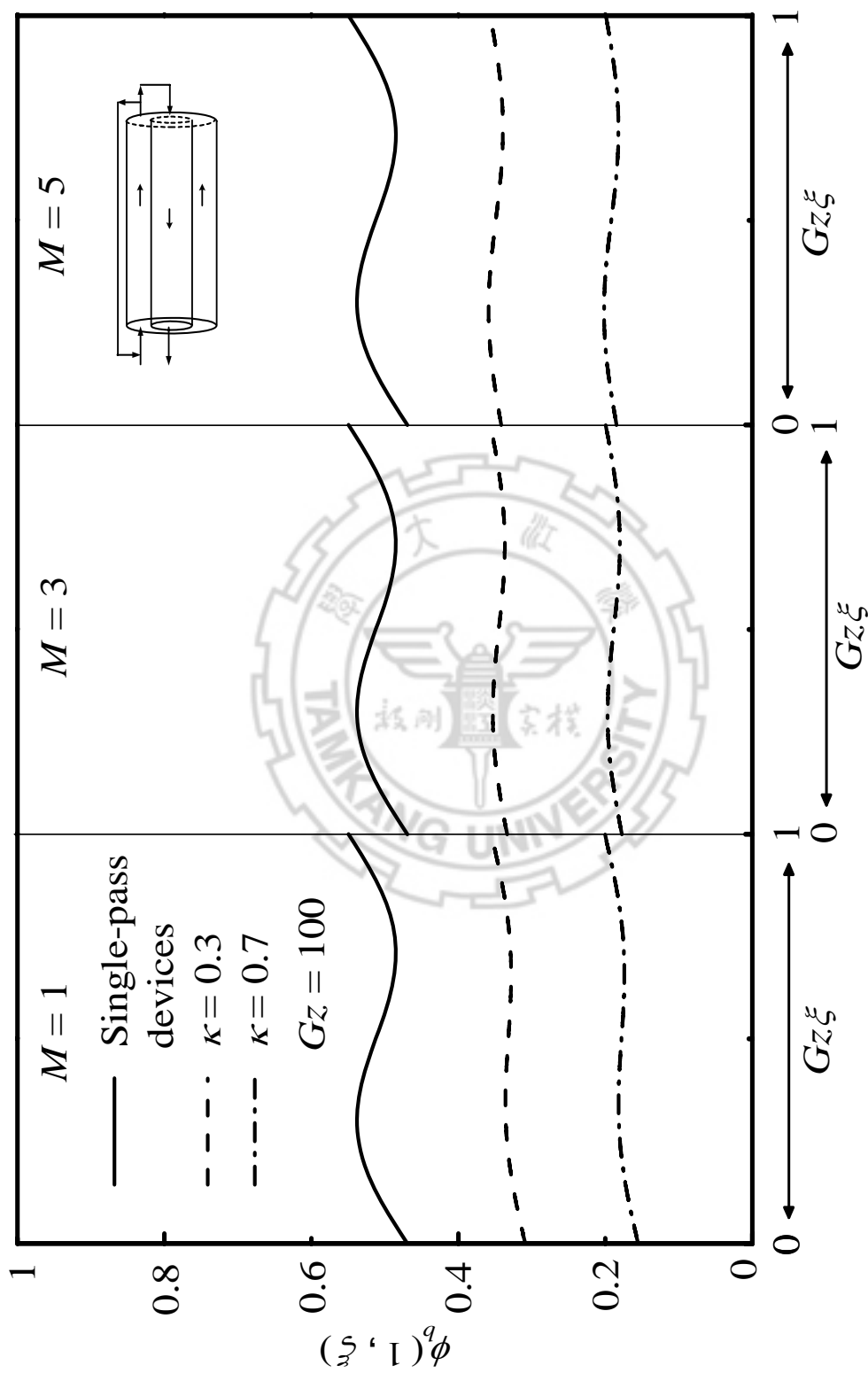


圖(4.4-8) 末端迴流至入口外管進內管出模型，格拉茲數與迴流混合溫度於不同迴流比及隔板位置之關係。



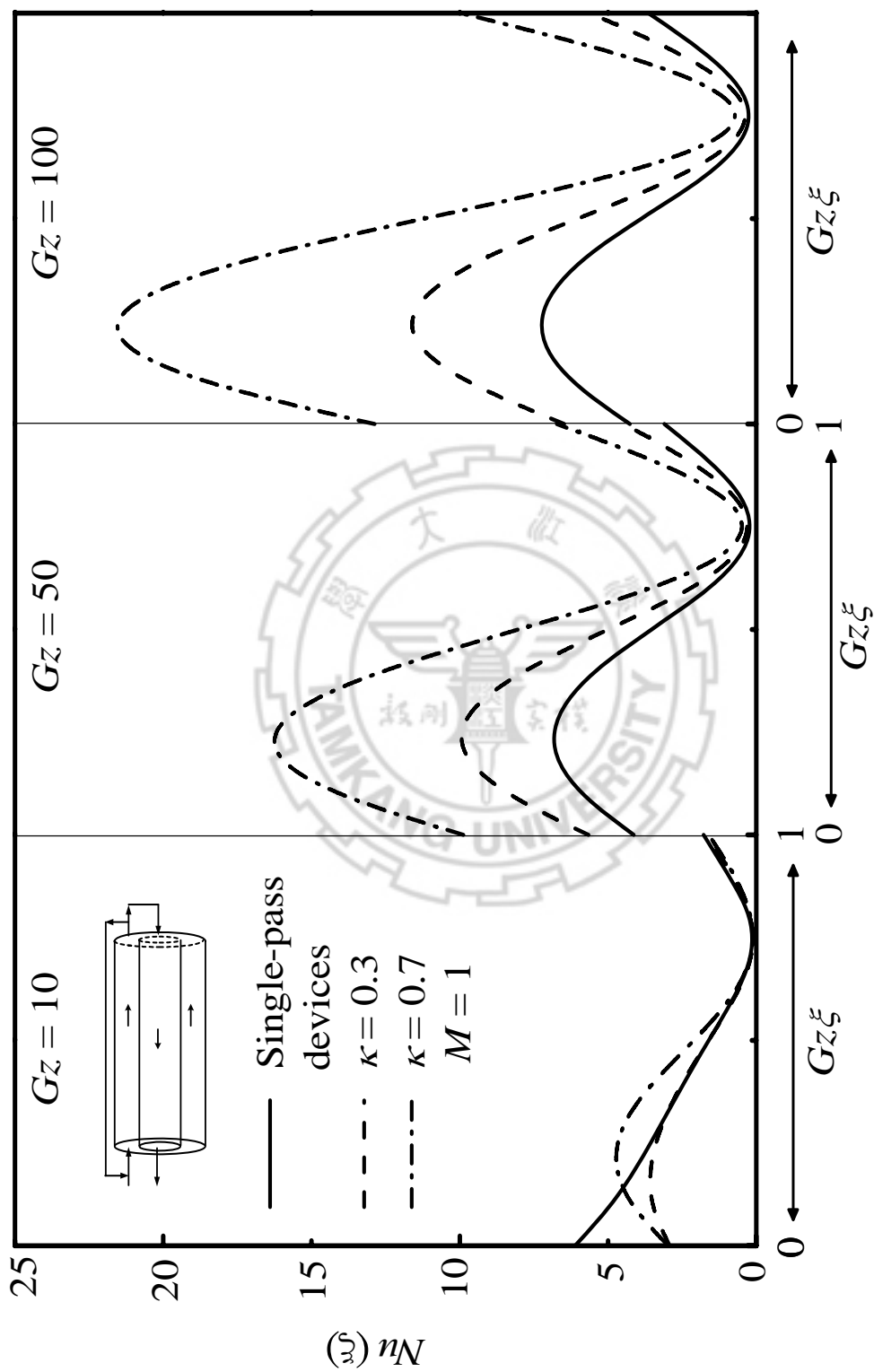
圖(4.4-9) 末端迴流至入口外管進內管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同格

拉茲數及隔板位置之關係。



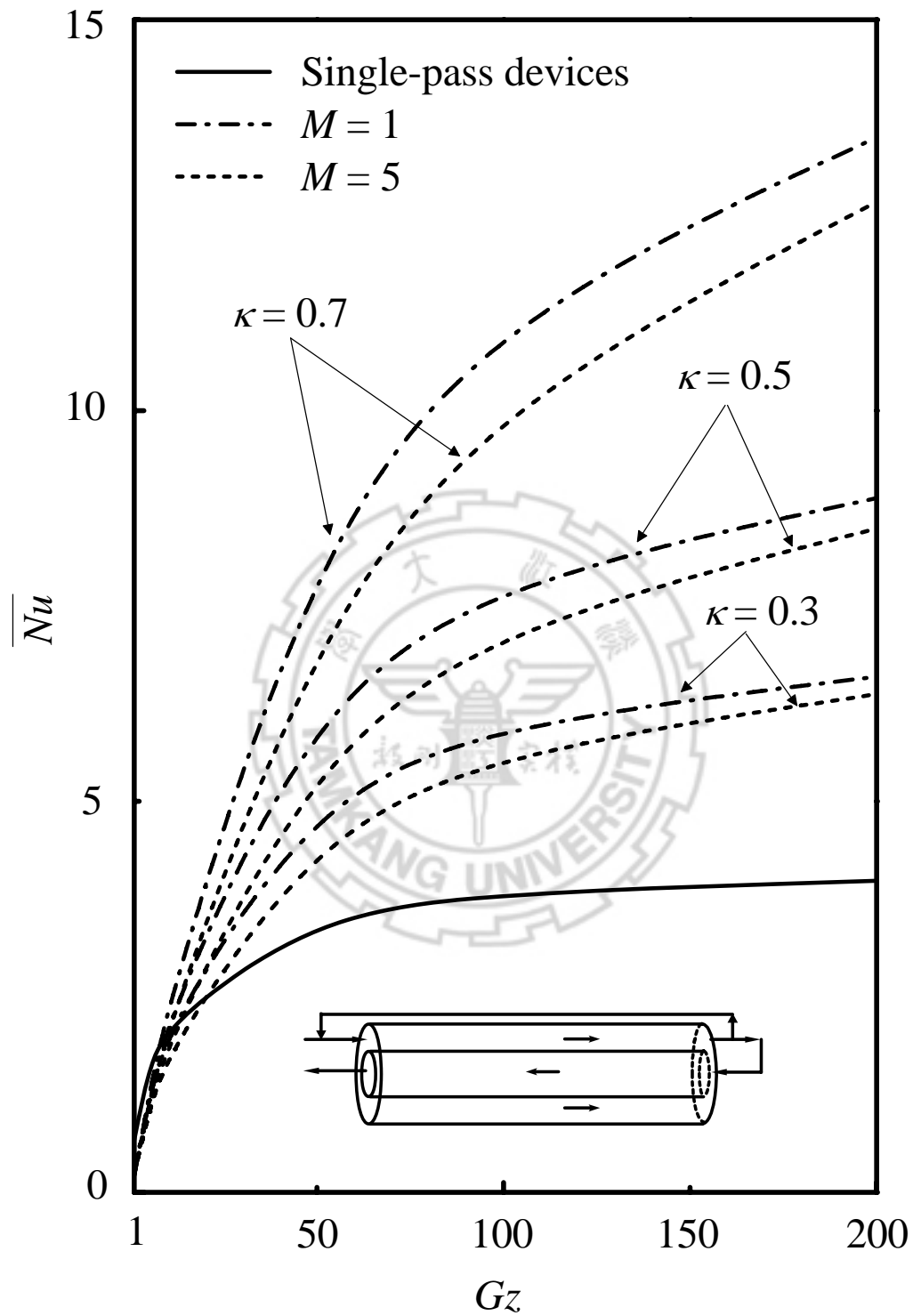
圖(4.4-10) 末端迴流至入口外管進內管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同迴

流比及隔板位置之關係。

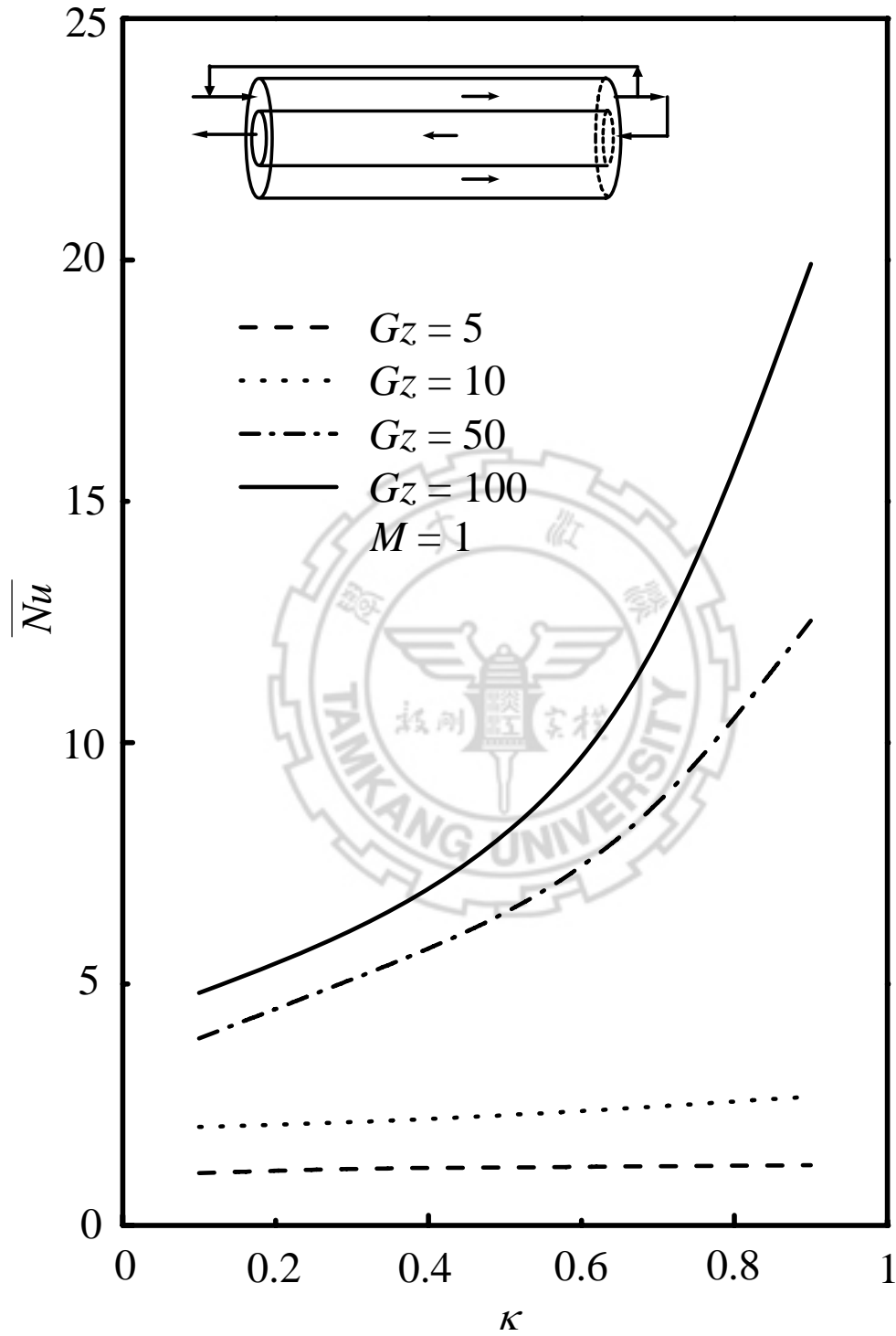


圖(4.4-11) 末端迴流至入口外管進內管出模型，軸向位置與納塞數於不同格拉

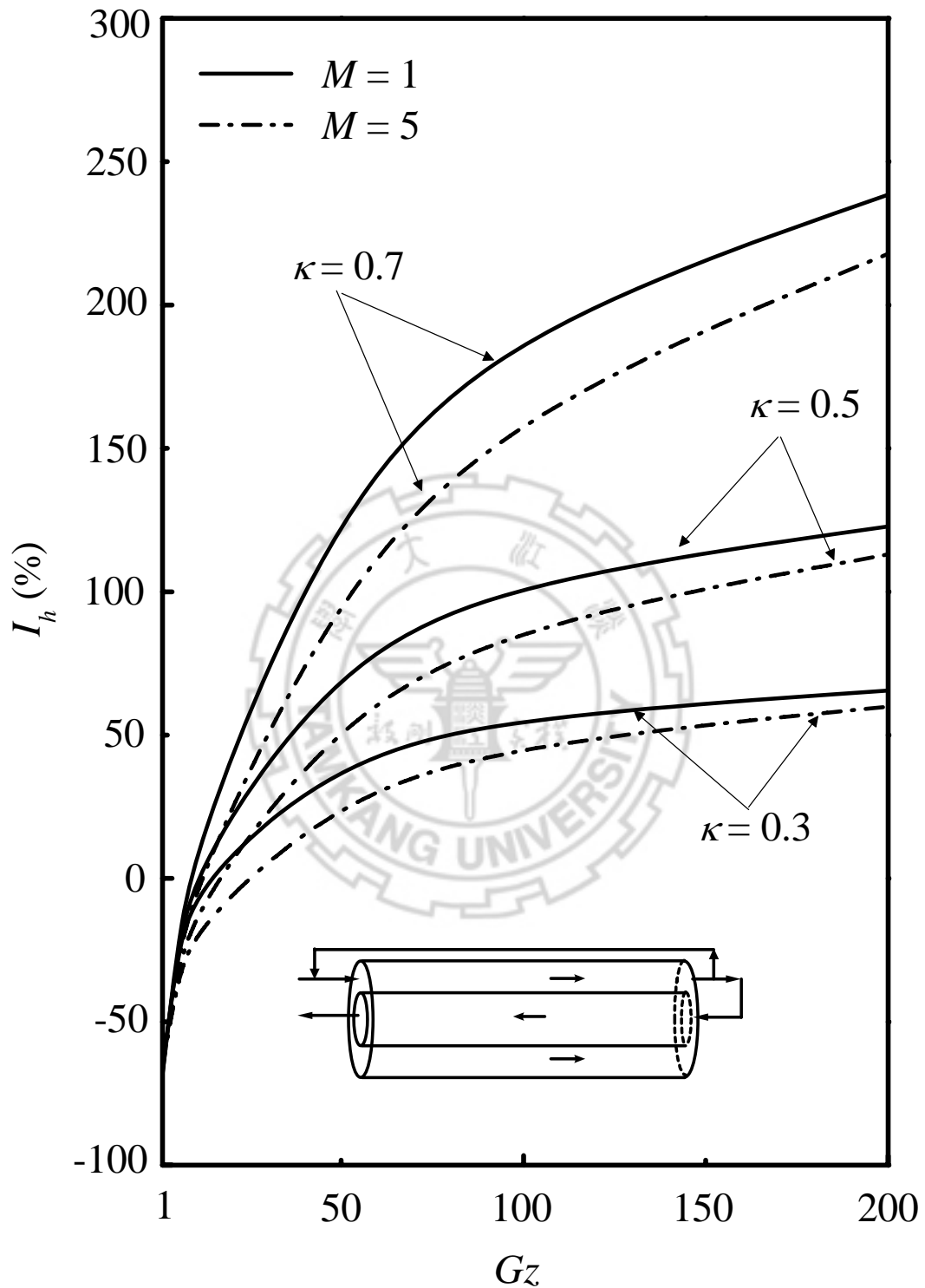
茲數及隔板位置之關係。



圖(4.4-12) 末端迴流至入口外管進內管出模型，格拉茲數與平均納塞數於不同迴流比及隔板位置之關係。



圖(4.4-13) 末端迴流至入口外管進內管出模型，隔板位置與平均納塞數於不同格拉茲數之關係。



圖(4.4-14) 末端迴流至入口外管進內管出模型，格拉茲數與熱傳效率百分比於不同迴流比及隔板位置之關係。

表(二十七) 末端迴流至入口內管進外管出以迴流比值及隔板位置為

參數之熱傳效率增加百分比

I_h (%)	$M = 1$			$M = 5$		
	κ			κ		
Gz	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7
1	-72.94	-68.64	-68.46	-69.56	-63.93	-63.34
10	5.48	11.08	17.97	6.78	13.66	22.18
100	59.35	109.47	205.00	59.27	109.37	204.97
200	66.92	125.48	245.49	66.87	125.41	245.42

表(二十八) 末端迴流至入口外管進內管出以迴流比值及隔板位置為

參數之熱傳效率增加百分比

I_h (%)	$M = 1$			$M = 5$		
	κ			κ		
Gz	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7
1	-66.34	-67.99	-68.43	-65.69	-65.43	-65.07
10	-1.50	5.11	13.57	-16.24	-9.53	-0.94
100	56.68	104.62	193.95	47.35	89.51	165.47
200	65.50	122.75	238.53	59.89	113.01	217.84

4.5 內外等體積流動模型之結果討論

(A) 內管入外管出

雙套管內外等體積流動之系統中，流體於出口處以體積流量 MV 迴流至入口處，所以，內外管的體積流率均為 $(M+1)V$ ，當流體為內管進外管出時，迴流至入口的流體可產生預混效應及增加流速，如圖(4.5-1)所示，入口混合溫度隨著迴流比值增加而升高，且在固定迴流比值及格拉茲數時，改變隔板位置並不會影響入口混合溫度的變化。

至於管壁溫度部分，如圖(4.5-2)和圖(4.5-3)所示，溫度隨著 $Gz\xi$ 減少而升高。而與單行程系統做比較的話，由圖(4.5-2)可知在 $Gz=10$ 時，平均管壁溫度與單行程系統溫度差不多，但在 $Gz=100$ 時，管壁溫度明顯低於單行程系統，由以上結果顯示，隨著格拉茲數增加或隔板位置越接近外管，無因次管壁溫度會降低。

圖(4.5-4)以納塞數對軸向位置做圖，可發現當隔板位置 κ 越接近外管或格拉茲數增加時，其納塞數震盪情形會越大。

圖(4.5-5)以平均納塞數對格拉茲數作圖，並以單行程無隔板系統為比較基準。當格拉茲數越大的情況下，相較於單行程系統其熱傳效率提升均有顯著的改善，且熱傳效率隨著隔板位置變大而升高。將此迴流型式系統與單行程系統對作比較，如圖(4.5-7)及表(二十九)所

示，在所有不同隔板位置 κ 及迴流比，在 $Gz > 30$ 效率增加百分比皆為正；圖(4.5-6)以平均納塞數對隔板位置作圖，可發現當隔板位置 κ 越接近外管，則平均納塞數越高，且隨著格拉茲數增加趨勢越明顯。

(B) 外管入內管出

此迴流系統在進料改為外層套管，外管入內管出的迴流型式與前一節一樣，只是流體流動方向相反。但是，無因次混合入口溫度所得到的結果卻是相似的，如圖(4.5-8)所示，入口混合溫度隨著迴流比值增加而升高，且在固定迴流比值及格拉茲數時，改變隔板位置並不會影響入口混合溫度的變化。

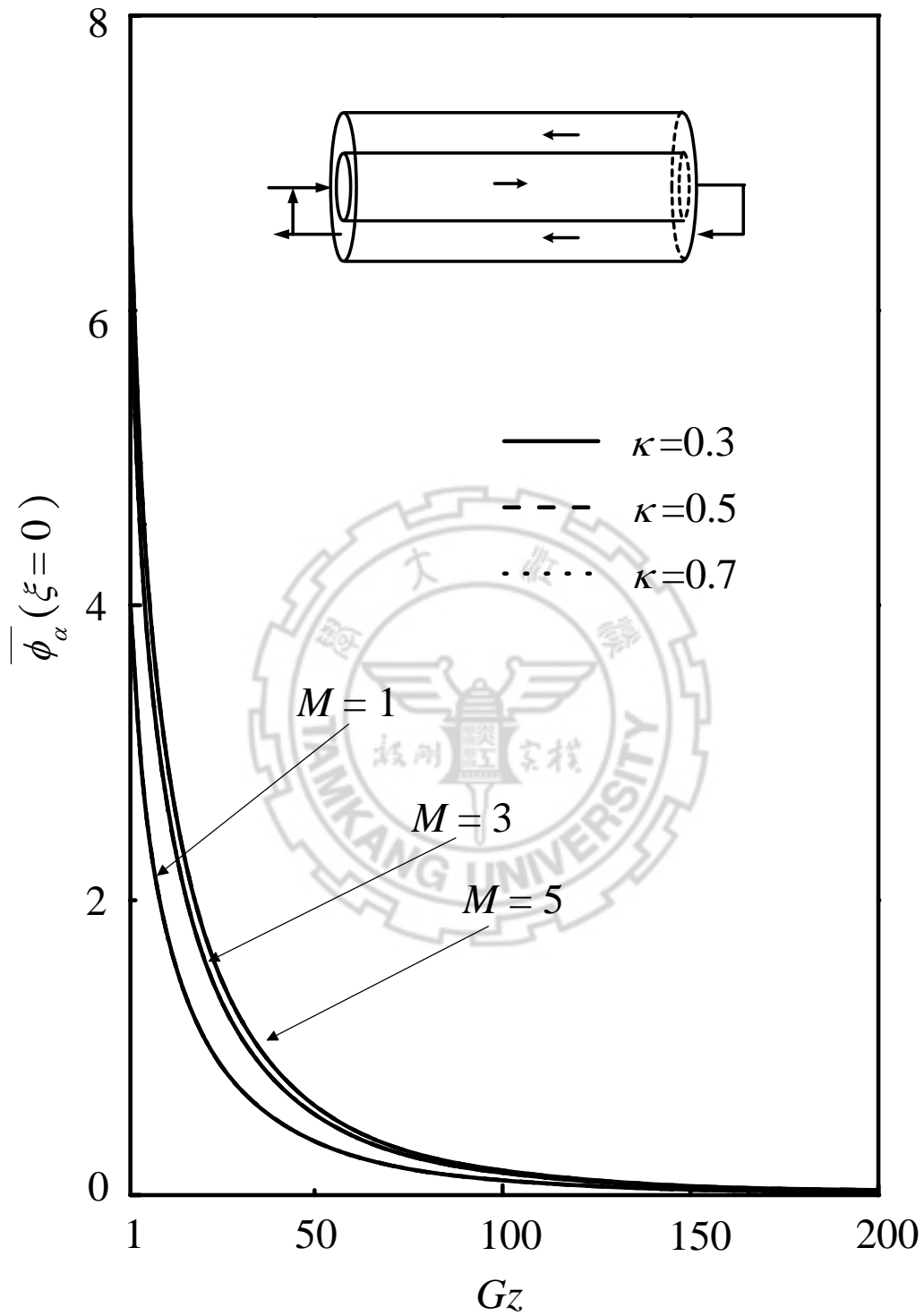
管壁溫度部分，如圖(4.5-9)和圖(4.5-10)所示，經由外層套管同時接受管壁熱通量及隔板間的熱傳導，流體溫度隨著 $Gz\xi$ 增加而升高。而與單行程系統做比較的話，由圖(4.5-9)可知在 $Gz = 10$ 時，管壁溫度略高於單行程系統溫度，但在 $Gz = 100$ 時，管壁溫度明顯低於單行程系統。隨著格拉茲數增加或隔板位置越接近外管，無因次管壁溫度會降低。

圖(4.5-11)以納塞數對軸向位置做圖，可發現當隔板位置 κ 越大或格拉茲數增加時，其納塞數震盪情形會越大。

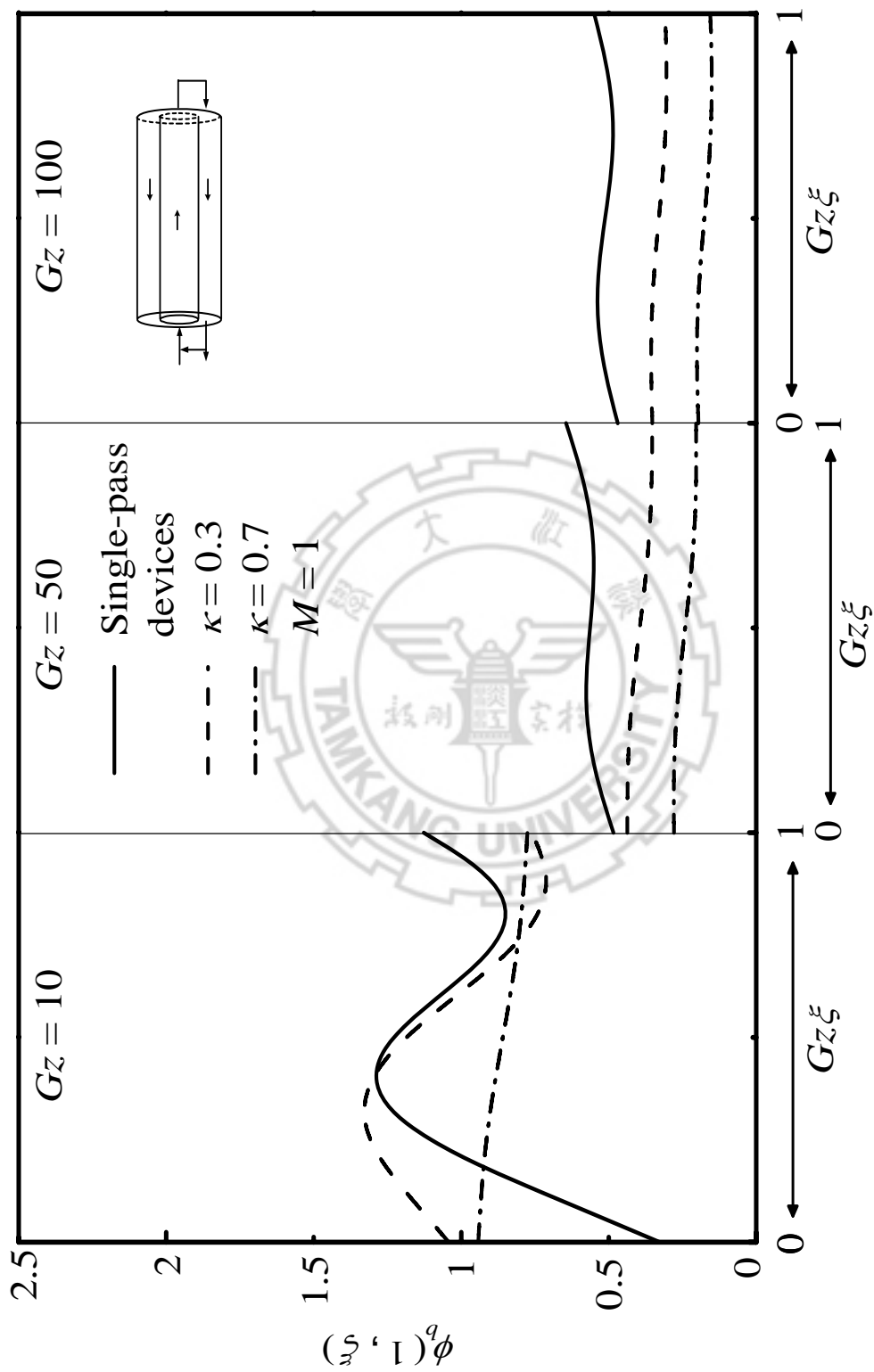
圖(4.5-12)以平均納塞數對格拉茲數作圖，並以單行程無隔板系統為比較基準。熱傳效率隨著隔板位置變接近外管及格拉茲數越大而升

高。將此迴流型式系統與單行程系統作比較，如圖(4.5-14)及表(三十)所示，在所有不同隔板位置 κ 及迴流比，在 $Gz > 30$ 效率增加百分比皆為正，熱傳效率才能有效改善；圖(4.5-13)以平均納塞數對隔板位置作圖，可發現當隔板位置 κ 越接近外管，則平均納塞數越高，且隨著格拉茲數增加趨勢越明顯。

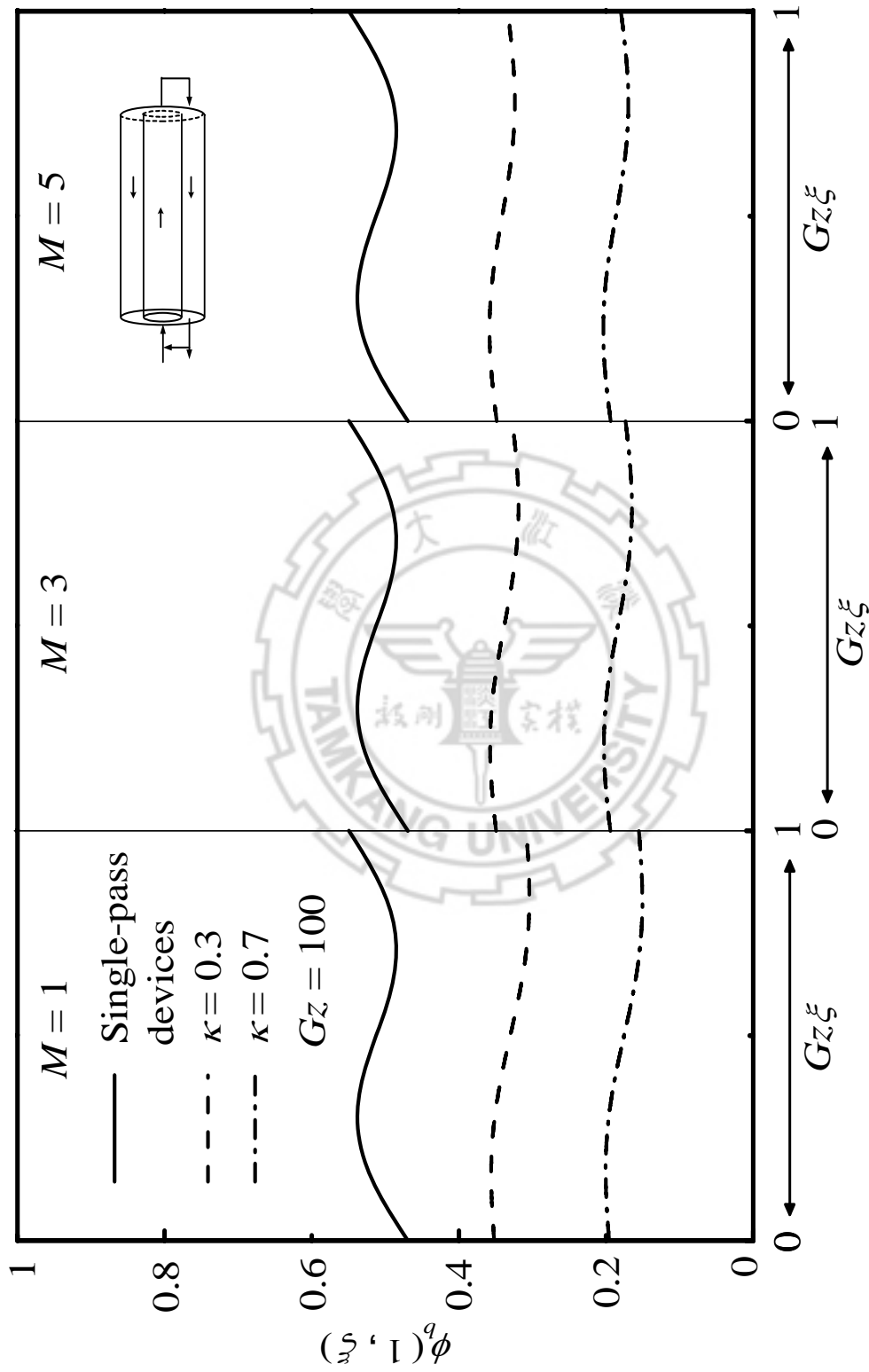




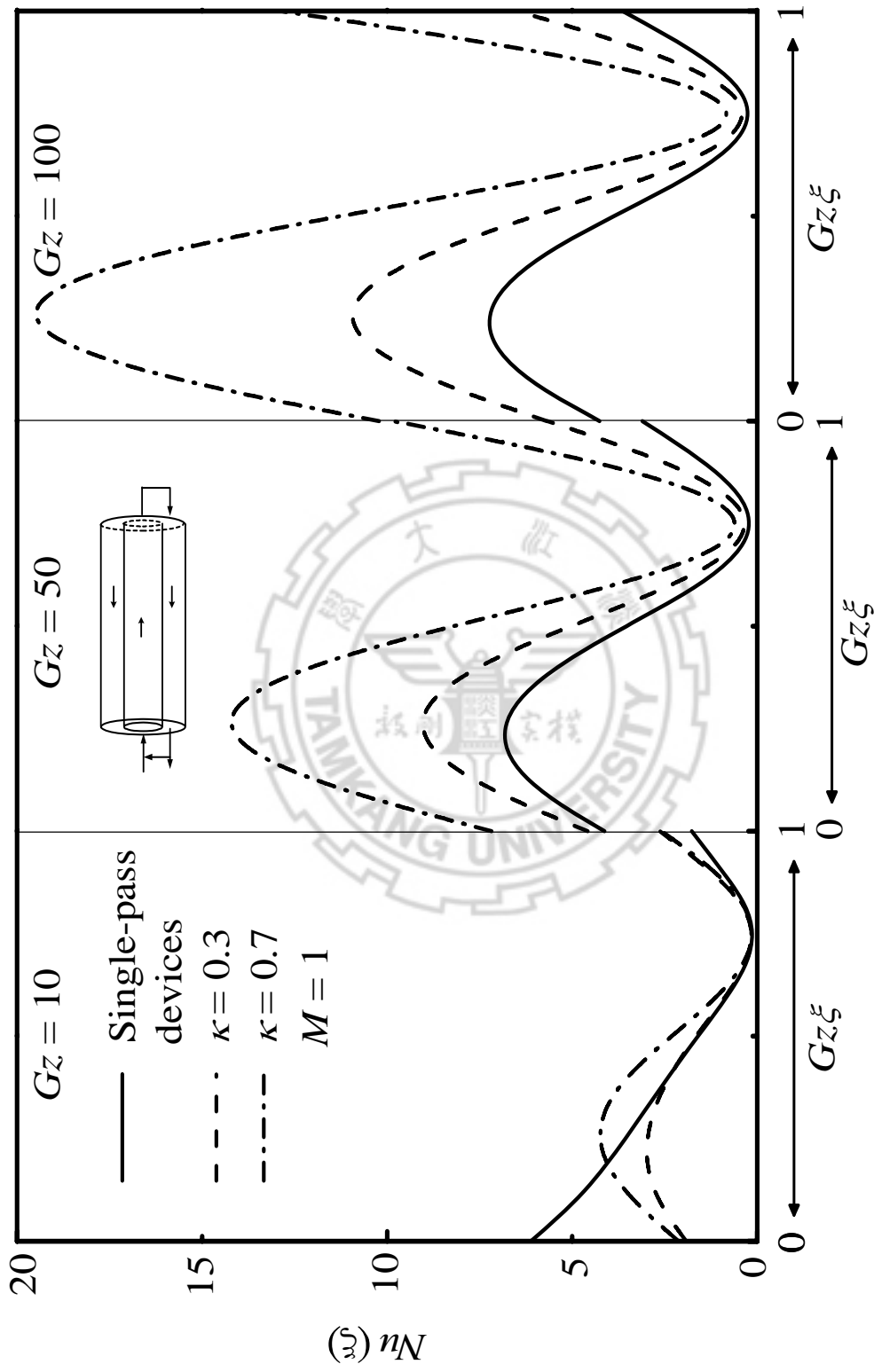
圖(4.5-1) 內外等體積內管進外管出模型，格拉茲數與迴流混合溫度於不同迴流比及隔板位置之關係。



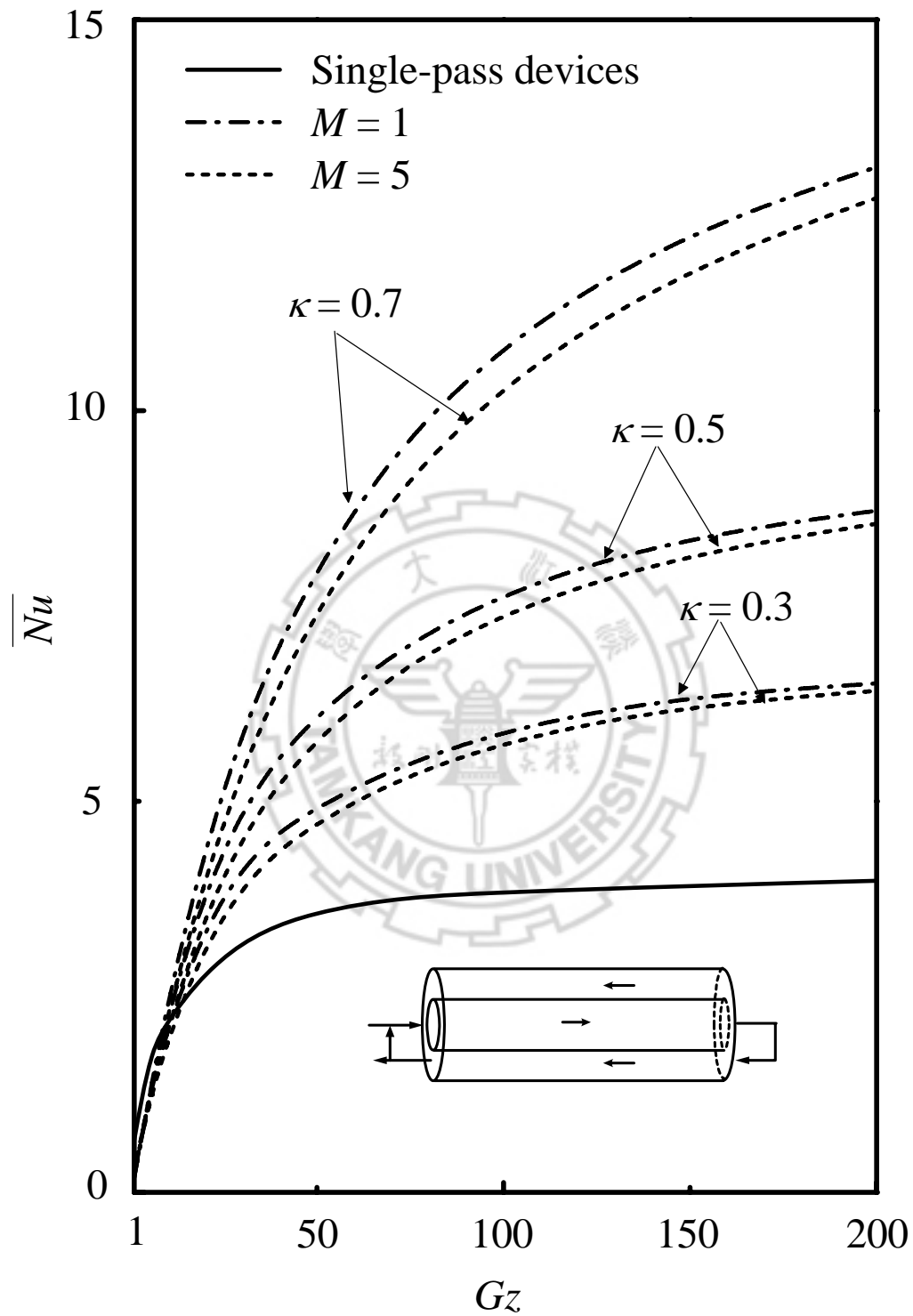
圖(4.5-2) 內外等體積內管進外管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同格拉茲數及隔板位置之關係。



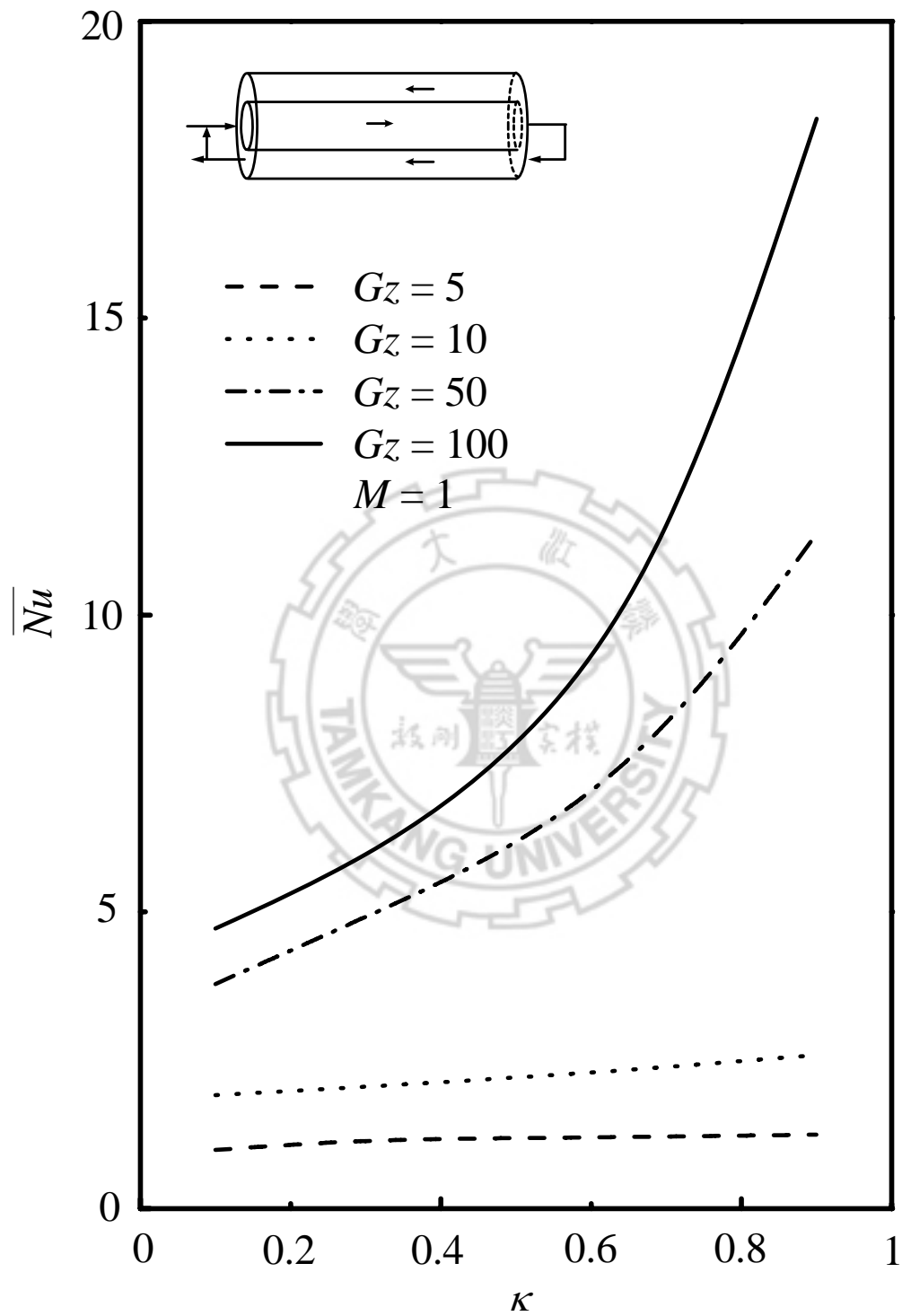
圖(4.5-3) 內外等體積內管進外管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同迴流比及隔板位置之關係。



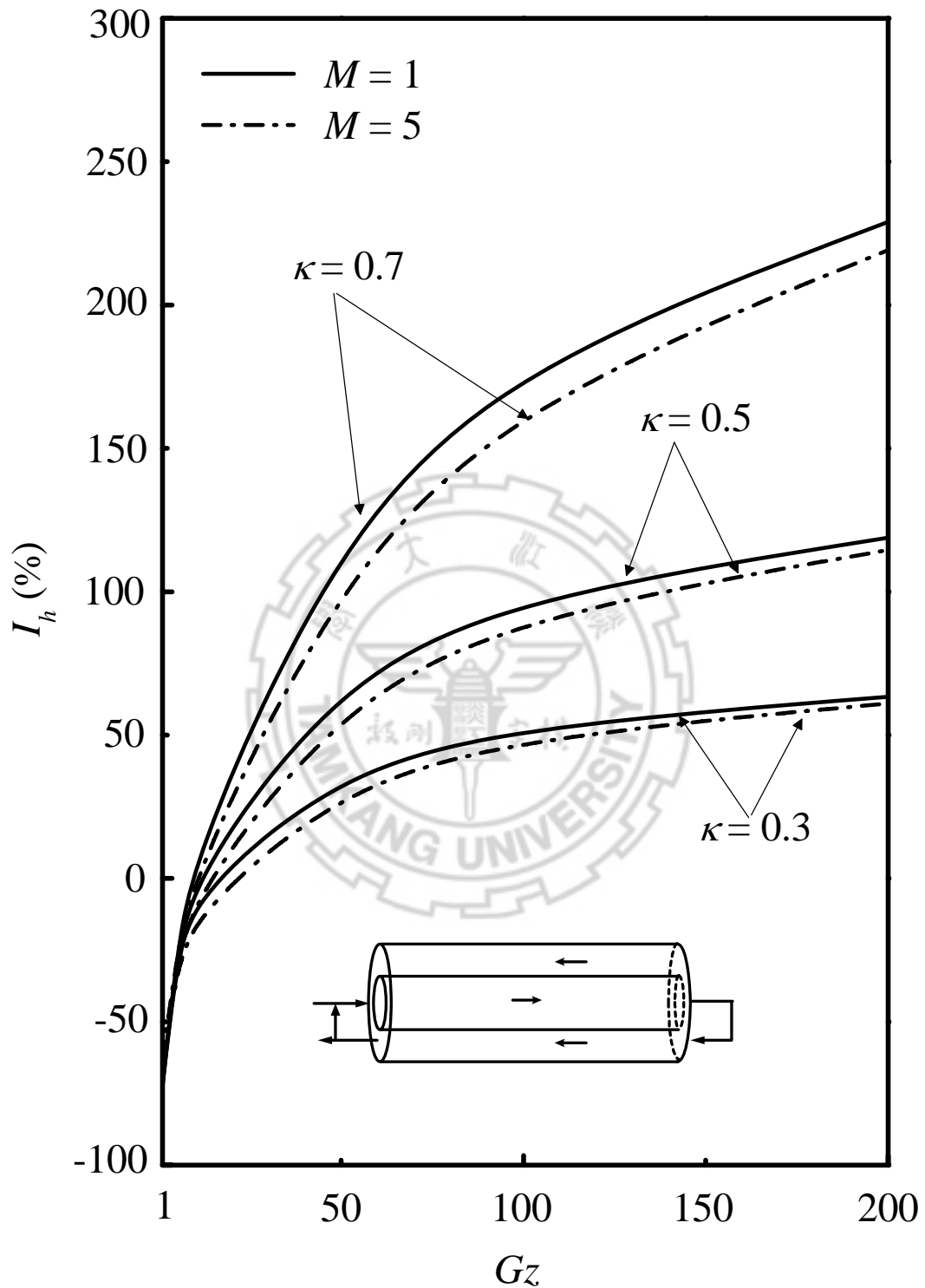
圖(4.5-4) 內外等體積內管進外管出模型，軸向位置與納塞數於不同格拉茲數及隔板位置之關係。



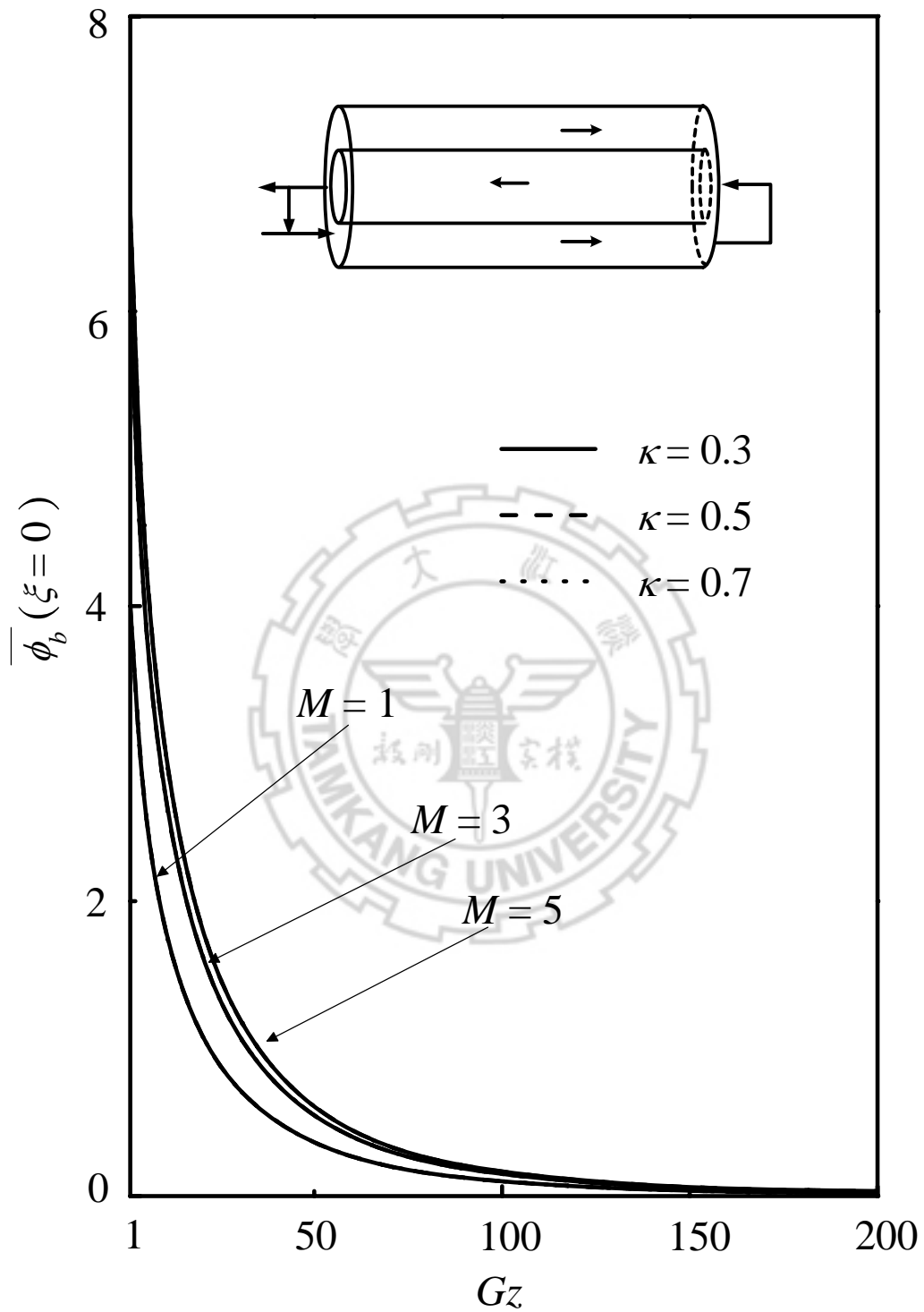
圖(4.5-5) 內外等體積內管進外管出模型，格拉茲數與平均納塞數於不同迴流比及隔板位置之關係。



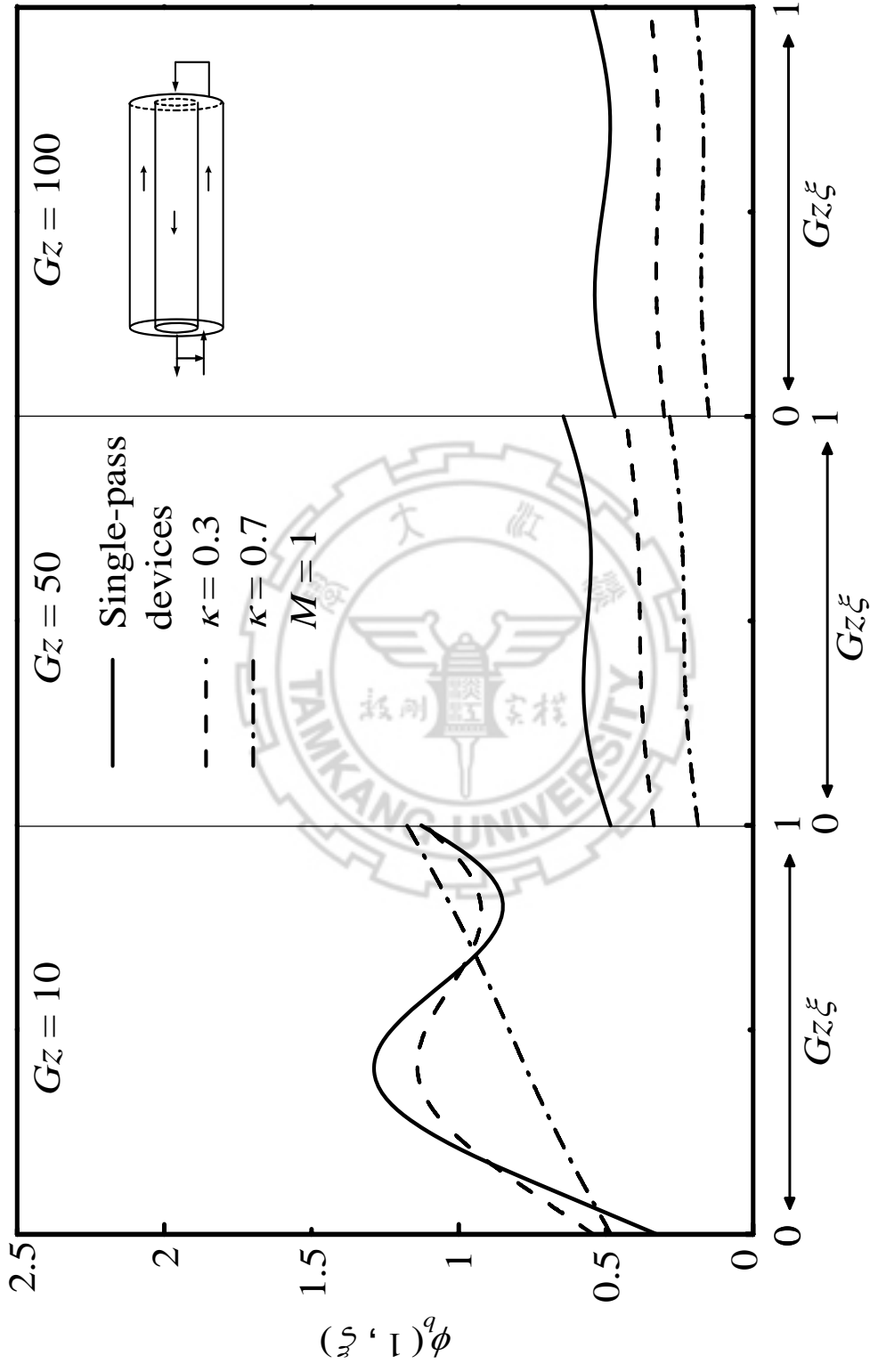
圖(4.5-6) 內外等體積內管進外管出模型，隔板位置與平均納塞數於不同格拉茲數之關係。



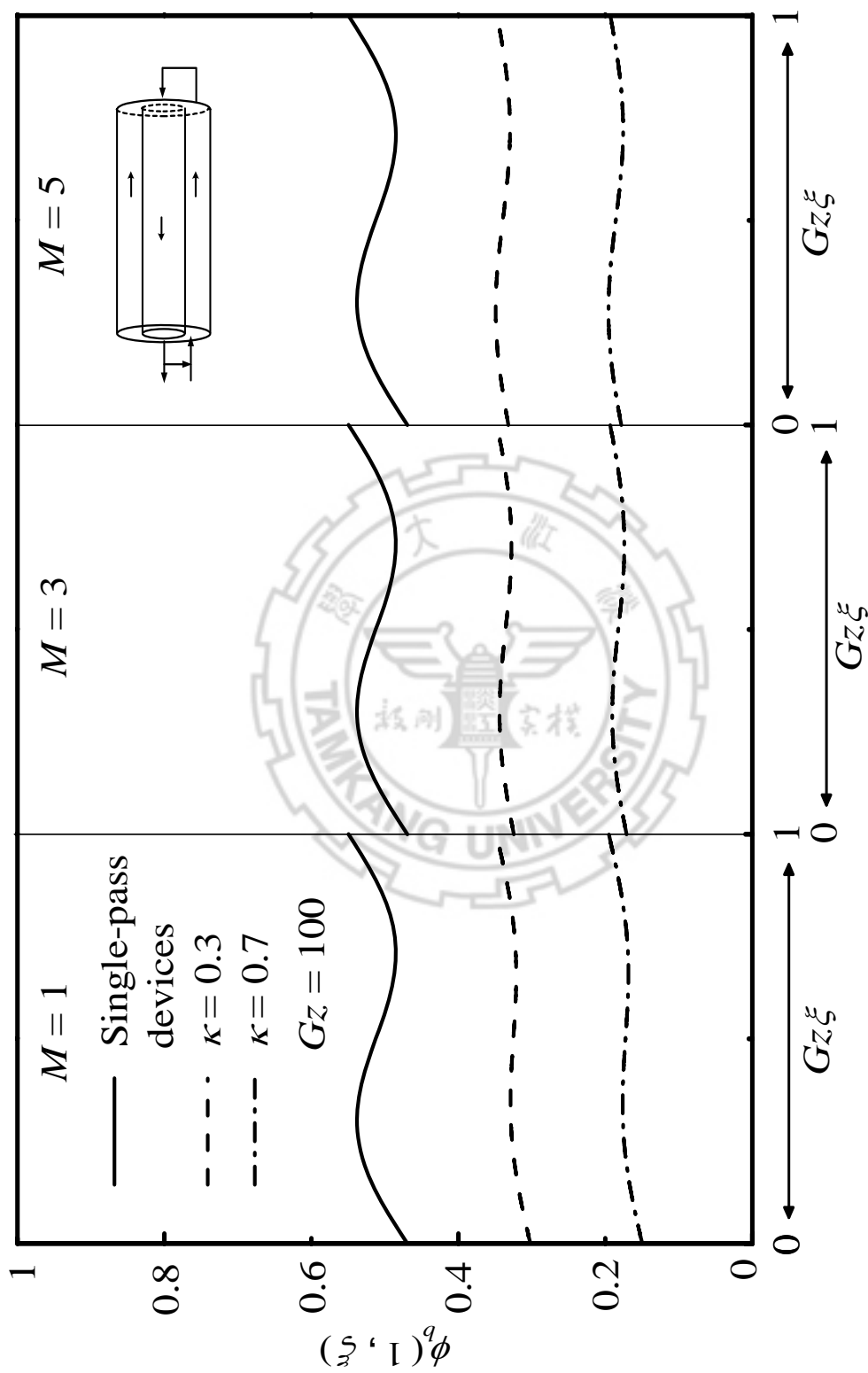
圖(4.5-7) 內外等體積內管進外管出模型，格拉茲數與熱傳效率百分比於不同迴流比及隔板位置之關係。



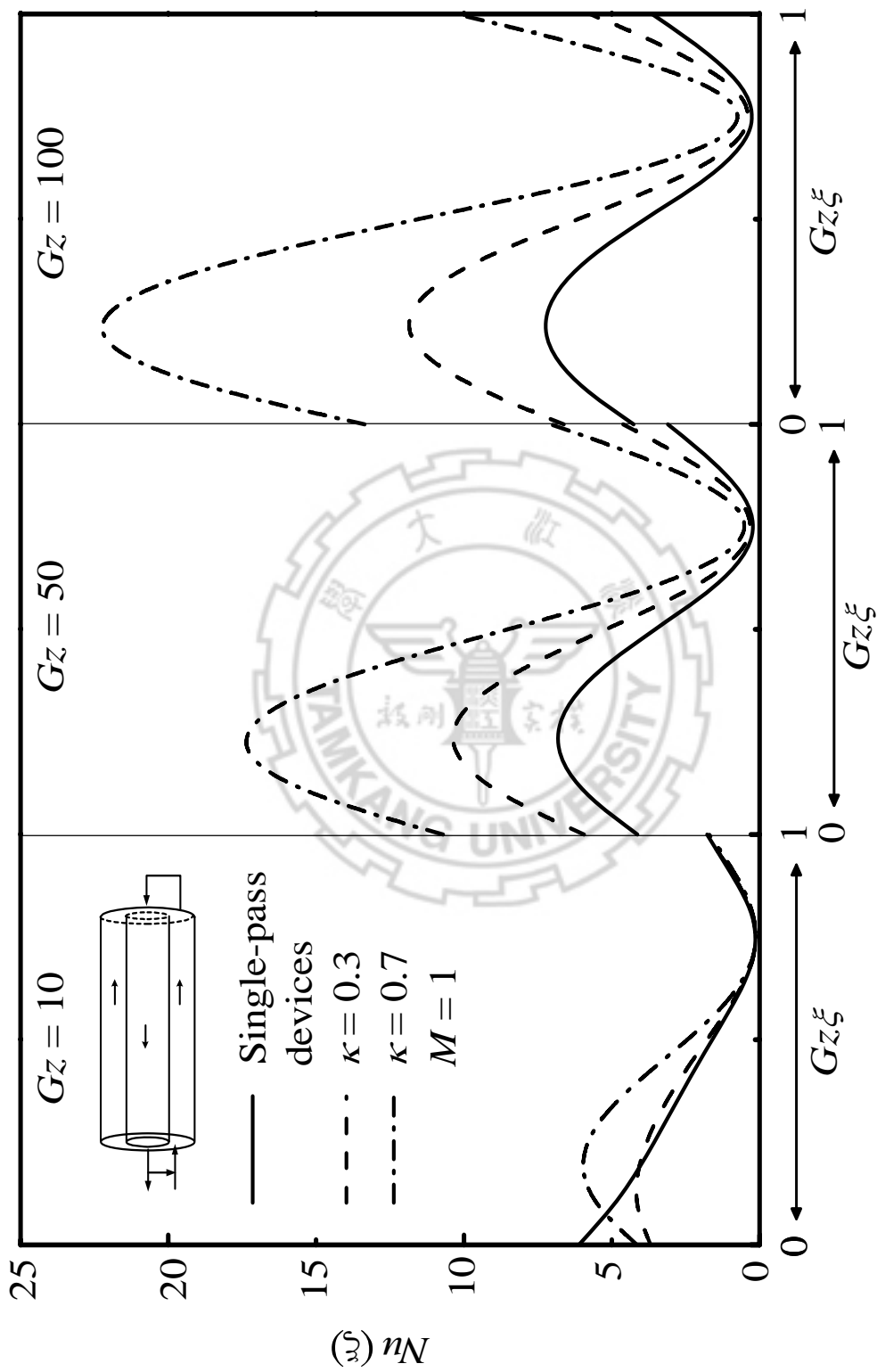
圖(4.5-8) 內外等體積外管進內管出模型，格拉茲數與迴流混合溫度於不同迴流比及隔板位置之關係。



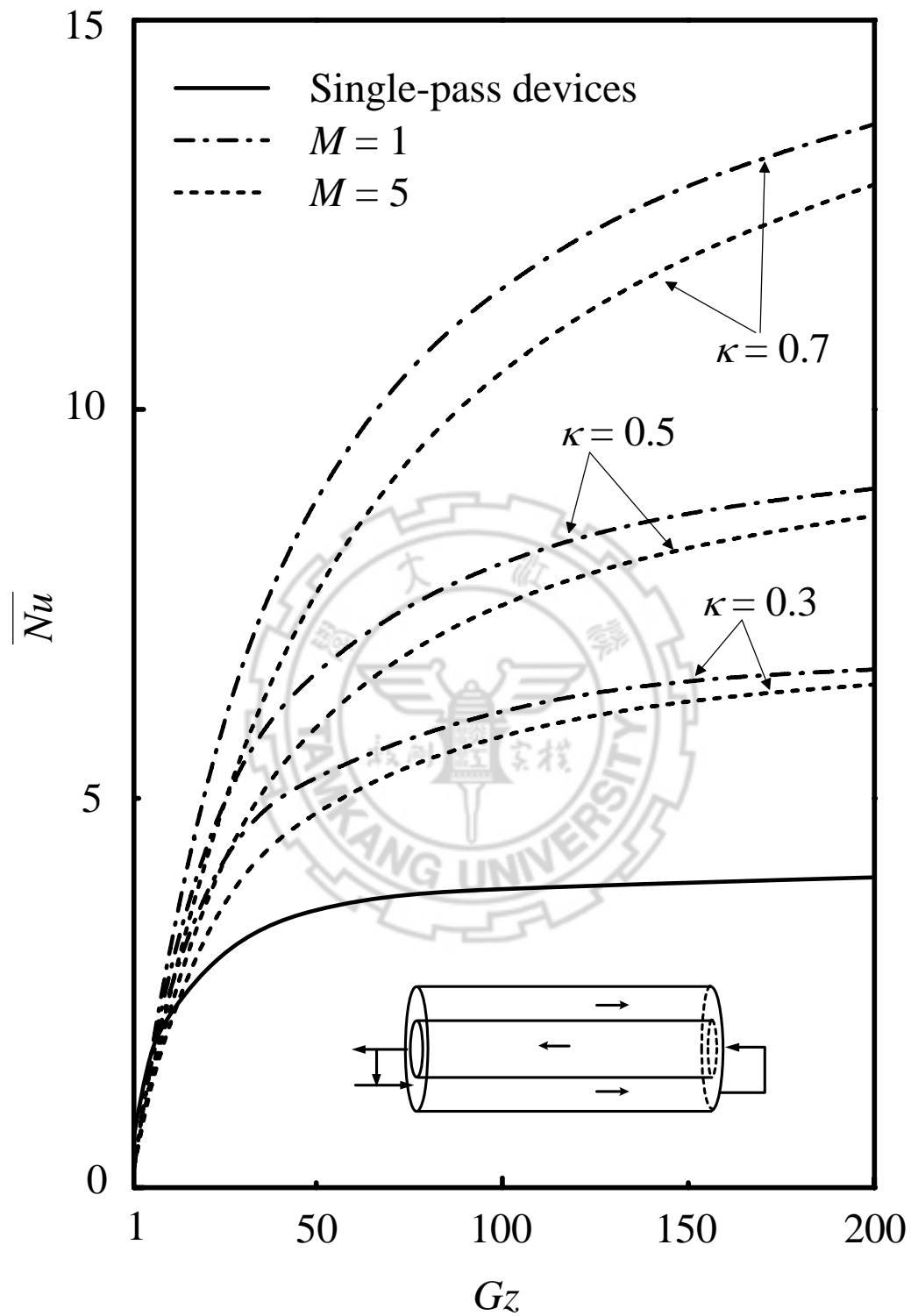
圖(4.5-9) 內外等體積外管進內管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同格拉茲數及隔板位置之關係。



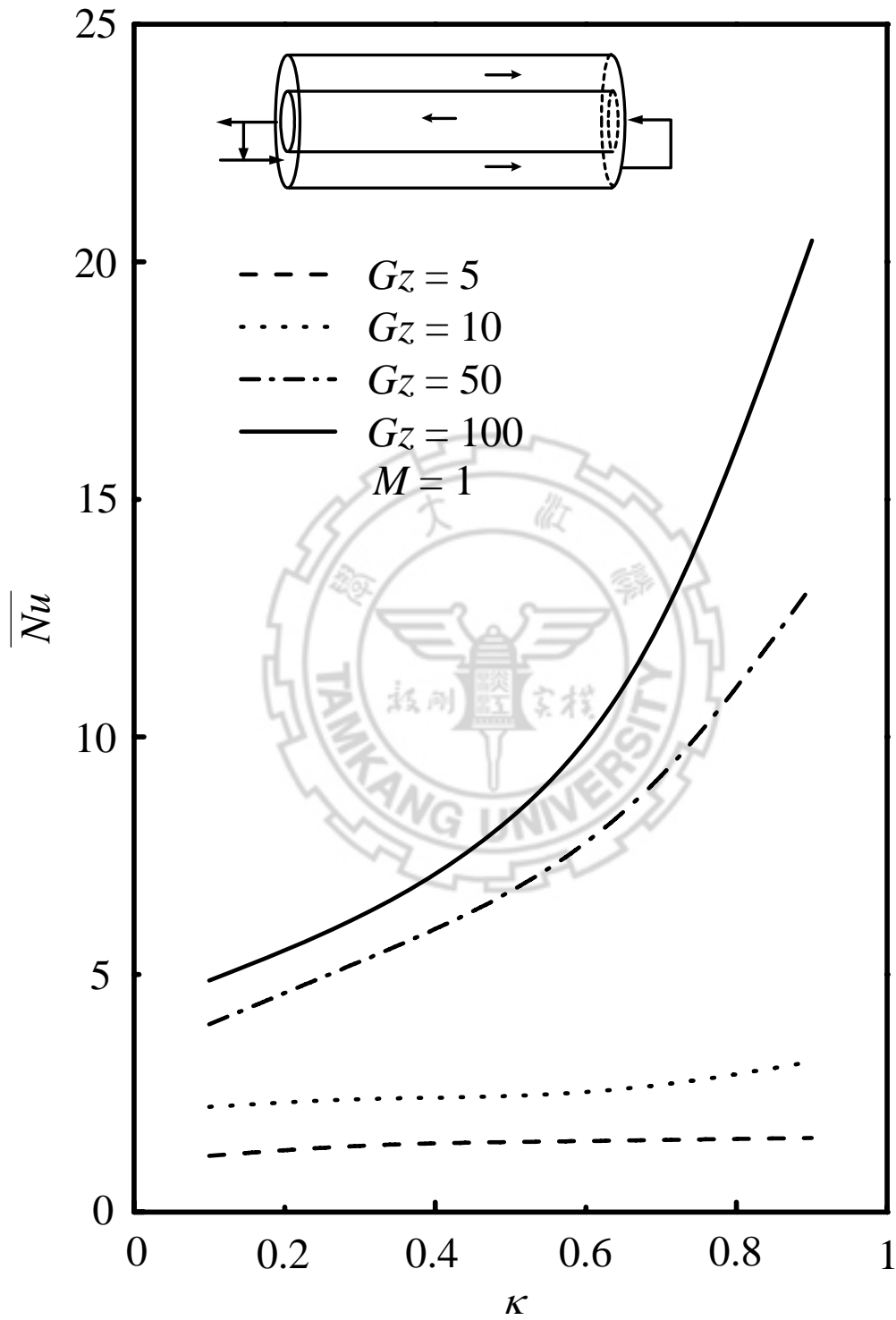
圖(4.5-10) 內外等體積外管進內管出模型，軸向位置與管壁溫度於不同迴流比及隔板位置之關係。



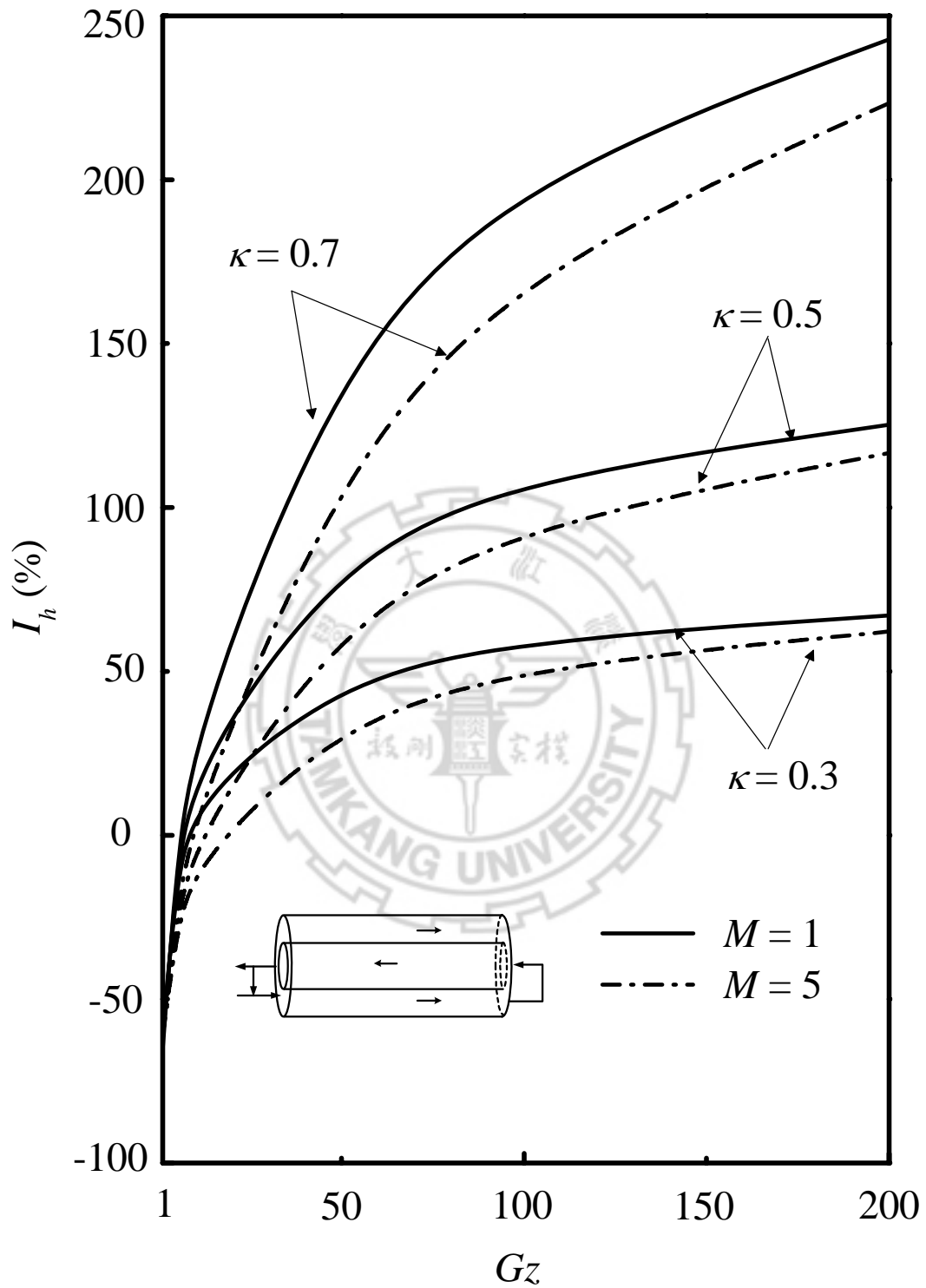
圖(4.5-11) 內外等體積外管進內管出模型，軸向位置與納塞數於不同格拉茲數及隔板位置之關係。



圖(4.5-12) 內外等體積外管進內管出模型，格拉茲數與平均納塞數於不同迴流比及隔板位置之關係。



圖(4.5-13) 內外等體積外管進內管出模型，隔板位置與平均納塞數於不同格拉茲數之關係。



圖(4.5-14) 內外等體積外管進內管出模型，格拉茲數與熱傳效率百分比於不同迴流比及隔板位置之關係。

(二十九) 內外等體積內管進外管出以迴流比值及隔板位置為參數之

熱傳效率增加百分比

I_h (%)	$M = 1$			$M = 5$		
	κ					
	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7
Gz						
1	-71.77	-70.68	-72.59	-63.14	-63.22	-63.35
10	-5.20	1.81	9.91	-11.98	-5.01	3.03
100	53.10	98.53	180.83	49.21	91.94	167.35
200	63.34	118.80	229.00	61.01	114.57	219.12

表(三十) 內外等體積外管進內管出以迴流比值及隔板位置為參數之

熱傳效率增加百分比

I_h (%)	$M = 1$			$M = 5$		
	κ					
	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7
Gz						
1	-60.07	-62.42	-65.22	-61.01	-61.11	-61.27
10	11.07	21.12	32.70	-7.98	-0.41	8.29
100	59.52	109.14	201.22	51.19	95.13	173.25
200	67.05	125.28	242.81	62.19	116.61	223.35

4.6 增加的能源消耗問題

當我們尋求熱傳效率提升的同時，也要考慮能源消耗的問題。為了增加熱傳效率而付出更多的能源成本是否符合經濟效益則是本節所要探討的問題。首先我們先考慮單行程無隔板系統的狀況，由式(3.7.1)之定義，吾等假設一裝置規格與流體性質如下： $L=1.2\text{ m}$ ， $R=0.2\text{ m}$ 及 $V=1\times 10^{-4}\text{ m}^3/\text{s}$ ， $\mu=8.94\times 10^{-4}\text{ kg}/\text{m}\cdot\text{s}$ ， $\rho=997.08\text{ kg}/\text{m}^3$ 的水，由這些數值可以計算出單行程的能量損耗為

$$P_0 = V\rho h_{fs,0} = 1.71\times 10^{-8}\text{ W} = 2.29\times 10^{-11}\text{ hp} \quad (4.6.1)$$

於本節將計算以上各種不同隔板位置及不同迴流比值下與單行程系統能源之間的差異，依式(3.7.9)至(3.7.14)定義的可得不同迴流比值及隔板位置的能源損耗百分比如表(三十一)至表(三十六)所示。

而由結果顯示二行程無迴流系統在 $\kappa=0.1$ 時能產生最大的 I_p 為 10^4 ，故在所有型式中所產生最大能源消耗增加量為

$$I_p \times P_0 = 10^4 \times 2.29 \times 10^{-11} = 2.29 \times 10^{-7} \quad (4.6.2)$$

由式(4.6.2)可知在此能源消耗的問題可忽略。

表(三十一) 二行程無迴流裝置系統內管進外管出與外管進內管出不
同隔板位置的能源消耗增加率

κ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
I_p	10000	625	124	41	20	16	24	70	526

表(三十二) 末端出口內管進內管出模型不同迴流比值及隔板位置的
能源消耗增加率

M	I_p		
	$\kappa = 0.3$	$\kappa = 0.5$	$\kappa = 0.7$
1.0	495	68	37
5.0	4499	708	693

表(三十三) 末端出口外管進外管出模型不同迴流比值及隔板位置的
能源消耗增加率

M	I_p		
	$\kappa = 0.3$	$\kappa = 0.5$	$\kappa = 0.7$
1.0	131	36	90
5.0	3166	591	887

表(三十四) 出口迴流至末端內管進外管出系統與末端迴流至入口外
管進內管出系統不同迴流比值及隔板位置的能源消耗增
加率

M	I_p		
	$\kappa = 0.3$	$\kappa = 0.5$	$\kappa = 0.7$
1.0	131	36	90
5.0	203	207	787

表(三十五) 出口迴流至末端外管進內管出系統與末端迴流至入口內
管進外管出系統不同迴流比值及隔板位置的能源消耗增
加率

M	I_p		
	$\kappa = 0.3$	$\kappa = 0.5$	$\kappa = 0.7$
1.0	495	68	37
5.0	4445	580	170

表(三十六) 內外等體積內管進外管出系統與內外等體積外管進內
管出系統不同迴流比值及隔板位置的能源消耗增加率

M	I_p		
	$\kappa = 0.3$	$\kappa = 0.5$	$\kappa = 0.7$
1.0	501	84	102
5.0	4524	767	933

第五章

結論與建議

本文主要是探討管壁熱通量為正弦函數於不同之迴流型式之逆流型套管熱交換器並求其近似解，此系統之數學模型所推導之統制方程式是屬於共軛格拉茲系統，求解過程中配合弗賓納斯法，求得其無因次溫度分佈且探討迴流效應對本系統的影響。迴流裝置影響各種型式主要的因素有預混的效果與流體於管道中的流速，本文將探討格拉茲數、迴流比值與隔板位置三者對熱傳效率的影響。本研究共分成十種型式，由前一章結果與討論歸納成以下數點結論：

5.1 二行程無迴流模型內管進外管出與外管進內管出(第一型與第二型)

- (1) 固定隔板位置時，隨著格拉茲數的增加，無因次管壁溫度隨之降低，但熱傳效果改善率也隨著格拉茲數而提昇。
- (2) 與單行程系統比較，隨著格拉茲數升高，流體速度增加，在 $Gz > 10$ 之後，兩組型式的熱傳效率均明顯提升。
- (3) 隨著 κ 值越接近外管，無因次管壁溫度隨之降低，則系統整體的熱傳效率明顯提昇。

5.2 末端出口模型之模型內管進內管出與外管進外管出(第三型與第四型)

- (1) 固定隔板位置時，隨著格拉茲數的增加，無因次管壁溫度隨之降低，而熱傳效果改善率值逐漸提升；第三型則隨迴流比增加而管壁溫度降低，第四型則相反，隨迴流比增加而管壁溫度上升。
- (2) 與單行程系統比較，第三型在 $Gz > 50$ 以上的熱傳效率才明顯提升，且隨著拉茲數增加而提昇。但第四型則在 $Gz > 10$ 之後就有明顯效率提昇。
- (3) 固定迴流比時，第三型和第四型的效率皆隨著 κ 值越接近外管而提昇；固定隔板位置時，第三型則隨迴流比增加而效率提升，第四型則相反，隨迴流比增加反而效率降低。

5.3 出口迴流至末端模型內管進外管出與外管進內管出(第五型與第六型)

- (1) 固定隔板位置時，隨著格拉茲數的增加，無因次管壁溫度隨之降低，而熱傳效果改善率值逐漸提升；第五型則隨迴流比減少而管壁溫度降低，第六型迴流比值的改變對於管壁溫度則無顯著影響。
- (2) 與單行程系統比較，第五型在 $Gz > 30$ 以上的熱傳效率才明顯提

升，且隨著拉茲數增加而提昇。但第六型則在 $Gz > 10$ 之後就有明顯效率提昇。

- (3) 固定迴流比時，而在較大格拉茲數時，第五型和第六型的效率皆隨著 κ 值越接近外管而提昇；固定隔板位置時，第五型則隨迴流比增加而效率降低，第六型則因為迴流影響不在加熱段上，故效率受迴流比改變影響不大，但第六型的效率略高於第五型。

5.4 末端迴流至入口模型內管進外管出與外管進內管出(第七型與第八型)

- (1) 固定隔板位置時，隨著格拉茲數的增加，無因次管壁溫度隨之降低，而熱傳效果改善率值逐漸提升；第七型則因為迴流影響不在加熱段上，所以管壁溫度不會因為迴流比值的改變而有明顯影響，第八型則隨迴流比減少而管壁溫度降低。
- (2) 與單行程系統比較，第七型在 $Gz > 10$ 之後就有明顯效率提昇。但第八型則在 $Gz > 30$ 以上的熱傳效率才明顯提升。
- (3) 固定迴流比時，在較大格拉茲數時，第七型和第八型皆在 κ 值愈接近外管時效率愈佳；固定隔板位置時，第七型的效率不隨迴流比的變化有明顯的改變，第八型則隨迴流比增加而效率降低。

5.5 內外等體積流動模型內管進外管出與外管進內管出(第九型與第十型)

- (1) 固定隔板位置時，隨著格拉茲數的增加，無因次管壁溫度隨之降低，而熱傳效果改善率值逐漸提升。
- (2) 與單行程系統比較，第九型和第十型皆在 $Gz > 30$ 之後就有明顯效率提昇，且隨著拉茲數增加而提昇。
- (3) 固定迴流比時，在較大格拉茲數時，第九型和第十型皆在 κ 值愈接近外管時效率愈佳；固定隔板位置時，第九型及第十型皆隨迴流比增加而效率降低。

5.6 五種模型之比較

在經過以上五種模型之個別討論後，接著由效率值比較這十種型式的熱傳效率，以各種迴流比值及不同的隔板位置對格拉茲數作一比較。

在經過以上十種型式之個別討論後，接著我們可以由比較這些模型的熱傳效率，得到以下幾點結論：

1. 在管壁熱通量為正弦函數之二行程系統中，加入迴流之後，效率無明顯增加，反而降低，所以單就效率來看，應該是第二型最佳。
2. 加入迴流之後雖然效率會略為降低，但在某些型式中卻能

有效降低管壁溫度，其中以第六型較明顯。

3. 在相同迴流型式時，熱傳效率不會因為流體流動方向相反而有明顯改變，如第一型和第二型、第五型和第八型、第六型和第七型及第九型和第十型。

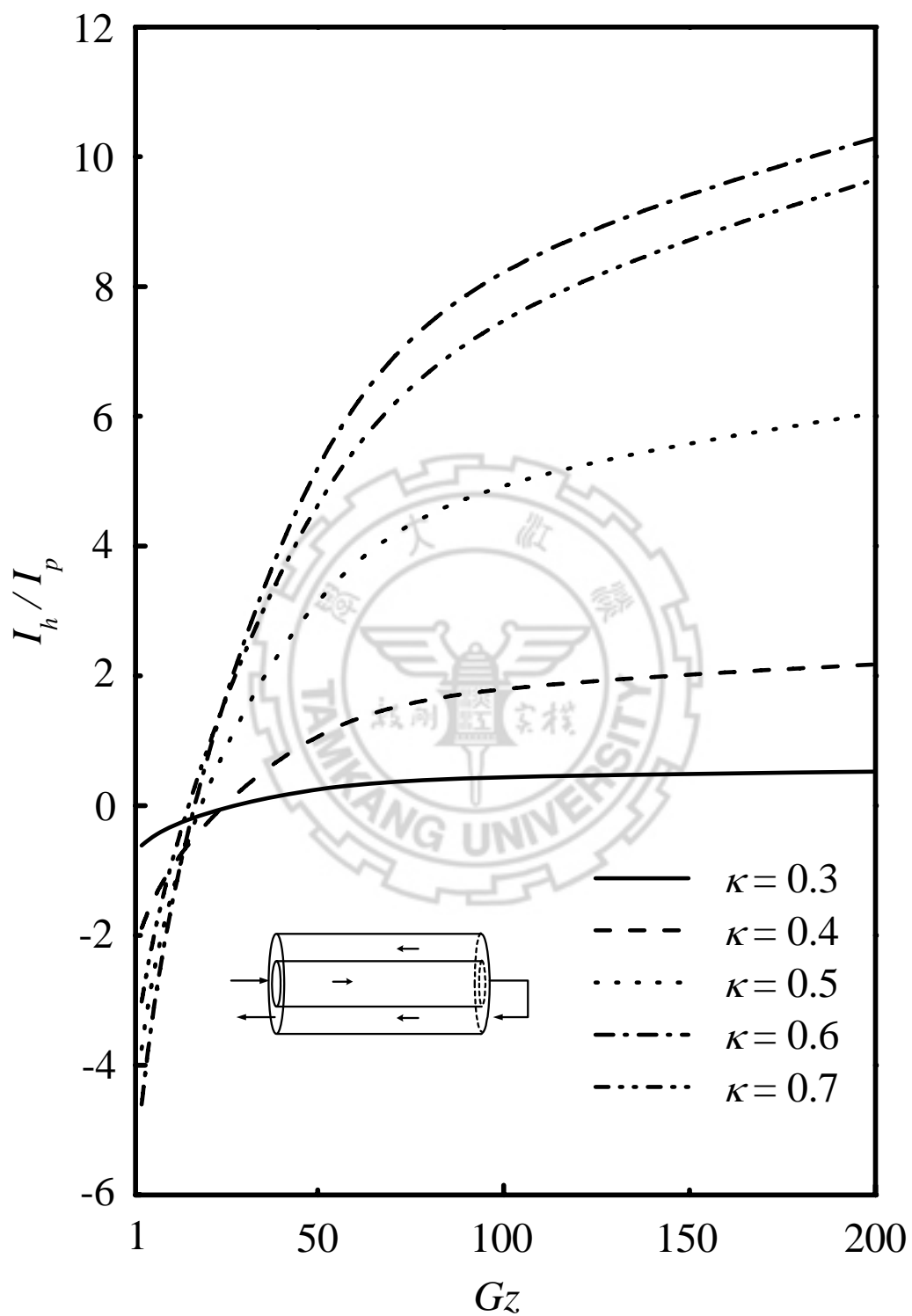
在此系統中的分析除了考慮效率之外，還能選擇溫度較低的操作系統。在以上的分析考慮中，並非全部的迴流型式都有出現最佳值，也並非效率最高一定最好，所以在設計及應用，首先需確定想要達到的溫度目標，再選擇系統的格拉茲數，接著考慮要以多大的迴流比值與隔板位置，會得到最佳的效率增加率及系統操作溫度。



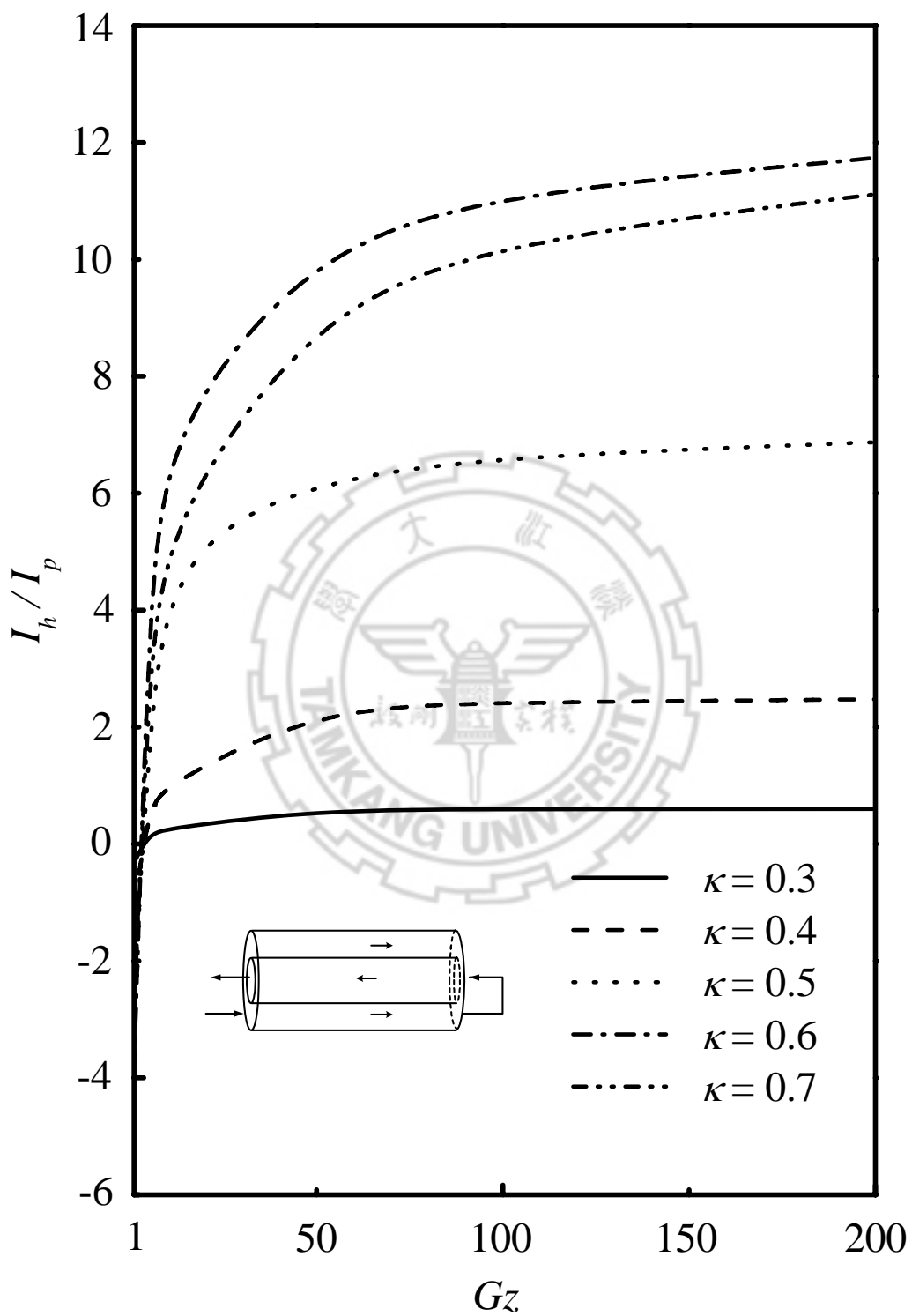
5.7 熱傳效率與能源消耗之比較

本研究所設計管壁熱通量為正弦函數的熱交換系統，其迴流型式及隔板位置為系統之設計參數，而迴流比值與流體流速為系統之操作參數，也因為上述的因素而影響系統的預混效應及流體流速，間接或直接的影響熱傳效率。然而並非所有的改變對熱量傳送的效果有明顯的改善，所以本節特別在不同隔板位置及迴流比之下，以 I_h/I_p 對格拉茲數作圖，由圖(5.1)至圖(5.10)可看到十種不同迴流模型的熱傳效率與能源消耗的比值。

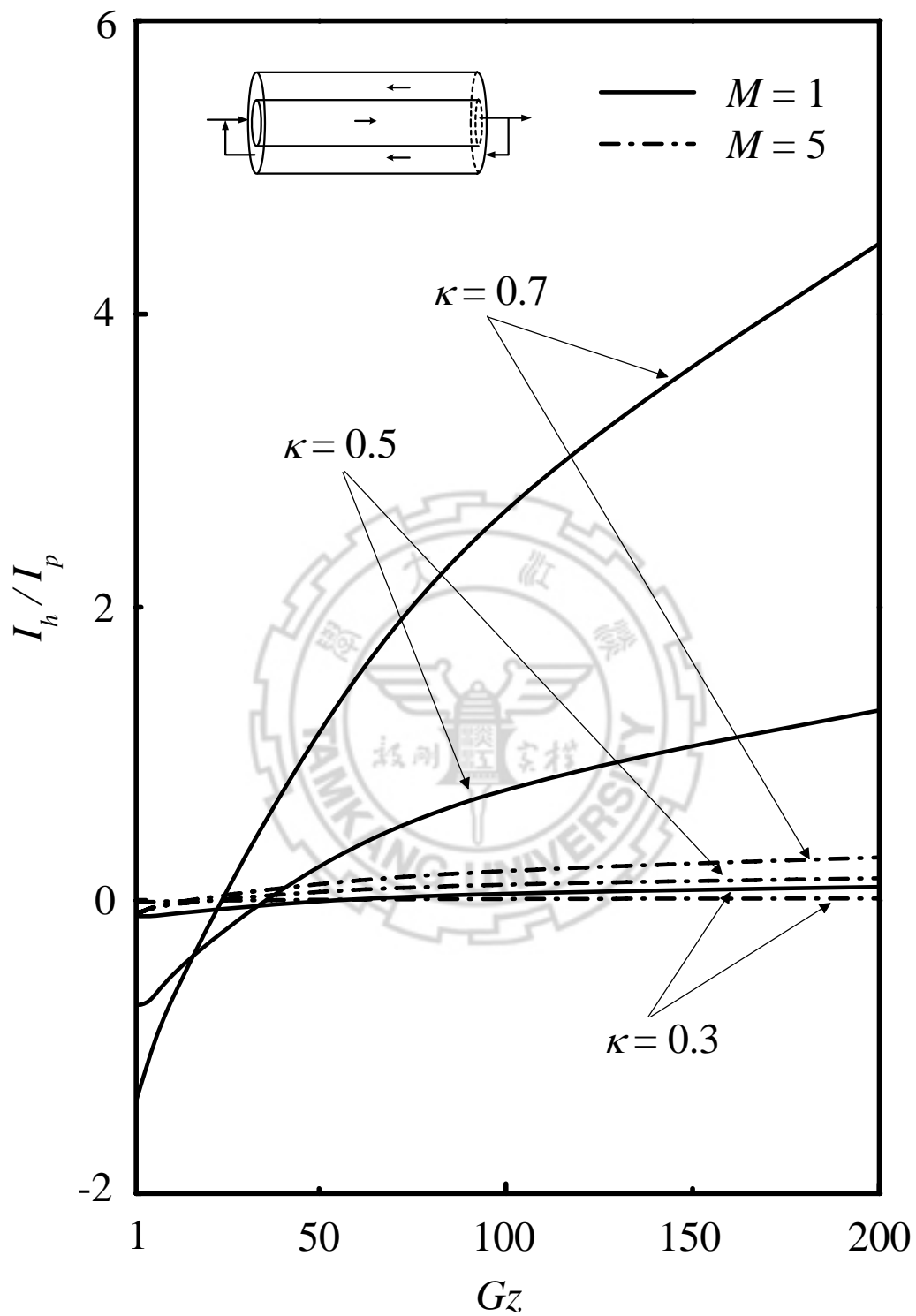
我們可藉由此資料來選擇適當的熱交換器，以自己的取向來選擇真正符合效率的熱交換器系統。例如，二行程無迴流裝置內管進外管出之模型，如圖(5.1)，我們可以發現在當 $Gz=10$ ，單就效率 I_h 值來考慮是隔板位置 κ 越接近外管越好，但如果考慮到能源消耗之後，由結果來看，反而在 $\kappa=0.6$ 時效益最好。且由表(三十七)可得知，當 $Gz=10$ 時最佳操作型式為第二型或第六型；而當 $Gz \geq 100$ 則以第六型為最佳操作型式，由此得到一個結論，一個系統效率的提昇不單只看熱傳效率的提昇，更要考慮到此系統能源消耗的問題，所以同時考慮這兩種關係，才能選擇到真正所需最佳效益的系統。



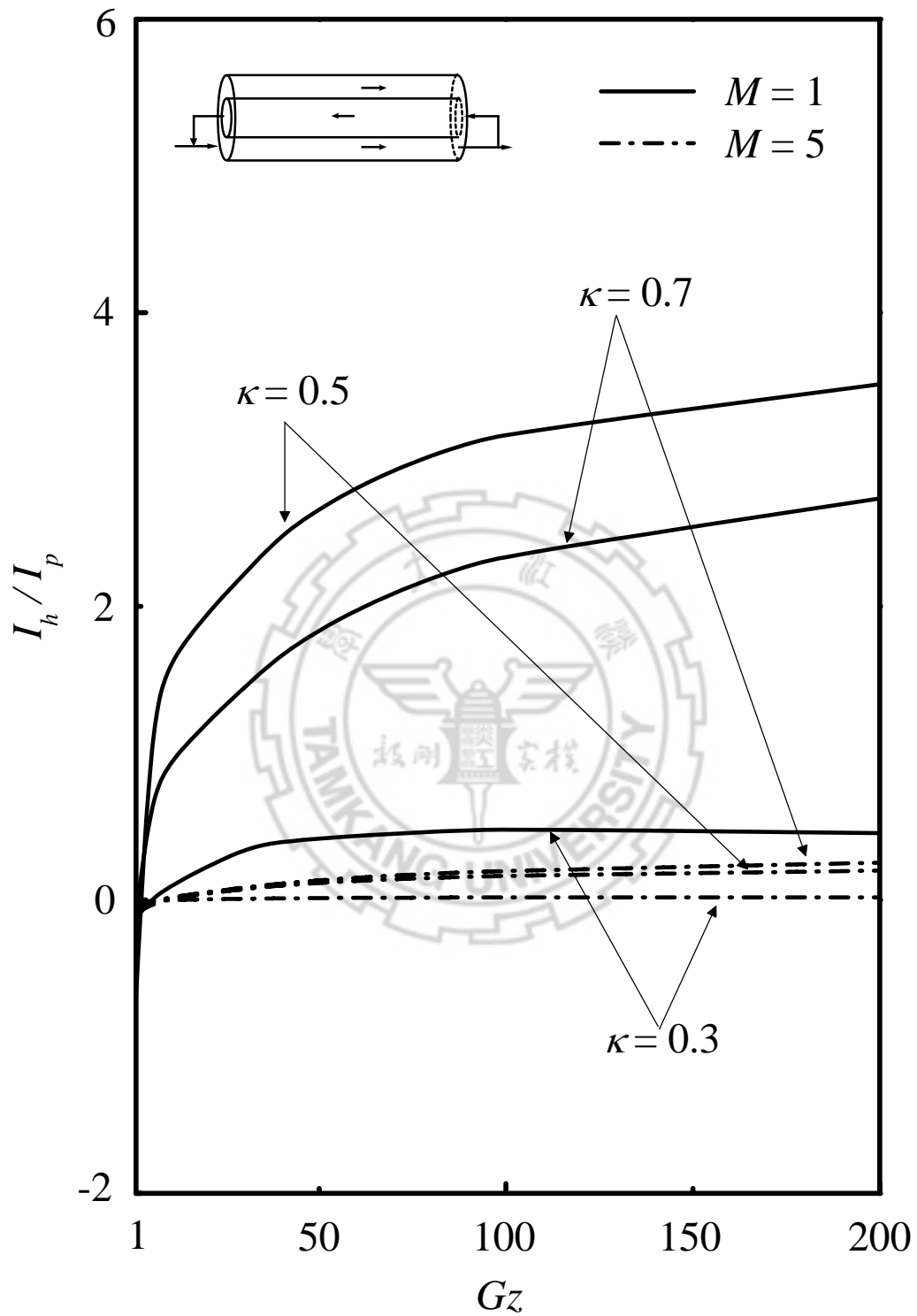
圖(5.1) 二行程無迴流裝置內管進外管出，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同的隔板位置之關係。



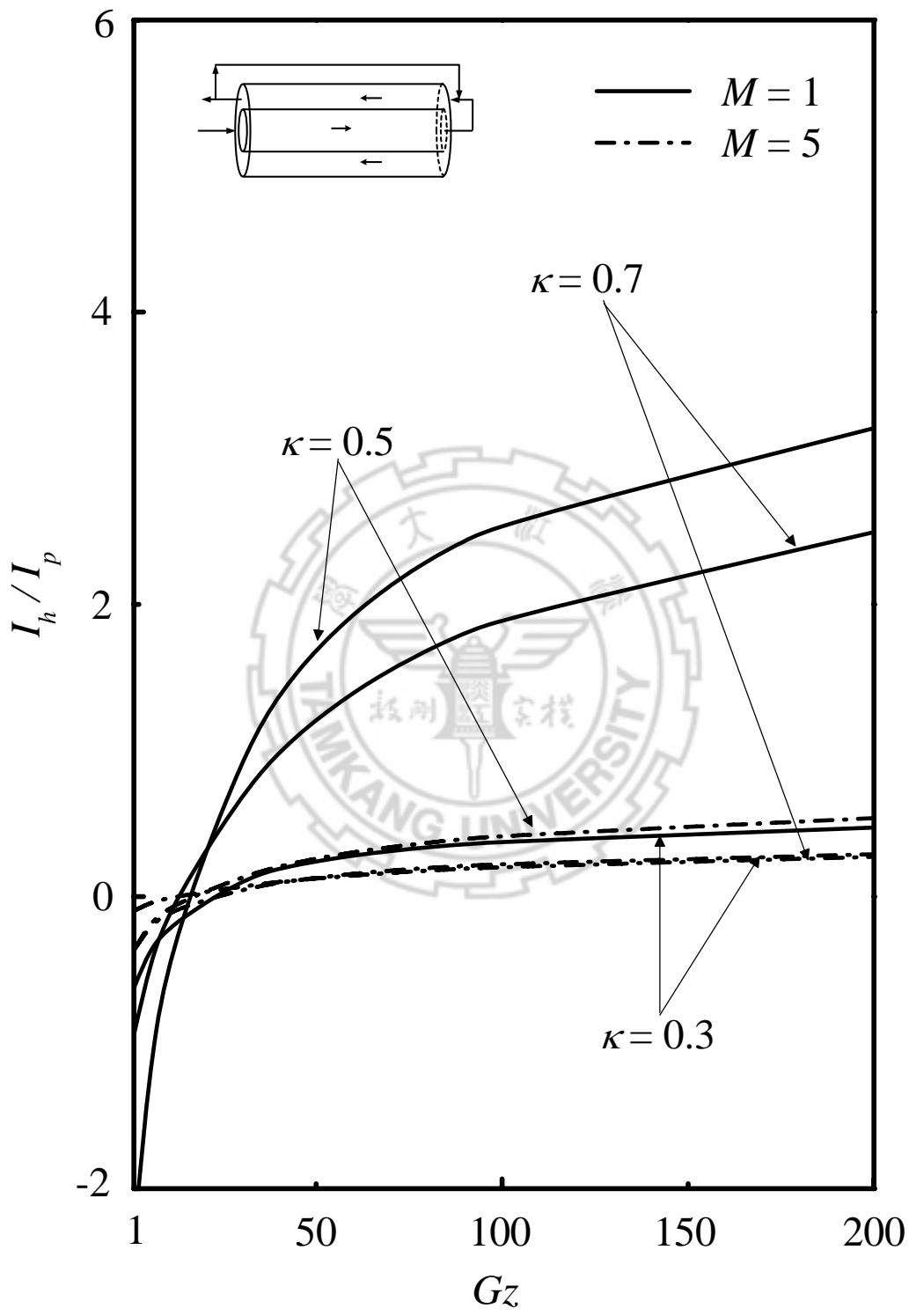
圖(5.2) 二行程無迴流裝置外管進內管出，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同的隔板位置之關係。



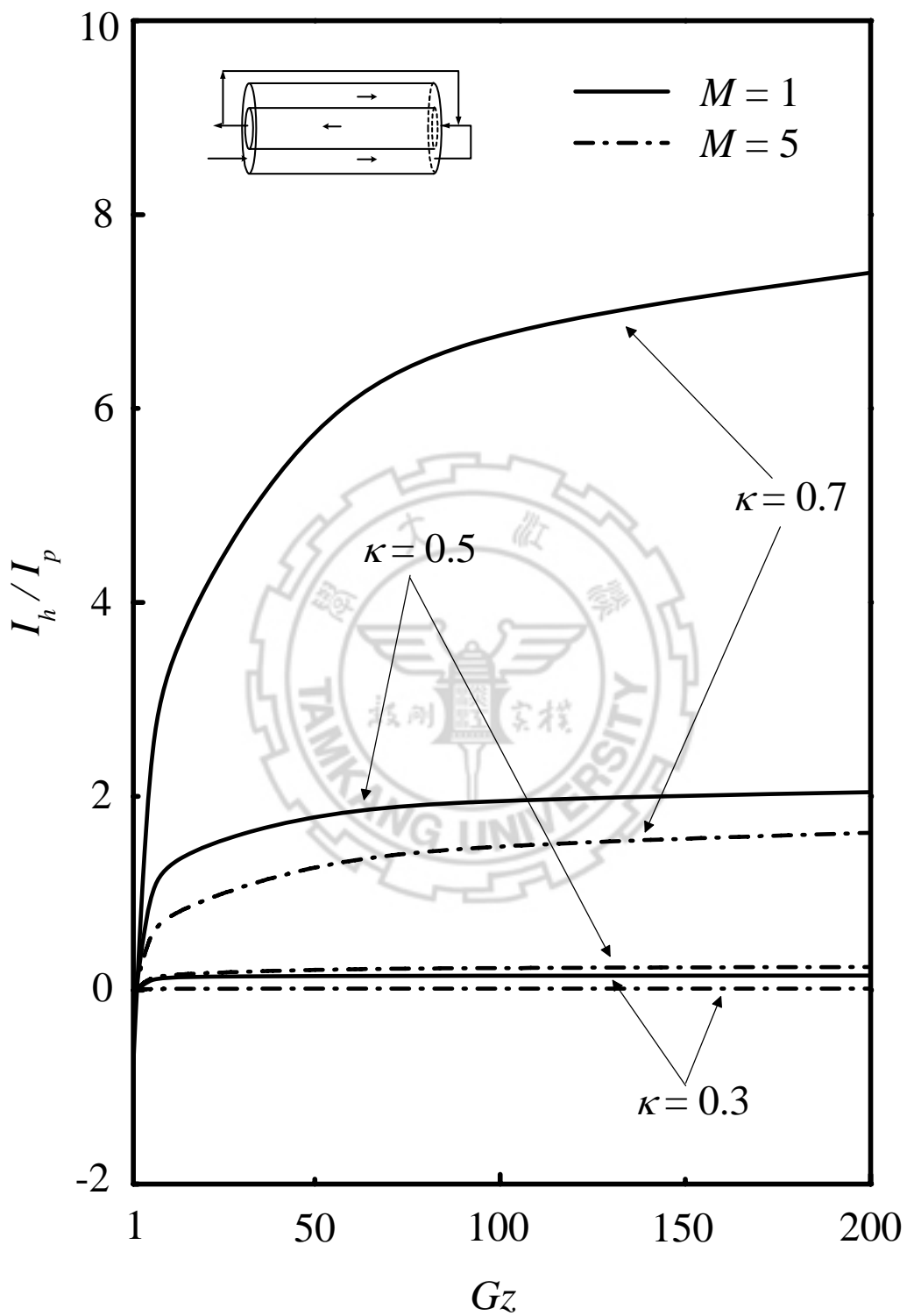
圖(5.3) 末端出口內管進內管出模型，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同迴流比及隔板位置之關係。



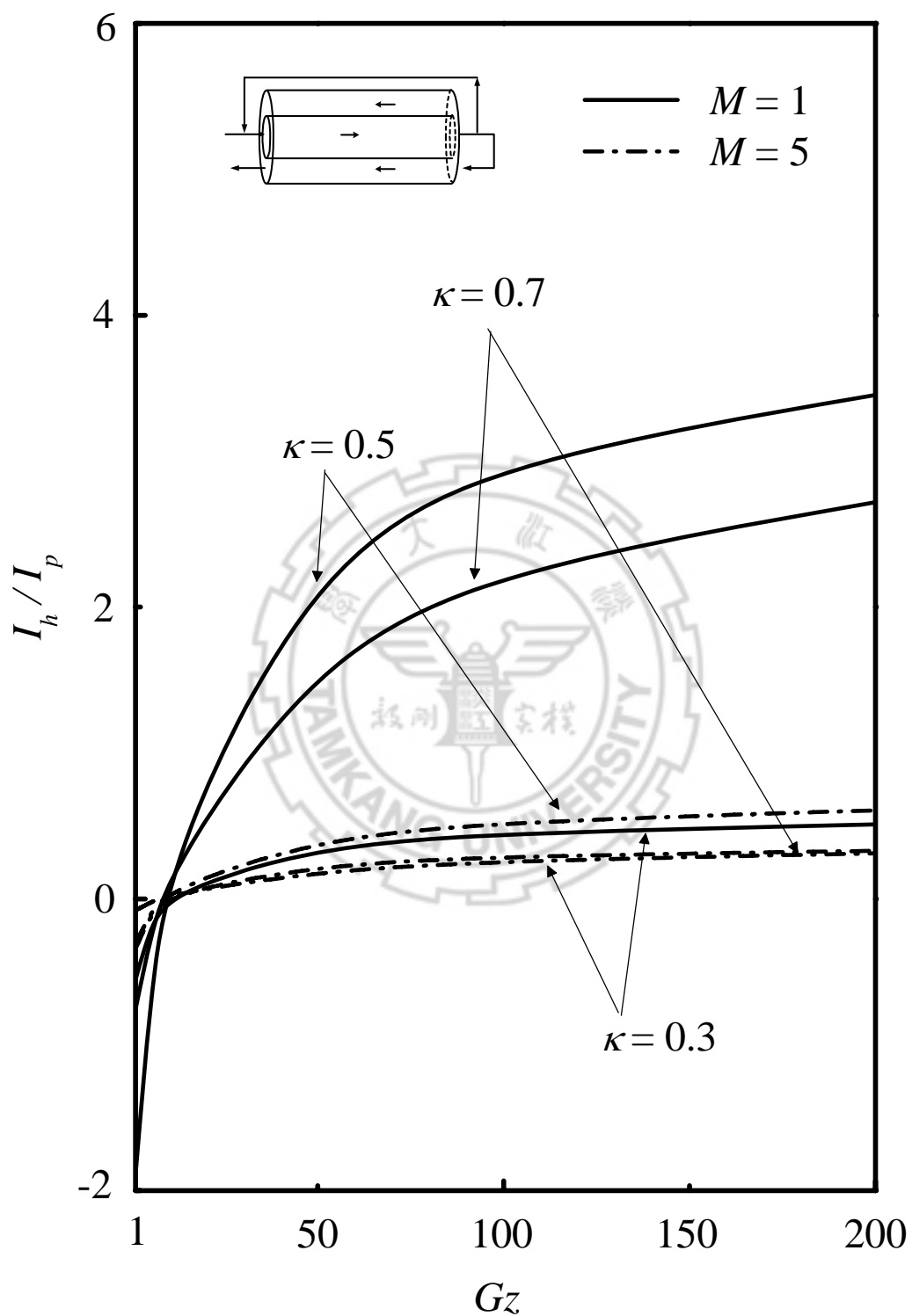
圖(5.4) 末端出口外管進外管出模型，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同迴流比及隔板位置之關係。



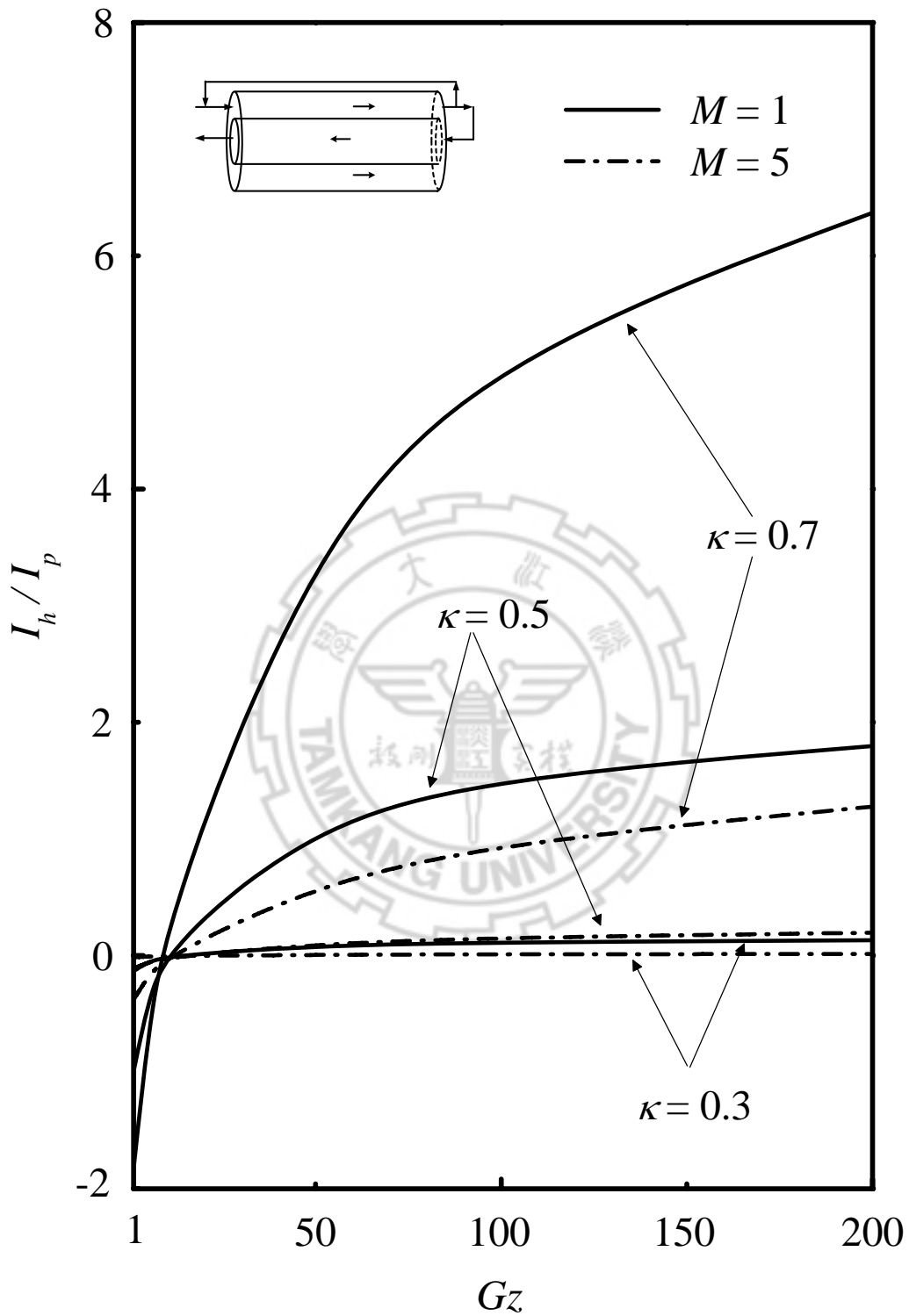
圖(5.5) 出口迴流至末端內管進外管出模型，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同迴流比及隔板位置之關係。



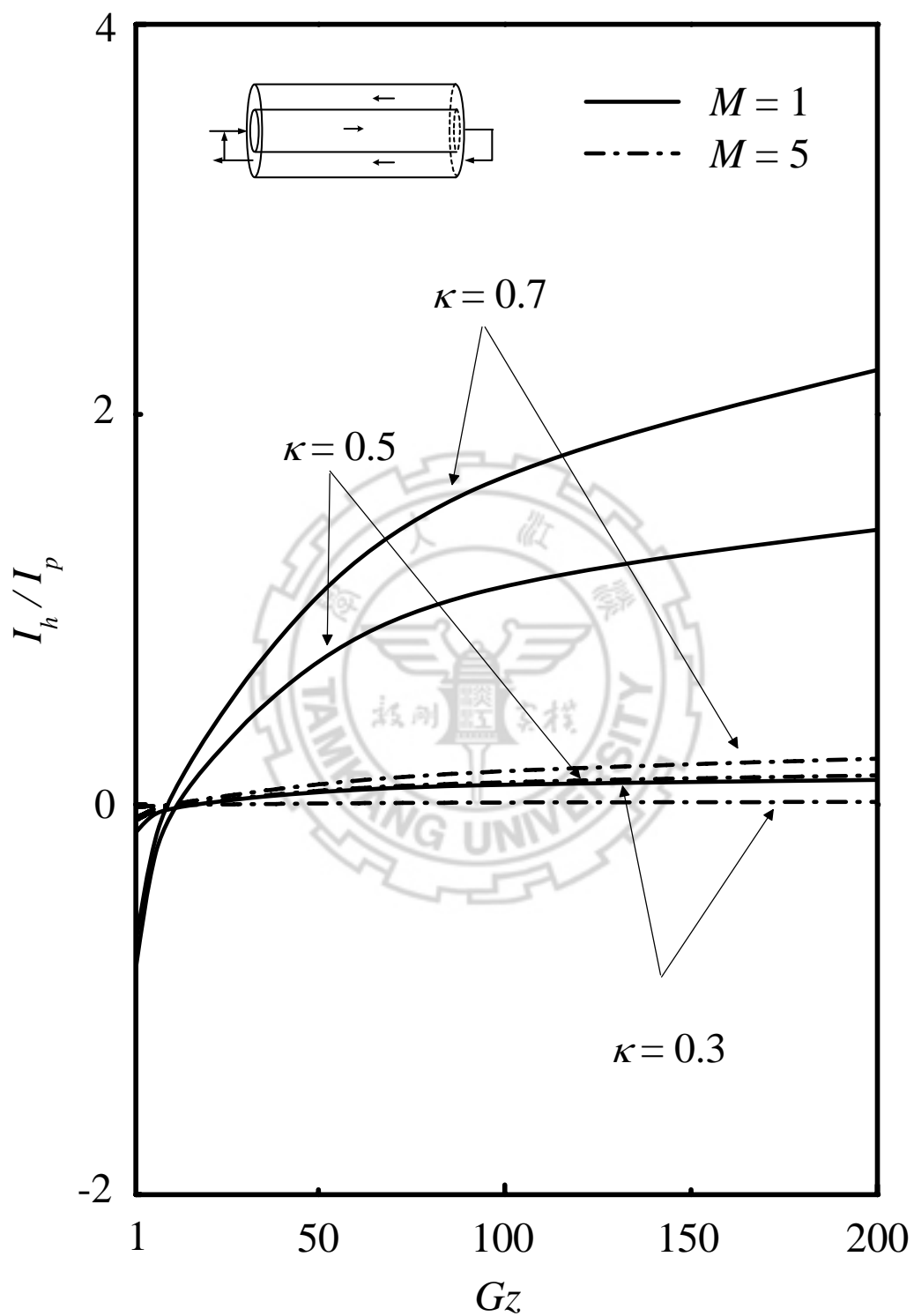
圖(5.6) 出口迴流至末端外管進內管出模型，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同迴流比及隔板位置之關係。



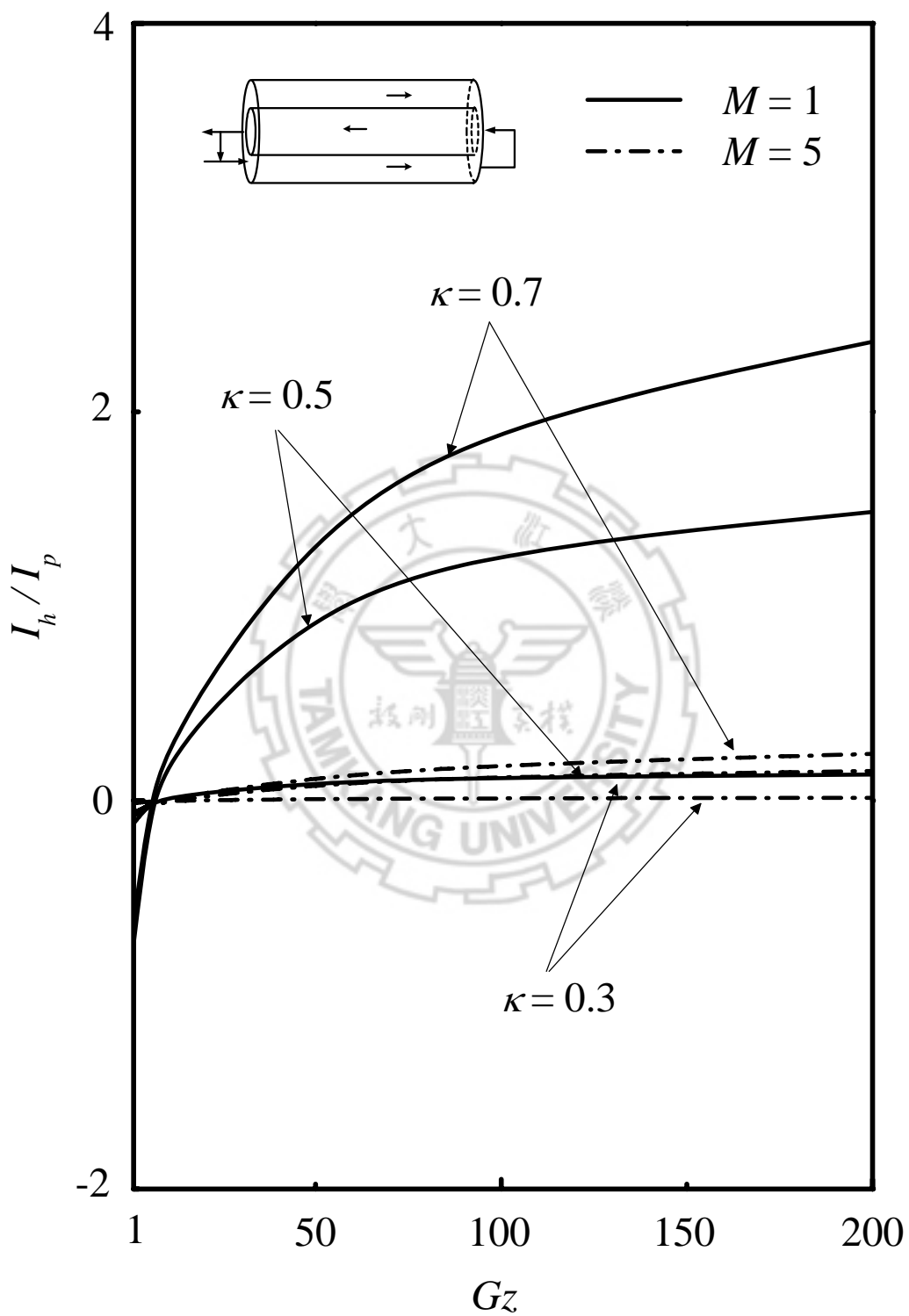
圖(5.7) 末端迴流至入口內管進外管出模型，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同迴流比及隔板位置之關係。



圖(5.8) 末端迴流至入口外管進內管出模型，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同迴流比及隔板位置之關係。



圖(5.9) 內外等體積內管進外管出模型，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同迴流比及隔板位置之關係。



圖(5.10) 內外等體積外管進內管出模型，格拉茲數與 I_h/I_p 於不同迴流比及隔板位置之關係。

5.8 未來研究方向

由本文所提出之問題與其數學模式之理論解，對於未來之工作，有以下之建議：

- (1) 探討軸向傳導，即擴展格拉茲問題。
- (2) 將此基本理論應用到二行程平板型逆流式熱交換器之研究。
- (3) 探討不同邊界條件(如管壁有化學反應熱產生)之情況下的結果。
- (4) 當本文理論推導過程之假設，如物性常數不變，忽略軸向熱傳，穩定狀態與層流流動，牛頓流體....等等，不成立時對本系統之影響。



表(三十七) 不同隔板位置及迴流比值之最佳操作型式之比較

型式	$M = 1$			$M = 5$		
	κ			κ		
Gz	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7
1	×	×	×	×	×	×
10	第六型	第二型	第二型	第六型	第二型	第二型
100	二或六	二或六	二或六	二或六	二或六	二或六
200	二或六	二或六	二或六	二或六	二或六	二或六

註：× 表示其熱傳效率較單行程差



參考文獻

1. Hornut J. M., H. Dhaouadi, S. Poncin, N. Midoux, J. M. Hornut, G. Wild, Hydrodynamics and flow regimes in external loop airlift reactor, *Chem. Eng. Sci.*, **54**, 5211-5221 1999.
2. Korpijarvi J., P. Oinas, J. Reunanen, Hydrodynamics and mass transfer in an airlift reactor, *Chem. Eng. Sci.*, **54**, 2255-2262, 1999.
3. Camarasa E., E. Carvalho, L.A.C. Meleiro etc., A Hydrodynamic model air-lift reactors, *Chem. Eng. Processing*, 121-128, 2001.
4. Ruitenber R., Carl E. Schultz, Cees J.N. Buisman, Bio-oxidation of minerals in air-lift loop bioreactors, *Int. J. Miner. Process*, **62**, 271-278, 2001.
5. Couvert A., D. Bastoul, M. Rouston, A. Line, P. Chatellier, Prediction of liquid velocity and gass hold-up in rectangular air-lift reactors of different scales, *Chem. Eng. Processing*, **40**, 113-119, 2001.
6. Vial C., S. Poncin, G. Wild, N. Midoux, A simple method for regime identification and flow characterization in bubble columns and airlift reactors, *Chem. Eng. Processing*, **40**, 135-151, 2001.
7. Gu X., S. H. Chiang, Anovel Flotation column for oily water cleanup, *Separation and Purification Technology*, **16**, 193-203, 1999.
8. Fakeeha, A. H., B. Y. Jibril, G. Ibrahim, A. E. Abasaheed, Medium effects on oxygen mass transfer in a plunging jet loop reactor with a downcomer, *Chem. Eng. Processing*, **38**, 259-265, 1999.

9. Moller K. P., W. Bohringer, A. E. Schnitzer, E. V. Steen, C. T. O'Connor, The use of a jet loop reactor to study the effect of crystal size and the co-feeding of olefins and water on the conversion of methanol over HZSM-5, *Microporous and Mesoporous Materials*, **29**, 127-144, 1999.
10. Couvert A., M.Roustan, P. Chatellier, Two-phase hydrodynamic study of a rectangular air-lift loop reactor with an internal baffle, *Chem. Eng. Sci.*, **54**, 5245-5252, 1999.
11. Dhaouai H., S. Poncin, N. Midoux, G. Wild, Gas-liquid mass transfer in an airlift reactor-analytical solution and experimental confirmation, *Chem. Eng. Processing*, **40**, 129-133, 2001.
12. Wasserscheid P., M. Eichmann, Selective dimerisation of 1-butene in biphasic mode using buffered chloroaluminate ionic liquid solvents-design and application of a continuous loop reactor, *Catalysis Today*, **66**, 309-316, 2001.
13. Heiszwolf J. J., L. B. Engelvaart, M. G. Eijnden, M.T. Kreutzer, F. K. Jacob, A. Moulijn, Hydrodynamic aspects of the monolith loop reactor, *Chem. Eng. Science* **56**, 805-812, 2001.
14. Cousins A. K., Bounds on heat Transfer in a periodic Graetz problem, *J. of Heat Transfer*, **113**, 43-47, 1991.
15. Sefik B., Numerical solution of Graetz problem with axial conduction, *Numerical Heat Transfer, Part A*, **21**, 493-500, 1992.
16. Fourcher B., K. Mansouri, An approximate analytical solution to the Graetz problem with periodic inlet temperature, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **18**, 229-235, 1997.

17. Unsal M., A solution for the complex eigenvalues and eigenfunction of the periodic Graetz problem, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, **25**, 585-592, 1998.
18. Ho C. D., An analytical study of laminar counterflow double-pass heat exchangers with external refluxes, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **43**, 3263-3274, 2000.
19. Tasi S. W., H. M. Yeh, A study of the separation efficiency in horizontal thermal diffusion columns with external refluxes, *Can. J. Chem. Eng.*, **63**, 406-410, 1985.
20. Yeh H. M, S. W. Tsai, C. L. Chlang, Effects of recycle on heat and mass transfer between parallel-plate wall with equal fluxes, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **31**, 1853-1860, 1988.
21. Yeh H. M, Chang T. W., S. W. Tsai, A study of the Graetz problems in Concentric-tube continuous-constant countercurrent separation processes with recycles at both ends, *Separation Science and Technology*, **21**, 403-419, 1986.
22. Ho, C. D., and Sheu, W. S., The influence of recycle on double-pass heat and mass transfer through a parallel-plate device, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **63**, 406-411, 1985.
23. Ho, C. D. and Chiang S. U., A study of mass transfer efficiency in parallel-plate channel with external refluxes, *Chem. Eng. J.*, **85**, 207-214, 2002.
24. Shah, R. K., London, A. L., Laminar flow forced convection in ducts. *New York, Academic Press* 1978.
25. Shah, R. K., Bhatti, M. S., Laminar flow forced convection in ducts. In: *Handbook of single-phase convective heat transfer. New York, Wiley* , Chap 3, 1987.

26. Reynolds, W. C., Heat transfer to fully developed laminar flow in a circular tube with arbitrary circumferential heat flux, *Int. J. Heat Mass Transfer* **82**, 108-112, 1960.
27. Reynolds, W. C., Lundberg, R. E. and McCuen, P. A., Heat transfer in annular passages-general formulation of the problem for arbitrary prescribed wall temperatures or heat flux, *Int. J. Heat Mass Transfer* **6**, 483-493, 1963.
28. Kays, W. M., and Sutherland, W. A., Heat Transfer in an annulus with variable circumferential heat flux, *Int. J. Heat Mass Transfer* **7**, 1187-1194, 1964.
29. Hsu, C. J., Heat transfer in round tube with sinusoidal wall heat flux distributions, *A.I.C.h.E J.* **11**, 690-695, 1965.
30. Bhattacharyya, T. K. and Ray, D. N., Laminar heat transfer in a round tube with variable circumferential or arbitrary heat flux, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **13**, 1051-1060, 1970.
31. Faghri, W., Welty J. R., Analysis of heat transfer, including axial fluid conduction, for laminar tube flow with arbitrary circumferential wall heat flux variation. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **21**, 317-323, 1976.
32. Quaresma, J. N. N., Cotta, R. M., Exact solution for thermally developing tube flow with variable wall heat flux, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, **21**, 729-742, 1994.
33. Barletta, A., Zanchini, E., Laminar forced convection with sinusoidal wall heat flux distribution : axially periodic regime. *Heat and Mass Transfer*, **31**, 41-48, 1995.
34. 葉士誠, 固定管壁熱通量於迴流型逆流式的同心圓柱套管熱交換器之研究,

淡江大學碩士論文(2004)。



附錄(一)

速度分佈式

利用連續方程式與全展流可得

$$\frac{\partial u(z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{A1})$$

所以

$$u = u(r) \quad (\text{A2})$$

再假設流體為牛頓流體，且 ρ 、 μ 為常數，由 Navier-Stokes 方程式得

$$-\frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{A3})$$

先求式(3.1.1)內管之速度分佈，其邊界條件為

$$r = 0 \quad u_a = \text{finite} \quad (\text{A4})$$

$$r = \kappa R \quad u_a = 0 \quad (\text{A5})$$

所以

$$u_a(r) = \frac{(\kappa R)^2}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{\kappa R} \right)^2 \right] \quad (\text{A6})$$

求 u_a 的平均速度 $\overline{u_a}$

$$\bar{u}_a = \frac{\int_0^{2\pi\kappa_1 R} \int_0^0 u_a r dr d\theta}{\int_0^{2\pi\kappa_1 R} \int_0^0 r dr d\theta} = \frac{(\kappa R)^2}{8\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (\text{A7})$$

則

$$u_a(\eta) = 2\bar{u}_a \left(1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right) \quad (\text{A8})$$

同理外管的速度分佈式(3.1.2)的邊界條件為

$$r = \kappa R \quad u_b = 0 \quad (\text{A9})$$

$$r = R \quad u_b = 0 \quad (\text{A10})$$

所以

$$u_b(r) = \frac{R^2}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln 1/\kappa} \right) \ln \frac{r}{R} \right] \quad (\text{A11})$$

求平均速度 \bar{u}_b

$$\bar{u}_b = \frac{\int_0^{2\pi R} \int_{\kappa R}^0 u_b r dr d\theta}{\int_0^{2\pi R} \int_{\kappa R}^0 r dr d\theta} = \frac{R^2}{8\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial z} \right) \left[\frac{1 - \kappa^4}{1 - \kappa^2} - \frac{1 - \kappa^2}{\ln \frac{1}{\kappa}} \right] \quad (\text{A12})$$

$$\text{令 } W_1 = \left[\frac{1 - \kappa^4}{1 - \kappa^2} - \frac{1 - \kappa^2}{\ln \frac{1}{\kappa}} \right] \quad (\text{A13})$$

$$u_b(\eta) = \frac{2\bar{u}_b}{W_1} \left[1 - (\eta)^2 + \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln 1/\kappa} \right) \ln \eta \right] \quad (\text{A14})$$



附錄(二)

弗賓納斯法求內外通道無因次溫度表示式

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \psi_a}{\partial \eta} \right) - \frac{B' \eta}{2\kappa^2} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \right] \psi_a = 0 \quad (\text{B1})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \psi_b}{\partial \eta} \right) + \frac{B'' \eta [1 - \eta^2 + W_2 \ln \eta]}{2W_1(1 - \kappa^2)} \psi_b = 0 \quad (\text{B2})$$

$$\frac{d\psi_a(0)}{d\eta} = 0 \quad (\text{B3})$$

$$\frac{d\psi_b(1)}{d\eta} = 1 \quad (\text{B4})$$

$$\frac{d\psi_a(\kappa)}{d\eta} = \frac{d\psi_b(\kappa)}{d\eta} \quad (\text{B5})$$

$$\psi_a(\kappa) = \psi_b(\kappa) \quad (\text{B6})$$

其中， B' 與 B'' 值如下表所示：

表(三十八) 不同迴流型式之 B' 與 B'' 值

型式	B'	B''
1(A)	B	B
1(B)	$-B$	$-B$
2(A)	$(M+1)B$	MB
2(B)	$-MB$	$-(M+1)B$
3(A)	B	$(M+1)B$
3(B)	$-(M+1)B$	$-B$
4(A)	$(M+1)B$	B
4(B)	$-B$	$-(M+1)B$
5(A)	$(M+1)B$	$(M+1)B$
5(B)	$-(M+1)B$	$-(M+1)B$

(一) 求內通道級數表示式

將下列級數代入上式(B1)

$$\begin{aligned}\psi_a(\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^{n+r} \\ \psi'_a(\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n \eta^{n+r-1} \\ \psi''_a(\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n \eta^{n+r-2}\end{aligned}\quad (\text{B7})$$

整理之後可得:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n \eta^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n \eta^{n+r-1} \\ - \frac{B'}{2\kappa^2} \left[\eta - \frac{\eta^3}{\kappa^2} \right] i \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^{n+r} = 0\end{aligned}\quad (\text{B8})$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) + (n+r)] a_n \eta^{n+r-1} \\ - \frac{B'}{2\kappa^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^{n+r+1} - \frac{1}{\kappa^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^{n+r+3} \right] i = 0\end{aligned}\quad (\text{B9})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 a_n \eta^{n+r-1} - \frac{B'}{2\kappa^2} \left[\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \eta^{n+r-1} - \frac{1}{\kappa^2} \sum_{n=4}^{\infty} a_{n-4} \eta^{n+r-1} \right] i = 0 \quad (\text{B10})$$

若令 $r=0$ ，則可將式(B10)改寫成

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n \eta^{n-1} - \frac{B'}{2\kappa^2} \left[\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \eta^{n-1} - \frac{1}{\kappa^2} \sum_{n=4}^{\infty} a_{n-4} \eta^{n-1} \right] i = 0 \quad (\text{B11})$$

當 $n=0$ a_0 為待定

當 $n=1$ $a_1 = 0$

當 $n=2$ $a_2 = \frac{B'}{8\kappa^2} a_0 i$

當 $n=3$ $a_3 = 0$

⋮

$$n^2 a_n - \frac{B'}{2\kappa^2} \left[a_{n-2} - \frac{1}{\kappa^2} a_{n-4} \right] i = 0 \quad (\text{B12})$$

$$a_n = \frac{B'}{2\kappa^2} \frac{1}{n^2} \left(a_{n-2} - \frac{1}{\kappa^2} a_{n-4} \right) i \quad (\text{B13})$$

故可知奇數項都為零，即 $a_{2n+1} = 0$

$$a_{2n} = \frac{B'}{8\kappa^2} \frac{1}{n^2} \left(a_{2n-2} - \frac{1}{\kappa^2} a_{2n-4} \right) i \quad (\text{B14})$$

(二) 求外通道級數表示式

將下列級數代入式(B2)

$$\begin{aligned} \psi_b(\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \eta^{n+r} \\ \psi'_b(\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) b_n \eta^{n+r-1} \\ \psi''_b(\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) b_n \eta^{n+r-2} \end{aligned} \quad (\text{B15})$$

整理之後可得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) + (n+r)] b_n \eta^{n+r-1} \\ & + \frac{B''}{2W_1(1-\kappa^2)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n \eta^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \eta^{n+r+3} + W_2 \ln \eta \sum_{n=0}^{\infty} b_n \eta^{n+r+1} \right] i = 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 b_n \eta^{n+r-1} \\ & + \frac{B''}{2W_1(1-\kappa^2)} \left[\sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} \eta^{n+r-1} - \sum_{n=4}^{\infty} b_{n-4} \eta^{n+r-1} + W_2 \ln \eta \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} \eta^{n+r-1} \right] i = 0 \end{aligned} \quad (\text{B16})$$

其中

$$\ln \eta = (\eta - 1) - \frac{(\eta - 1)^2}{2} + \frac{(\eta - 1)^3}{3} + \dots + \frac{(\eta - 1)^N}{N} \quad (\text{B17})$$

假設取到第二項

$$\ln \eta = (\eta - 1) - \frac{1}{2}(\eta - 1)^2 = -\frac{1}{2}\eta^2 + 2\eta - \frac{3}{2} \quad (\text{B18})$$

將式(B18)代入式(B16)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 b_n \eta^{n+r-1} \\ & + \frac{B''}{2W_1(1-\kappa^2)} \left[\sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} \eta^{n+r-1} - \sum_{n=4}^{\infty} b_{n-4} \eta^{n+r-1} \right. \\ & \quad \left. + W_2 \left(-\frac{1}{2}\eta^2 + 2\eta - \frac{3}{2} \right) \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} \eta^{n+r-1} \right] i = 0 \end{aligned} \quad (\text{B19})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 b_n \eta^{n+r-1} \\ & + \frac{B''}{2W_1(1-\kappa^2)} \left[\sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} \eta^{n+r-1} - \sum_{n=4}^{\infty} b_{n-4} \eta^{n+r-1} \right. \\ & \quad \left. + W_2 \left(-\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} \eta^{n+r+1} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} \eta^{n+r} - \frac{3}{2} \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} \eta^{n+r-1} \right) \right] i = 0 \end{aligned} \quad (\text{B20})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 b_n \eta^{n+r-1} \\ & + \frac{B''}{2W_1(1-\kappa^2)} \left[\sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} \eta^{n+r-1} - \sum_{n=4}^{\infty} b_{n-4} \eta^{n+r-1} \right. \\ & \quad \left. + W_2 \left(-\frac{1}{2} \sum_{n=4}^{\infty} b_{n-4} \eta^{n+r-1} + 2 \sum_{n=3}^{\infty} b_{n-3} \eta^{n+r-1} - \frac{3}{2} \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} \eta^{n+r-1} \right) \right] i = 0 \end{aligned} \quad (\text{B21})$$

若令 $r=0$ ，則可將式(B21)改寫成

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} n^2 b_n \eta^{n-1} \\ & + \frac{B''}{2W_1(1-\kappa^2)} \left[\sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} \eta^{n-1} - \sum_{n=4}^{\infty} b_{n-4} \eta^{n-1} \right. \\ & \quad \left. + W_2 \left(-\frac{1}{2} \sum_{n=4}^{\infty} b_{n-4} \eta^{n-1} + 2 \sum_{n=3}^{\infty} b_{n-3} \eta^{n-1} - \frac{3}{2} \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} \eta^{n-1} \right) \right] i = 0 \end{aligned} \quad (\text{B22})$$

$$n=0 \quad b_0 \text{ 為待定}$$

$$n=1 \quad b_1 = 0$$

$$n=2 \quad b_2 = \frac{-B''}{16W_1(1-\kappa^2)} (2-3W_2) b_0 i$$

$$n=3 \quad b_3 = \frac{-B''}{9(1-\kappa^2)W_1} W_2 b_0 i \quad (\text{B23})$$

⋮

$$b_n = \frac{-B''}{2W_1(1-\kappa^2)} \frac{1}{n^2} \left[\left(1 - \frac{3}{2} W_2 \right) b_{n-2} + 2W_2 b_{n-3} - \left(1 + \frac{1}{2} W_2 \right) b_{n-4} \right] i \quad (\text{B24})$$

定義

$$\psi_a(\eta) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} c_{an} \eta^{2n}, \quad c_{an} = \frac{a_{2n}}{a_0}, \quad n \geq 0 \quad (\text{B25})$$

$$\psi_b(\eta) = b_0 \sum_{n=0}^{\infty} c_{bn} \eta^n, \quad c_{bn} = \frac{b_n}{b_0}, \quad n \geq 0 \quad (\text{B26})$$

利用邊界條件式(B3)至(B6)可得:

$$a_1 = 0 \quad (\text{B27})$$

$$b_0 = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} n c_{bn}} \quad (\text{B28})$$

$$a_0 = \frac{b_0 \sum_{n=0}^{\infty} c_{bn} \kappa^n}{\sum_{n=0}^{\infty} c_{an} \kappa^{2n}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} c_{bn} \kappa^n}{\sum_{n=1}^{\infty} n c_{bn} \times \sum_{n=0}^{\infty} c_{an} \kappa^{2n}} \quad (\text{B29})$$



附錄(三)

單通道推導

無因次統制方程式如下:

$$\frac{u_0(\eta)R^2}{\alpha LGz} \frac{\partial \phi_0(\eta, \xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \phi_0(\eta, \xi)}{\partial \eta} \right) \right] \quad (C1)$$

其中

$$u_0(\eta) = 2\bar{u}_0(1 - \eta^2) \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (C2)$$

$$\bar{u}_0 = \frac{V}{\pi R^2} \quad (C3)$$

將式(C2)與式(C3)代入式(C1)，則式(C1)可變為

$$\frac{1}{2}(1 - \eta^2) \frac{\partial \phi_0(\eta, \xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \phi_0(\eta, \xi)}{\partial \eta} \right) \right] \quad (C4)$$

其無因次群為

$$\eta = \frac{r}{R}, \quad \xi = \frac{z}{L \cdot Gz}, \quad \phi_0 = \frac{k(T_0 - T_i)}{q_0'' R}, \quad Gz = \frac{4V}{\alpha \pi L}, \quad B = \beta GzL \quad (C5)$$

且邊界條件為

$$\frac{\partial \phi_0(0, \xi)}{\partial \eta} = 0 \quad (C6)$$

$$\frac{\partial \phi_0(1, \xi)}{\partial \eta} = 1 + \sin(B\xi) \quad (C7)$$

$$\phi_F\left(\eta, \frac{1}{Gz}\right) = \frac{1}{V} \int_0^1 u_0 2\pi R^2 \eta \phi_0\left(\eta, \frac{1}{Gz}\right) d\eta \quad (C8)$$

假設單通道無因次溫度分佈^[33]如下：

$$\phi_0(\eta, \xi) = \theta_0 \xi + \theta_1(\eta) + \theta_2(\eta) \sin(B\xi) + \theta_3(\eta) \cos(B\xi) \quad (C9)$$

將式(C9)代入統制方程式及邊界條件可得：

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_1(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{\theta_0}{2} \eta (1 - \eta^2) \\ & + \left[\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_2(\eta)}{d\eta} \right) + \frac{B}{2} \eta (1 - \eta^2) \theta_3(\eta) \right] \sin(B\xi) \\ & + \left[\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_3(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{B}{2} \eta (1 - \eta^2) \theta_2(\eta) \right] \cos(B\xi) = 0 \end{aligned} \quad (C10)$$

$$\frac{d\theta_1(0)}{d\eta} + \frac{d\theta_2(0)}{d\eta} \sin(B\xi) + \frac{d\theta_3(0)}{d\eta} \cos(B\xi) = 0 \quad (C11)$$

$$\left[\frac{d\theta_1(1)}{d\eta} - 1 \right] + \left(\frac{d\theta_2(1)}{d\eta} - 1 \right) \sin(B\xi) + \left(\frac{d\theta_3(1)}{d\eta} \right) \cos(B\xi) = 0 \quad (C12)$$

由式(C10)令

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_1(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{\theta_0}{2} \eta (1 - \eta^2) = 0 \quad (C13)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_2(\eta)}{d\eta} \right) + \frac{B}{2} \eta (1 - \eta^2) \theta_3(\eta) = 0 \quad (C14)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_3(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{B}{2} \eta (1 - \eta^2) \theta_2(\eta) = 0 \quad (C15)$$

由式(C11)令

$$\frac{d\theta_1(0)}{d\eta} = 0 \quad (C16)$$

$$\frac{d\theta_2(0)}{d\eta} = 0 \quad (C17)$$

$$\frac{d\theta_3(0)}{d\eta} = 0 \quad (C18)$$

由式(C12)令

$$\frac{d\theta_1(1)}{d\eta} = 1 \quad (C19)$$

$$\frac{d\theta_2(1)}{d\eta} = 1 \quad (C20)$$

$$\frac{d\theta_3(1)}{d\eta} = 0 \quad (C21)$$

為了求得 $\theta_2(\eta)$ 、 $\theta_3(\eta)$ 假設^[33]

$$\psi_0(\eta) = \theta_2(\eta) + \theta_3(\eta)i \quad (C22)$$

利用式(C22)可將式(C14)、式(C15)、式(C17)、式(C18)、式(C20)

及式(C21)合併成

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_0(\eta)}{d\eta} \right) - \frac{B}{2} \eta (1 - \eta^2) \psi_0(\eta) i = 0 \quad (C23)$$

$$\frac{d\psi_0(0)}{d\eta} = 0 \quad (C24)$$

$$\frac{d\psi_0(1)}{d\eta} = 1 \quad (C25)$$

以下我們將分為兩個部分來求解未知數：

(一) 求 $\theta_2(\eta)$ 與 $\theta_3(\eta)$

將下列級數帶入式(C23)

$$\psi_0(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^{n+r}$$

$$\psi_0'(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n \eta^{n+r-1}$$

$$\psi_0^n(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n \eta^{n+r-2} \quad (C26)$$

可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 a_n \eta^{n+r-1} + \frac{B}{2} i \sum_{n=4}^{\infty} a_{n-4} \eta^{n+r-1} - \frac{B}{2} i \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \eta^{n+r-1} = 0 \quad (C27)$$

若令 $r=0$ ，則式(C27)可變為

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n \eta^{n-1} + \frac{B}{2} i \sum_{n=4}^{\infty} a_{n-4} \eta^{n-1} - \frac{B}{2} i \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \eta^{n-1} = 0 \quad (C28)$$

當 $n=0$ a_0 為待定

當 $n=1$ $a_1 = 0$

當 $n=2$ $a_2 = \frac{B}{8} a_0 i$

當 $n=3$ $a_3 = 0 \quad (C29)$

\vdots

$$a_{2n} = \frac{B}{8} \frac{1}{n^2} (a_{2n-2} - a_{2n-4}) i \quad (C30)$$

定義

$$\psi_0(\eta) = \lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \eta^{2n} \quad c_n = \frac{a_{2n}}{a_0}, \quad n \geq 0 \quad (C31)$$

將邊界條件式(C25)代入式(C31)可得

$$\lambda_0 = \frac{1}{2 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n} \quad (C32)$$

由式(C31)與(C22)比較可得 $\theta_2(\eta)$ 與 $\theta_3(\eta)$ 。

(二) 求 θ_0 與 $\theta_1(\eta)$

將式(C13)積分兩次可得：

$$\theta_1(\eta) = \frac{\theta_0}{2} \left(\frac{1}{4} \eta^2 - \frac{1}{16} \eta^4 + \gamma_1 \ln \eta + \gamma_2 \right) \quad (\text{C33})$$

其中 γ_1 與 γ_2 為積分常數。

將式(C33)代回式(C16)與式(C19)可求得

$$\theta_0 = 8 \quad (\text{C34})$$

$$\gamma_1 = 0 \quad (\text{C35})$$

再由邊界條件式(C8)

$$\begin{aligned} \phi_F \left(\eta, \frac{1}{Gz} \right) &= \frac{1}{V} \int_0^1 u_0 2\pi R^2 \eta \phi_0 \left(\eta, \frac{1}{Gz} \right) d\eta \\ &= 8 \left[\frac{1}{Gz} - \frac{1}{B} \left(\cos \left(\frac{B}{Gz} \right) - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C36})$$

可得 γ_2 即 $\theta_1(\eta)$ 可知。

即可求得單通道無因次溫度分佈表示式

$$\phi_0(\eta, \xi) = \theta_0 \xi + \theta_1(\eta) + \theta_2(\eta) \sin(B\xi) + \theta_3(\eta) \cos(B\xi)。$$