

淡江大學化學工程與材料工程學系碩士班

碩士論文

指導教授： 何啟東 博士

平板型熱擴散塔提煉重水之解析解研究

An Analytical Study on the Heavy Water
Enrichment in Laminar Counter-flow Flat-Plate
Thermal-Diffusion Columns

研究生： 王瓊徵 撰

中華民國 95 年 6 月

致謝

感謝指導教授何啟東博士悉心的指導，引領我進入此一研究領域，讓我從中不斷獲得新知，尤其是這兩年來在生活上及課業上的敦敦教誨，也使得我在研究所的這段時間內對於生活處事與求學的態度有所進步且受益良多，並促使本論文可以順利完成，於此致上我由衷的感謝。

承蒙本系所葉和明教授及成功大學蔡少偉教授在百忙中撥空審閱本文並給予指導與糾正且提供許多寶貴意見，謹此致謝。

此外，對於系上師長在課程上的指導亦表感謝之意。另外，亦感謝實驗室學長家展、志偉、宗慶，畢業學長俊傑、育睿及同學贄銘、立謙和學弟君豪、政融、治強在程式及論文寫作上諸多幫忙，並在生活上給予關心及照顧，而使我在研究生涯裡更為充實。

最後，特別感謝父母及兄弟姊妹的支持及照顧。謹以此文獻給所有曾經陪伴我渡過這些日子的人。

論文名稱：平板型熱擴散塔提煉重水之解析解研究

頁數：200

校系(所)組別：淡江大學 化學工程與材料工程 學系碩士班 A 組

畢業時間及提要別：94 學年度第 2 學期 碩士 學位論文提要

研究生：王瓊徵

指導教授：何啟東 博士

論文提要內容：

本研究以平板型熱擴散塔為主題，針對具變出料質量分率對熱擴散塔提煉重水效率改善之研究。本文之理論模式主要探討利用分離變數法配合正交展開方法，求得平板型熱擴散塔之解析解研究。雖然解析解的計算過程比傳送公式較為繁複，但其理論數學之模擬結果與實驗結果比較卻更為精確。同時，本研究亦針對不同的操作參數：進料質量流率、進料濃度分率及進料位置和設計參數：改變長寬比、傾斜角、板距及固定操作成本下之板距，以期能提升熱擴散塔之分離效果。

本文首先推導進料質量流率、進料濃度分率、出料質量分率及進料位置之平板型熱擴散塔的分離度公式；接著，探討變出料質量分率、改變長寬比及傾斜角度對平板型熱擴散塔之影響；而後，推導了含有變出料質量分率的板距公式，並比較在固定操作成本與無固定操作成本下之板距的分離度變化。最後，藉由文獻資料中之實驗數據來驗證本研究理論分析之可靠性結果是相當吻合。由此可以證明，改善平板型熱擴散塔之操作參數和設計參數有助於提高重水之分離效果。

Title of Thesis: An Analytical Study on the Heavy Water

Total papers: 200

Enrichment in Laminar Counter-flow Flat-Plate
Thermal-Diffusion Columns

Key words: Flow-Rate Fraction Variations, Separation Efficiency, Thermal Diffusion,
Orthogonal Expansion Techniques, Flat-Plate

Name of Institute: Graduate Institute of Chemical and Materials Engineering,
Tamkang University

Graduate date: June, 2006

Degree conferred: Master

Name of student: Chiung-Jeng Wang

Advisor: Dr. Chii-Dong Ho

王瓊徵

何啟東

Abstract:

Heavy water enrichment in laminar counter-flow flat-plate thermal-diffusion columns has been studied theoretically. The phenomena of mass transfer through a thermogravitational thermal-diffusion column with uniform wall temperature, one heated and the other one cooled, has been investigated by using an orthogonal expansion technique in extended power series. The method of solution is based on the Sturmian theory and requires only positive eigenvalues for enriching section and negative eigenvalues for stripping section during the derivation of the top and bottom product concentrations. The analytical results are represented graphically and compared with those obtained from the transport equation by the previous investigators as well as with the experimental results. The agreement of theoretical predictions in the present study with those calculated from experimental results obtained from the previous investigations is pretty good. Moreover, as compared to the experimental results, the accuracy of the theoretical predications in the study is better than that calculated by the transport equation. The effects of operating

parameters (feed rate, feed concentration, product flow-rate and feed position), and design parameters (aspect ratio, inclined angle, plate spacing and plate-spacing under the considerations of fixed operating expense) on the separation efficiency enrichment have also been discussed.



目 錄

中文摘要	I
英文摘要	II
目錄	IV
圖目錄	VII
表目錄	XVI
第一章 緒論	1
1.1 熱擴散之起源	1
1.2 熱擴散塔之發展與沿革	5
1.3 熱擴散之應用	9
1.4 重水及其用途	13
1.5 研究動機與目的	28
第二章 基本理論	30
2.1 熱擴散塔之基本理論	30
2.1.1 傳送公式之近似解	30
2.1.2 傳送公式之簡化—常數近似	40

2.1.3	簡化後之分離度公式	42
2.2	數學模式之解析解	45
2.2.1	溫度分佈	46
2.2.2	速度分佈	47
2.2.3	濃度分佈	47
2.2.4	待定係數	52
2.2.5	特徵係數	54
2.2.6	熱擴散塔分離度	58
2.3	影響熱擴散塔之參數	61
2.3.1	出料質量分率、進料質量流率、進料濃度分率及進料 位置之熱擴散塔理論分析	62
2.3.2	出料質量分率、固定操作面積下之長寬比及傾斜角之 熱擴散塔理論分析	65
2.3.3	出料質量分率、板距及固定操作成本下板距之熱擴散 塔理論分析	69
第三章	三成份系統重水之熱物性質估算	75
3.1	熱膨脹係數(β_T)之估算	75
3.2	減數熱擴散係數(α)及普通擴散係數(D)之估算	77

第四章	結果與討論	84
4.1	出料質量分率、進料質量流率、進料濃度分率及進料位置 之結果與討論	86
4.2	出料質量分率、固定操作面積下之長寬比及傾斜角之結果 與討論	132
4.3	出料質量分率、板距及固定操作成本下板距之結果與討論	152
第五章	結論	164
	符號說明	166
	參考文獻	175
附錄 A	增濃段與提取段之速度分佈	188
附錄 B	正交性質證明	194
附錄 C	特徵係數	196



圖目錄

圖(1.1)	Ludwing 的實驗裝置之示意圖	2
圖(1.2)	濃度差所產生的瞬間溫度梯度之示意圖	3
圖(1.3)	溫度差所產生的濃度差之示意圖	4
圖(1.4)	水平式熱擴散塔裝置之示意圖	7
圖(1.5)	熱重力熱擴散塔裝置之示意圖	8
圖(1.6)	核分裂與核融合	18
圖(2.1)	連續式平板型熱擴散塔提煉重水示意圖	31
圖(2.2)	25°C 下 C_3 與 $C\hat{C}$ 之關係圖	39
圖(2.3)	連續式平板型熱擴散傾斜塔提煉重水示意圖	66
圖(3.1)	傳送係數求解之流程圖	80
圖(4.1-1)	固定進料濃度分率 $C_F = 0.381$ 與進料位置 $\delta = 0.5$ ，在不同出料質量分率下，進料質量流率與特徵值之關係圖	91
圖(4.1-2)	固定進料濃度分率 $C_F = 0.381$ 與出料質量分率 $r = 0.5$ ，在不同進料位置下，進料質量流率與特徵值之關係圖	92
圖(4.1-3)	固定進料濃度分率 $C_F = 0.381$ 與進料位置 $\delta = 0.5$ ，在不同進料質量流率下，出料質量分率與特徵值之關係圖	

圖(4.1-4) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與進料濃度分率 $C_F = 0.381$ ，在不同進料位置下，出料質量分率與特徵值之關係圖 94

圖(4.1-5) 固定進料濃度分率 $C_F = 0.381$ 與出料質量分率 $r = 0.5$ ，在不同進料質量流率下，進料位置與特徵值之關係圖 95

圖(4.1-6) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與進料濃度分率 $C_F = 0.381$ ，在不同出料質量分率下，進料位置與特徵值之關係圖 96

圖(4.1-7) 固定進料濃度分率 $C_F = 0.381$ 與進料位置 $\delta = 0.5$ ，在不同出料質量分率下，進料質量流率與分離度之關係圖 97

圖(4.1-8) 固定出料質量分率 $r = 0.5$ 與進料位置 $\delta = 0.5$ ，在不同進料濃度分率下，進料質量流率與分離度之關係圖 98

圖(4.1-9) 固定出料濃度分率 $C_F = 0.381$ 與出料質量分率 $r = 0.5$ ，在不同進料位置下，進料質量流率與分離度之關係圖 99

- 圖(4.1-10) 固定出料濃度分率 $C_F = 0.381$ ，在不同出料質量分率與進料位置下，進料質量流率與分離度之關係圖 100
- 圖(4.1-11) 固定出料質量分率 $r = 0.5$ ，在不同進料濃度分率與進料位置下，進料質量流率與分離度之關係圖 101
- 圖(4.1-12) 固定進料位置 $\delta = 0.5$ ，在不同進料濃度分率與出料質量分率下，進料質量流率與分離度之關係圖 102
- 圖(4.1-13) 固定出料質量分率 $r = 0.5$ 與進料位置 $\delta = 0.5$ ，在不同進料質量流率下，進料濃度分率與分離度之關係圖 103
- 圖(4.1-14.1) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與進料位置 $\delta = 0.5$ ，在不同出料質量分率下，進料濃度分率與分離度之關係圖 104
- 圖(4.1-14.2) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與進料位置 $\delta = 0.5$ ，在不同出料質量分率下，進料濃度分率與分離度之關係圖 105
- 圖(4.1-15.1) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與出料質量分率 $r = 0.5$ ，在不同進料位置下，進料濃度分率與分離度之關係圖 106

- 圖(4.1-15.2) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與出料質量分率 $r=0.5$ ，在不同進料位置下，進料濃度分率與分離度之關係圖 107
- 圖(4.1-16) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ ，在不同出料質量分率與進料位置下，進料濃度分率與分離度之關係圖 108
- 圖(4.1-17) 固定出料質量分率 $r=0.5$ ，在不同進料質量流率與進料位置下，進料濃度分率與分離度之關係圖 109
- 圖(4.1-18) 固定進料位置 $\delta=0.5$ ，在不同進料質量流率與出料質量分率下，進料濃度分率與分離度之關係圖 110
- 圖(4.1-19) 固定進料位置 $\delta=0.5$ 與進料濃度分率 $C_F = 0.381$ ，在不同進料質量流率下，出料質量分率與分離度之關係圖 111
- 圖(4.1-20) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與進料位置 $\delta=0.5$ ，在不同進料濃度分率下，出料質量分率與分離度之關係圖 112
- 圖(4.1-21) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與進料濃度分率 $C_F = 0.381$ ，在不同進料位置下，出料質量分率與分離度之關係圖 113

- 圖(4.1-22) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ ，在不同進料濃度分率與進料位置下，出料質量分率與分離度之關係圖 114
- 圖(4.1-23) 固定進料濃度分率 $C_F = 0.381$ ，在不同進料質量流率與進料位置下，出料質量分率與分離度之關係圖 115
- 圖(4.1-24) 固定進料位置 $\delta = 0.5$ ，在不同進料質量流率與進料濃度分率下，出料質量分率與分離度之關係圖 116
- 圖(4.1-25) 固定出料質量分率 $r = 0.5$ 與進料濃度分率 $C_F = 0.381$ ，在不同進料質量流率下，進料位置與分離度之關係圖 117
- 圖(4.1-26) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與出料質量分率 $r = 0.5$ ，在不同進料濃度分率下，進料位置與分離度之關係圖 118
- 圖(4.1-27) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與進料濃度分率 $C_F = 0.381$ ，在不同出料質量分率下，進料位置與分離度之關係圖 119
- 圖(4.1-28) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ ，在不同進料濃度分率與出料質量分率下，進料位置與分離度之關係圖

	係圖	120
圖(4.1-29)	固定進料濃度分率 $C_F = 0.381$ ，在不同進料質量流率與出料質量分率下，進料位置與分離度之關係圖	121
圖(4.1-30)	固定出料質量分率 $r = 0.5$ ，在不同進料質量流率與進料濃度分率下，進料位置與分離度之關係圖	122
圖(4.1-31)	固定出料質量分率 $r = 0.5$ 、進料位置 $\delta = 0.5$ 與進料濃度分率 $C_F = 0.0995$ 下，解析解、近似解與實驗值求得進料質量流率與分離度之關係比較圖	123
圖(4.1-32)	固定出料質量分率 $r = 0.5$ 與進料濃度分率 $C_F = 0.381$ 下，解析解、近似解與實驗值求得進料質量流率與分離度之關係比較圖	124
圖(4.1-33)	固定出料質量分率 $r = 0.5$ 、進料位置 $\delta = 0.167$ 與進料濃度分率 $C_F = 0.381$ 下，解析解與實驗值求得進料質量流率與分離度之關係比較圖	125
圖(4.1-34)	固定出料質量分率 $r = 0.5$ 、進料位置 $\delta = 0.5$ 與進料濃度分率 $C_F = 0.381$ 下，解析解與實驗值求得進料質量流率與分離度之關係比較圖	126
圖(4.1-35)	固定出料質量分率 $r = 0.5$ 、進料位置 $\delta = 0.833$ 與進料	

- 濃度分率 $C_F = 0.381$ 下，解析解與實驗值求得進料質量流率與分離度之關係比較圖 127
- 圖(4.1-36) 固定進料位置 $\delta = 1/6$ 與 $\sigma_F = 1.39 \times 10^{-4} \text{ g/s}$ ，在不同進料濃度分率下，解析解與實驗值求得出料質量分率與分離度之關係比較圖 128
- 圖(4.1-37) 固定進料位置 $\delta = 5/6$ 與 $\sigma_F = 1.39 \times 10^{-4} \text{ g/s}$ ，在不同進料濃度分率下，解析解與實驗值求得出料質量分率與分離度之關係比較圖 129
- 圖(4.1-38) 固定進料位置 $\delta = 1/6$ 與 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-4} \text{ g/s}$ ，在不同進料濃度分率下，解析解與實驗值求得出料質量分率與分離度之關係比較圖 130
- 圖(4.1-39) 固定進料位置 $\delta = 5/6$ 與 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-4} \text{ g/s}$ ，在不同進料濃度分率下，解析解與實驗值求得出料質量分率與分離度之關係比較圖 131
- 圖(4.2-1) 固定長寬比 $\xi = 12.2$ ，在不同傾斜角下，出料質量分率與特徵值之關係圖 135
- 圖(4.2-2) 固定於直立塔($\theta = 0^\circ$)，在不同長寬比下，出料質量分率與特徵值之關係圖 136
- 圖(4.2-3) 固定出料質量分率 $r = 0.5$ ，在不同傾斜角下，長寬比

	與特徵值之關係圖	137
圖(4.2-4)	固定於直立塔($\theta = 0^\circ$)，在不同出料質量分率下，長寬比與特徵值之關係圖	138
圖(4.2-5)	固定出料質量分率 $r = 0.5$ ，在不同長寬比下，傾斜角與特徵值之關係圖	139
圖(4.2-6)	固定長寬比 $\xi = 12.2$ ，在不同出料質量分率下，傾斜角與特徵值之關係圖	140
圖(4.2-7)	固定長寬比 $\xi = 12.2$ ，在不同傾斜角下，出料質量分率與分離度之關係圖	141
圖(4.2-8)	固定長寬比 $\xi = 12.2$ ，在不同傾斜角下，出料質量分率與分離度之關係圖	142
圖(4.2-9)	固定於直立塔($\theta = 0^\circ$)，在不同長寬比下，出料質量分率與分離度之關係圖	143
圖(4.2-10)	固定於直立塔($\theta = 0^\circ$)，在不同長寬比下，出料質量分率與分離度之關係圖	144
圖(4.2-11)	在不同長寬比與傾斜角下，出料質量分率與分離度之關係圖	145
圖(4.2-12)	固定出料質量分率 $r = 0.5$ ，在不同傾斜角下，長寬比與分離度之關係圖	146

圖(4.2-13)	固定於直立塔($\theta=0^\circ$), 在不同出料質量分率下, 長寬比與分離度之關係圖	147
圖(4.2-14)	在不同出料質量分率與傾斜角下, 長寬比與分離度之關係圖	148
圖(4.2-15)	固定出料質量分率 $r=0.5$, 在不同長寬比下, 傾斜角與分離度之關係圖	149
圖(4.2-16)	固定長寬比 $\xi=12.2$, 在不同出料質量分率下, 傾斜角與分離度之關係圖	150
圖(4.2-17)	在不同出料質量分率與長寬比下, 傾斜角與分離度之關係圖	151
圖(4.3-1)	在無固定操作成本, 不同板距下, 出料質量分率與特徵值之關係圖	154
圖(4.3-2)	在固定操作成本, 不同板距下, 出料質量分率與特徵值之關係圖	155
圖(4.3-3)	在無固定操作成本, 不同出料質量分率下, 板距與特徵值之關係圖	156
圖(4.3-4)	在固定操作成本, 不同出料質量分率下, 板距與特徵值之關係圖	157
圖(4.3-5)	在無固定操作成本, 不同板距下, 出料質量分率與分	

	離度之關係圖	158
圖(4.3-6)	在固定操作成本，不同板距下，出料質量分率與分離度之關係圖	159
圖(4.3-7)	在無固定操作成本與固定操作成本，不同板距下，出料質量分率與分離度之關係圖	160
圖(4.3-8)	在無固定操作成本，不同出料質量分率下，板距與分離度之關係圖	161
圖(4.3-9)	在固定操作成本，不同出料質量分率下，板距與分離度之關係圖	162
圖(4.3-10)	在無固定操作成本與固定操作成本，不同出料質量分率下，板距與分離度之關係圖	163

表目錄

表(1.1)	熱擴散塔分離高價物質之實例摘要一覽表	10
表(1.2)	普通水與重水之比較	14
表(3.1)	實驗數據求得之傳送係數	81

第一章

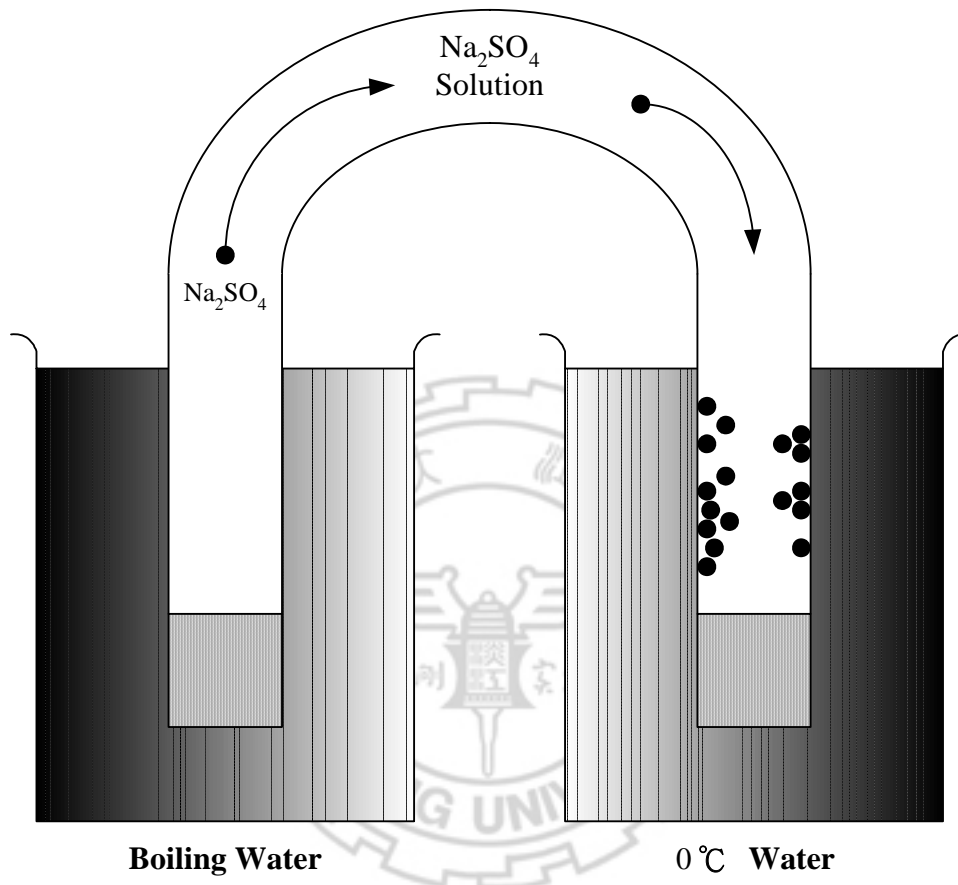
緒論

1.1 熱擴散之起源

文獻記載中首次紀錄的熱擴散現象之研究始於 1856 年 Ludwing 氏^[1]的報告，報告中指出，當 0°C 飽和之硫酸鈉溶液被裝入一倒置的 U 型管時，其一邊置於保持在 0°C 溫度的水中，而另一邊則置於沸騰的熱水中，如圖(1-1)，於數天後在 0°C 水中之管柱內有硫酸鈉的結晶形成。此實驗證實了硫酸鈉於 U 型管中由熱邊到冷邊有一淨質量的傳送發生。

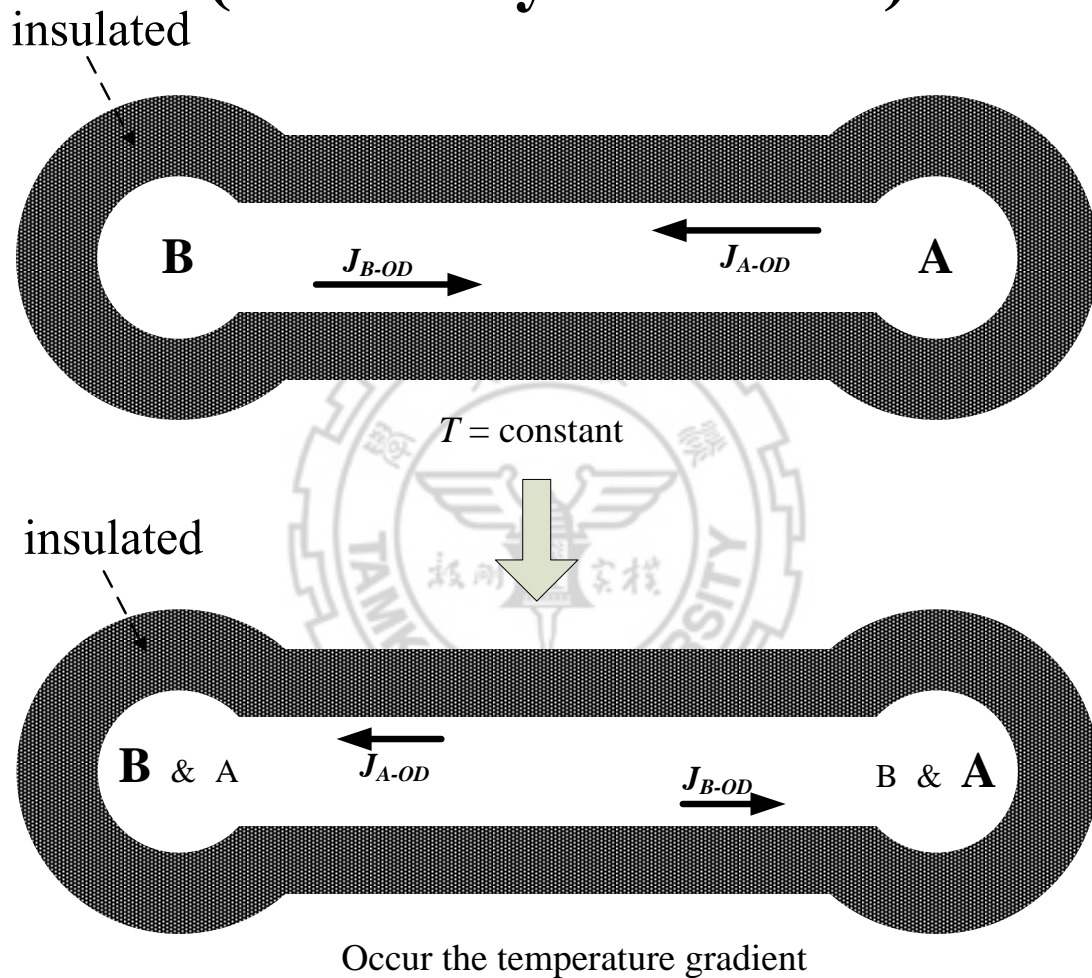
接著於 1872 年 Dufour 氏^[2]在研究氣體擴散現象時發現，如圖(1-2)，當溫度相同，而相異濃度的兩成份氣體溶液，在彼此自然混合的過程中，由於兩氣體混合物間會產生普通擴散(ordinary diffusion)的作用，而產生一短暫的溫度梯度，此又稱為 Dufour 效應。

1911 年 Enskog 氏^[3]由氣體動力學推論得知，倘若對一均勻濃度之氣體混合物施以一溫度梯度，則會瞬間產生一濃度梯度，可知此系統中有一普通擴散，此種現象稱之為熱擴散效應(thermal diffusion)，亦即 Soret 效應，如圖(1-3)。而直到 1917 年 Chapman Dootson 兩氏^[4]利用實驗證實了此一熱擴散現象。



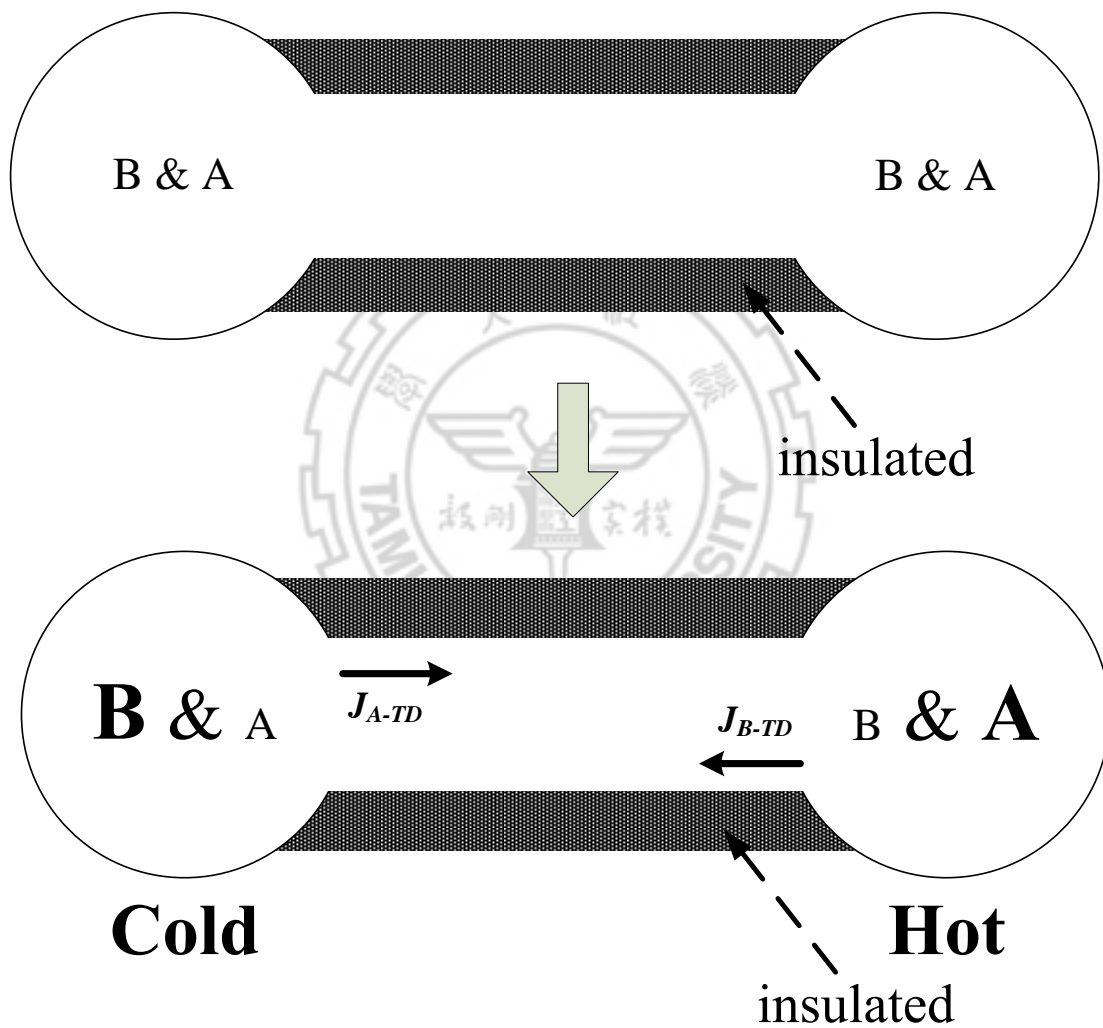
圖(1.1) Ludwing 的實驗裝置之示意圖

DuFour Effect (Ordinary Diffusion)



圖(1.2) 濃度差所產生的瞬間溫度梯度之示意圖

Soret Effect (Static Thermal Diffusion)



圖(1.3) 溫度差所產生的濃度差之示意圖

1.2 熱擴散之發展與沿革

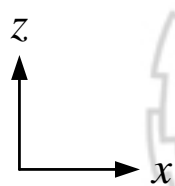
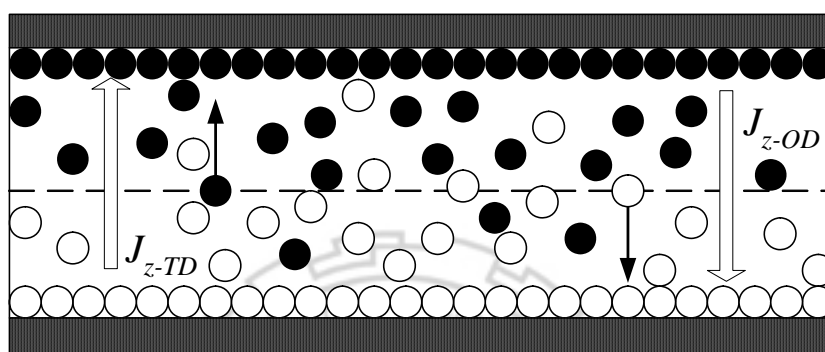
早期研究熱擴散現象都只侷限於氣體混合系統，而研究液體溶液之熱擴散現象直至 1929 年才由 Chapman 和 Dootson 氏^[5]開始著手進行。當時的實驗裝置如圖(1-4)乃是由兩水平放置的平板所組成，其上板的溫度較下板溫度高，介於兩平板間有一均勻濃度的液體，由於垂直方向有溫度差的關係，而產生了一溫度梯度，使得熱擴散效應僅沿垂直方向發生，而將兩成份液體之某一成份移向冷板，另一成份則移向熱板，因而生成一濃度梯度，進而產生了分離之效果。由於此種屬於靜態系統(static system)的熱擴散裝置，且熱擴散現象所產生的濃度梯度也會導致普通擴散作用的產生，進而抑制了熱擴散塔的分離效果，故此種熱擴散裝置並不實用。

Clusius 和 Dickel 兩氏^[6, 7]在 1938 年設計了一較為實用的熱重力熱擴散塔(thermogravitational thermal diffusion column)，俗稱之為 Clusius-Dickel Column(簡稱 C-D Column)，如圖(1-5)。此裝置係將兩平板垂直放置，且在於兩平板間給予一水平方向的溫度梯度系垂直於冷、熱兩壁，由於熱擴散的作用，使塔內均勻組成之二成份系混合物，將其中一成份帶往冷壁，另一成份則帶往熱壁。此時，由於一般流體會因受熱後體積膨脹、密度減小而上升，故冷熱壁溫度的差異而造成密度梯度，在兩壁中亦導致自然對流之發生，同時，將靠近冷壁之各

成份物質往下傳送，而靠近熱壁之各成份物質則往上傳送。此種現象又稱為續流效應(cascading effect)，此效應類似蒸餾或萃取塔中之多級逆向流之效果(multistage effect of countercurrent extraction)，稱為多級熱擴散效應，可在塔頂級塔底獲得濃度不同的溶液而達分離效應，有效地提高了分離效果。然而自然對流作用亦有其缺點，當對流作用將塔頂某一成份濃度較高之流體由上向下傳送至較低濃度的塔底，同時，又將塔底另一成份濃度較高之流體由下向上傳送至較低濃度的塔頂，由於塔頂和塔底的流體流動與濃度梯度所引起之普通擴散作用，遂造成再混合效應(remixing effect)，而降低了分離效果。

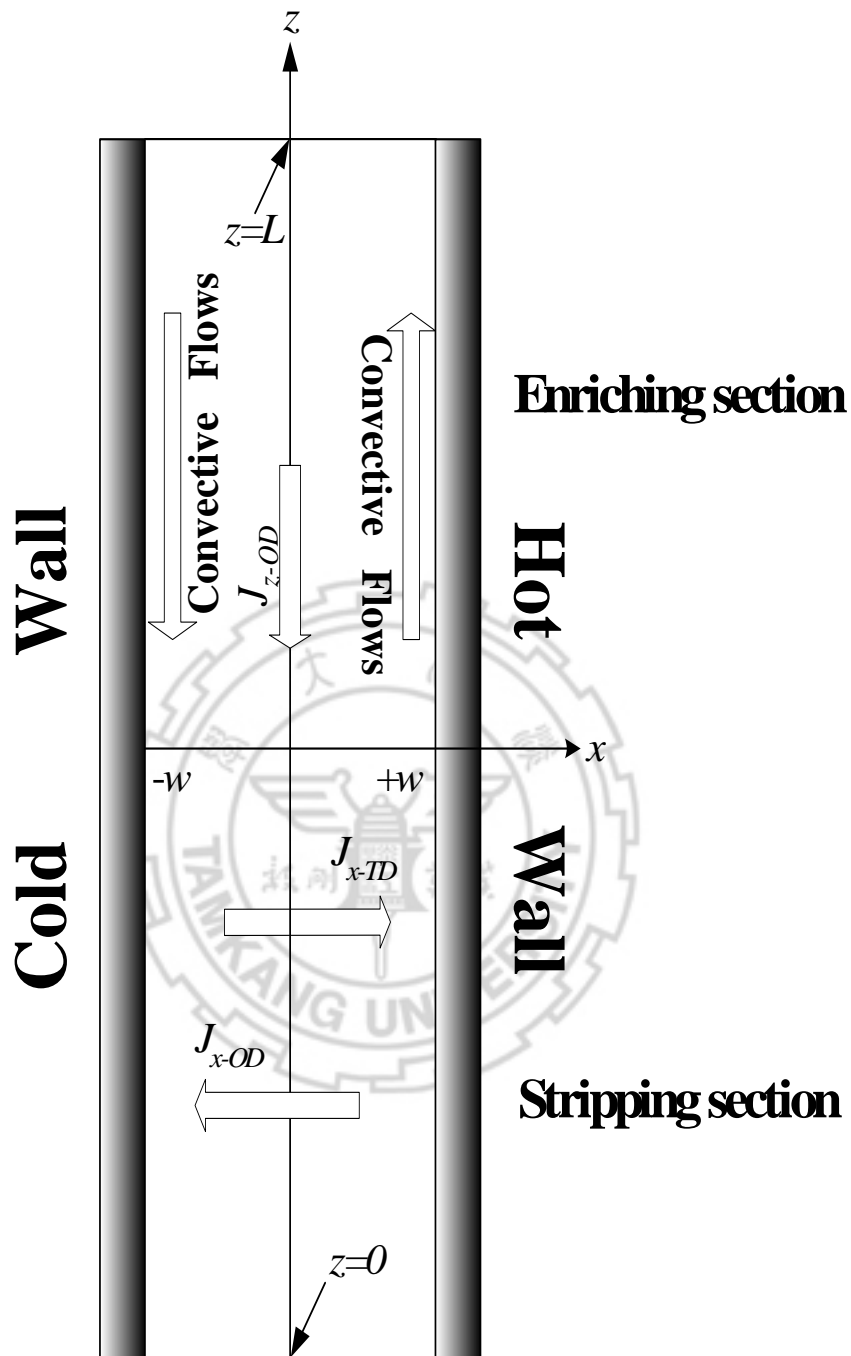
熱重力熱擴散塔的出現，可將由熱擴散分離物質的效率提高，因此引發一些學者對熱擴散塔之研究。由於熱重力熱擴散塔中的自然對流作用，同時具有促進分離效果的續流效應及抑制分離效果的再混合效應，因此，倘若將對流作用作一適當的控制，則使其再混合效應降低，而增強續流效應，進而達到最大之分離效果，此乃學著們研究改良型熱擴散塔所依據之基本原理。

Hot wall



Cold wall

圖(1.4) 水平式熱擴散塔裝置之示意圖



圖(1.5) 熱重力熱擴散塔裝置之示意圖

1.3 熱擴散之應用

熱擴散塔分離之技術主要使用於氣相和液相系統。此等溶液大多是以普通方法不易分離之混合物，尤其是高價物質如：(1)生化物質，(2)一般的同位素，(3)氫的同位素等三大類。由於這些物質是結構相近，物理、化學性質相似，或無法在高溫下操作，因此無法以傳統分離物質的蒸餾、萃取、電解等方法來加以分離，就算可以，也需要耗費相當多的能源或材料，基於操作成本的考量，熱擴散塔有此一優點。今分別將這些分離之實例敘述如下：

- (1) 生化物質：1975 年 Touchstone 用高度 30 公分之熱擴散塔，兩壁間距 0.3 mm，冷壁溫度 0°C，熱壁溫度 37°C，經 48 小時批次操作，由孕婦尿液中分離出結構很類似，為其它方法不易分離之 estrone，estradiol-17 β ，epiestriol，和 estriol 等物質。
- (2) 一般同位素：1968 年 Rutherford 在美國 Monsanto 公司，利用 24 個熱擴散塔，分離天然氙氣(xenon)中之 ^{124}Xe 同位素，他以批式法操作，經 150 天後，使 ^{124}Xe 由天然含量的 0.096 % 增濃至 6 % 左右。
- (3) 氫同位素：1952 年 Prigogine 以 10 公分高之熱擴散塔，其塔寬為 5 公分，間距為 0.25 mm，上下兩端儲槽體積 0.75 c.c.，冷熱壁溫差 20°C，最初進料之 D₂O 莫耳濃度分別為 1.1 %，4.3 %，10.4

%，57.3 %，83.9 %時，經 5 天批式操作分離後，其所得到的分離度以莫耳分率表示，分別是：0.11 %，0.34 %，0.82 %，1.2 % 及 0.35 %。

表(1.1) 熱擴散塔分離高價物質之實例摘要一覽表^[8]

種類	參考文獻與年代
I：生生物質：(biological materials)	
(1) Papain and diastase solution	Stickle; 1954
(2) Ergosterol and cholesterol in chloroform solution	Stickle; 1954
(3) Casin, gelatin, egg albumin, papain, and diastase	Stickle; 1954
(4) Carbohydrate solutions	Pawlowski; 1965
(5) Homologous fatty acids	Stickle; 1954
(6) Monomer and dimmer unsaturated fatty acids	Seelback; 1955
(7) Dibasic acids esters	Seelback; 1955
(8) Primary and secondary amines	Seelback; 1955
(9) Aromatic heterocyclic amines	Seelback; 1955
(10) Mono-, di-, and trimesters of polyols	Seelback; 1955
(11) Polyoxyethylene sorbital esters of resin and fatty acids	Seelback; 1955
(12) Fatty acids and polyol esters	Seelback; 1955

(13) Mono- and dicarboxylic acids	Seelback; 1955
(14) Alicyclic and aliphatic alcohols	Seelback; 1955
(15) Alkyl amines and hydrocarbons and phenols and aromatic hydrocarbons	Seelback; 1955
(16) Methyl esters of soybean oils, mixed soybean oil esters resulting from partial methanolysis, and crude mono-, di-, and trioleate mixtures	Seelback; 1955
(17) Viruses and ribosomes	Gaeta and Cursio; 1969
(18) Deoxyribonucleic acids	Gaeta and Cursio; 1969
(19) Glutamic-pyruvic transaminase (SGPT)	Gold; 1971
(20) Estrone, estradiol-17 β , epiestriol, and estriol of urine from pregnant woman	Touchstone; 1975
II : 一般同位素 :	
(1) $^{235}\text{UF}_6$ - $^{238}\text{UF}_6$	Abelson; 1946
(2) $^{35}\text{Cl}_3\text{C}_2\text{H}$ - $^{37}\text{Cl}_3\text{C}_2\text{H}$	Alexander; 1955
(3) $^6\text{LiNO}_3$ - $^7\text{LiNO}_3$	Gustanfsson; 1962
(4) ^6Li - ^7Li	Lodding; 1966
	Ott; 1964
(5) ^{39}K - ^{41}K , ^{69}Ga - ^{71}Ga , ^{85}Rb - ^{87}Rb	Lodding; 1966
(6) ^{124}Xe ; ^{126}Xe ; ^{128}Xe ; ^{129}Xe ; ^{130}Xe ; ^{131}Xe ; ^{132}Xe ; ^{134}Xe ; ^{136}Xe from nature Xe	Rutherford; 1968
(7) ^3He - ^4He , $^{12}\text{CO}_2$ - $^{14}\text{CO}_2$, $^{12}\text{CH}_4$ - $^{13}\text{CH}_4$,	Vasaru; 1969

$^{16,16}O_2$ - $^{16,18}O_2$, ^{20}Ne - ^{21}Ne , $H^{35}Cl$ - $H^{37}Cl$	
(8) $^{13}C^{16}O$ - $^{12}C^{16}O$	Mathur; 1970
(9) $^{46}TiCl_4$; $^{48}TiCl_4$; $^{48}TiCl_4$; $^{49}TiCl_4$; $^{50}TiCl_4$; from nature $TiCl_4$	Rabinovich; 1972
(10) $^{112}SnCl_4$; $^{114}SnCl_4$; $^{115}SnCl_4$; $^{116}SnCl_4$; $^{117}SnCl_4$; $^{118}SnCl_4$; $^{119}SnCl_4$; $^{122}SnCl_4$; $^{124}SnCl_4$ from nature $SnCl_4$;	Rabinovich; 1972
(11) C_6H_6 - C_6D_6 , $^{13}C^{12}C_5H_6$ - $^{12}C_6H_6$, C_6D_{12} - C_6H_{12} , $^{13}C^{12}C_5H_{12}$ - $^{12}C_6H_{12}$, $C^{32}S_2$ - $C^{32}S^{34}S$, $C_3H_7^{35}Cl$ - $C_3H_7^{37}Cl$, $C_2H_5^{79}Br$ - $C_2H_5^{81}Br$	Rutherford; 1973
(12) Br_2 and Cl_2 in noble gases	Maza; 1974
III : 氫同位素 :	
(1) H_2O - D_2O	Clusius; 1939 Korsching; 1939 Hirota; 1942 Prigogine; 1952
(2) T_2 - H_2	Gonisor; 1961 Israel; 1962 Shimizu; 1966 Verhagen; 1967 Vasaru; 1969
(3) HD - D_2	Humphreys; 1967
(4) H_2 - D_2	Grew; 1971 Neubert; 1983

1.4 重水及其用途

先介紹四個和重水有關的原子：

- (1) 氫(Hydrogen，簡寫為 H)：原子核為一個質子。
- (2) 氘(Deuterium，簡寫為 D)：氫之同位素，原子核為一個質子
加上一個中子。

1931 年，哈洛德·克電頓·尤列(Harold Clayton Urey，1893 年生，美國化學家，曾獲 1934 年諾貝爾化學獎)在約翰·霍普金斯指出，當液態氫被蒸發時，最後會剩下微量比正常稍重些的含有一種氫的同位素，它是普通氫的 2 倍重，這就叫做氘或重氫(deuterium，希臘文 deuterios 為“二”之意)，符號 D。

氘的原子核除包含一個質子外，比氫多了一個中子。氘的化學性質與氫一樣，但是一個氘原子比一個氫原子重一倍，所以叫做“重氫”。氫二氧一化合成水，重氫和氧化合成的水叫做“重水”。重水主要賦存於海水中，總量可達 250 億噸。重水現在已是核反應爐運行不可缺少的輔助材料，重水還是制取氘的原料。

後來，這種重氫已變成一種商品，其最常見的製備法是在鐵鎳電極中重複不斷地電解鹼性水；較輕的氫先生成。用這種較重的同位素所製成的水與普通水有著相當不同的性質，如表(1-2)。重氫的發現對於核裂變反應和氫核聚變反應都具有重要意義。對於鈾核分裂而言，

重水可做鈾核裂變的減速劑。對於氫核融合而言，氘又是可用作熱核反應的重要能源。

表(1.2) 普通水與重水之比較^[9]

物理性質	普通水 (1 D ₂ O : 5000 H ₂ O)	重水 (純 D ₂ O)
密度 (25°C)	0.997044	1.1066
沸點	100.00°C	101.42°C
熔點	0.0°C	3.82°C
最大密度	1.000 at 3.98°C	1.11 at 11.6°C
黏滯度 (20°C, 豪泊 mp)	1.000	1.260
25°C 時 100g 水所能溶解 NaCl 之克數	35.8	29.7

(3) 氚(Tritium, 簡寫為 T 或 H³): 亦為氫之同位素, 原子量 3, 原子核為一個質子加上二個中子。

於 1934 年被發現, 由著名的物理大師拉塞福(E. Rutherford)和他的兩位工作夥伴(M.L.E. Oliphant 和 P. Harteck), 利用兩個氘原子相互撞擊, 產生一個氚原子和一個氦原子。在普通氫及其化合物中, 約佔 10 億分之一。因為它有放射性, 氫及氘則無, 故較危險, 幸好在自然界的含量很少。為重水的成分之一, 1 分氚對 100 萬兆分普通氫的

比率出現於淡水湖中；在海洋表面則為 1:1000 萬兆；海洋深處則無。

(4) 氧(Oxygen，簡寫為 O)：原子核含八個質子八個中子。

不論水的來源為何—溪水、雨水、不流動的池水、地下水或結晶水，就重量而言，都含有 5000 份的水(H_2O)和 1 份的重水(D_2O)。根據生物學家指出在人體尿液中 H:D 之正常比為 5000:1。

由二個氫原子與一個氧原子所組成(化學式為 H_2O)，我們稱之為輕水，是我們一般日常所使用的水，而重水則是由二個氘原子與一個氧原子所組成(化學式為 D_2O)，由於自然界中氘的含量極少(約為氫之萬分之一)，故若要使用重水時，必須先經過提煉萃取的過程，將水中的 D_2O 與 H_2O 分離後，才可使用。輕水與重水中的“氫”與“氘”為同位素，氘比氫多一個中子，兩者之化學性質相當，處理上並無太大的差異，

簡單來說，輕水與重水分別運用在不同型式的核子反應器中，以做為冷卻及其他的用途，世界各國最常見到的核子反應器，多半均使用輕水，而加拿大在設計核反應上，較偏愛以重水為材料。經使用過之輕水或重水均需依一定之廢水處理程序，在確定符合環境保護之標準後，才可能被排放到外界，應無對環境生態造成不良影響之虞。

少量的鈾瞬間裂變釋放出巨大的能量成為破壞威力極大的原子彈。人工控制著讓它在反應器裡慢慢地裂變，就能建成原子能發電站

造福人類。人工控制氘聚合變化反應的方法也已取得很大進展，一旦成功，建成以氘為原料的熱核電站，海水提取重水生產氘的開發產業必定興起。蘊藏在海水中的氘有 50 億噸，足夠人類用上千萬億年，也就是說，人類持續發展的能源問題一勞永逸地解決了。

重水在國內的實際運用並不普遍，此乃重水在國內仍被視為管制的藥品，由於重水的提煉不易、價位高，且通常使用當作國防工業及核能工業原料。因此對於利用重水當作原料發展國防工業與核能工業，實應多加以研究。

重水是一種重要的國防工業與核能工業的原料。目前，運轉中的各種核能反應爐可分為三大類型。即：

- (1) 以石墨(graphite)當緩速劑(moderator)之天然鈾反應爐(natural uranium reactor)
- (2) 以普通水當緩速劑的濃集鈾反應爐(enriched uranium reactor)
- (3) 以重水(heavy water)當緩速劑之天然鈾反應爐，重水式反應爐

在世界各國均有發展，尤其以加拿大及瑞典、法國最為顯著。

倘若以燃料為投資觀點來比較，以一年(300 日)運轉相同電能(1000 MWe)來計算為例，重水式反應爐消耗的鈾不及 100 噸，而其他兩型則須 200~250 噸天然鈾^[9]，相形之下重水式反應爐顯然優於其他兩型甚多。且重水式反應爐因具有省鈾原料之優點，因此往往以數

噸的重水及數噸的天然鈾即可建造一小型反應爐，此亦為重水式反應爐較常用來當作動力反應爐之原因。但由於重水提煉不易，價格昂貴和反應爐運轉技術叫艱難之故，因此較不為人所普遍使用。

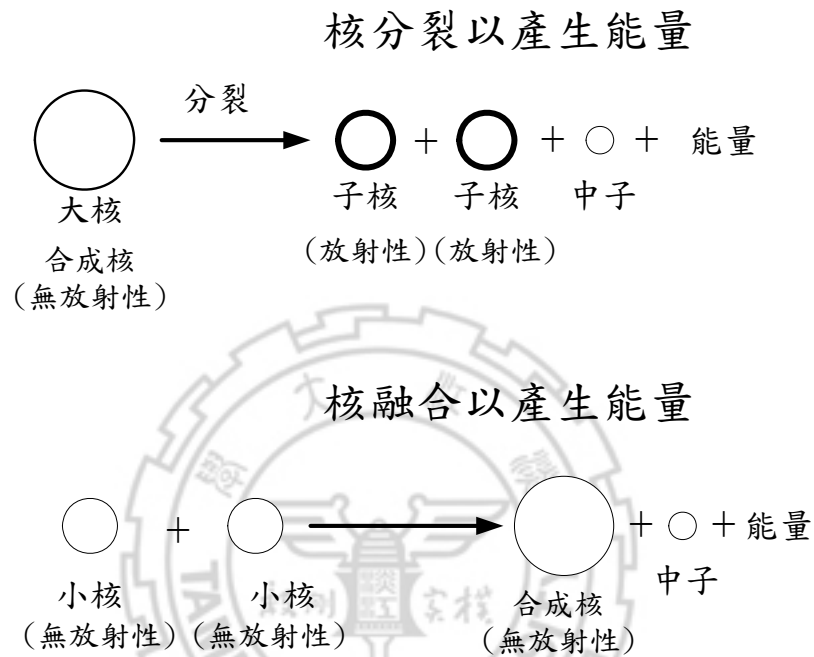
重水式反應器(Heavy Water Reactor)是利用重水的氘原子核來減速，氘原子對中子的吸收截面(機率)比氫原子低，所以中子的利用率高，因此 U-235 的濃度不需要太高(天然鈾即可)，又因為中子不被減速材吸收的機率較高，因此可以比輕水式核反應器有更多的中子來進行核反應。但由於氘原子核的質量是氫原子核的兩倍，所以對中子的減速效果較差。(即利用氫原子減速，中子能量變為原來的 1/2 而利用氘原子減速，中子能量變為原來的 2/3)，因此中子的速度比較快，造成爐心設計上會比較輕水式來的大。

一般來說，目前商轉用的重水式反應器，幾乎都是 PHWR (Pressure-tube Heavy Water Reactor)即類似壓水式反應器，唯一次側(即通過爐心)的冷卻水採用重水，而二次側(通過汽機)採用輕水。目前以加拿大自行研發的 CANDU 型重水反應器為代表。

所以說，重水除了是一良好的緩速劑外，亦是一良好的冷卻劑，位於加拿大 Douglas Point 之氘鈾反應爐 CANDU (Canadium Deuterium Uranium)，是較為進步的一座重水式反應爐。共用重水 170 噸，其中 130 噸當緩速劑，40 噸當冷卻劑，生產電力 200Mwe，燃燒

率達 10,000 MWd/t^[9]。

核反應的形式主要可分為兩種，一種為核分裂(fission)，另一種為核融合(fusion)。



圖(1.6) 核分裂與核融合

核融合及核分裂都源出愛因斯坦著名的質能互換公式「能量等於質量乘以光速的平方」。核分裂的情形中，當原子序超過 80 以後就都有一個天然放射性的趨勢，並且會分裂成二較輕而穩定區域內的元素，如鈾元素之類的重原子分解成較輕的的粒子。而核融合則是當原子序小於 40 時，即有合成變為較重元素之趨勢，如兩枚氫原子的同位素氘融合在一起，形成更重的氫同位素氦。不管核分裂或核融合，

某些物質都會轉換成能量。

由於分裂式(fission)核能廠之核廢料，具有高度之放射性及其半衰期可能長達數十年或數世紀，以長期性環境保護資源的觀點，核分裂之方式似乎已不是獲得能源之最佳途徑，且核分裂一定得用到像鈾一般的元素，難以發掘、提煉、處理及貯藏，因此，近年來，分裂式核電廠的成長有明顯減緩的趨勢。除了一些先進國家不再接獲興建分裂式核電廠外，近來甚至更有些環保人士主張拆除一些現有的分裂式核電廠，同時阻止核廢料處理廠的興建，使得核能發電陷於窘境。於是，歐美日蘇等工業先進國家變相繼投下大量的人力與物力及財力研究核融合(fusion)發電之技術，然目前核融合發電的技術仍處在尚待改進的階段。

核融合反應本身具有較低的污染性與可產生較高能量的特性，且與自然界中太陽表面的核融合反應相同，對生物的長期危害較低；核融合式反應爐最主要的原料乃氘，而氘最主要的來源為重水，又因天然水中含有 1/5000 的重水，因此重水的來源可說取之不盡。重水的提煉是核融合反應爐的基礎技術，因而突顯出此技術之重要性。所以先進國家都卯足了全力競相研究，目前國人在核融合開發技術上尚無法跟上先進歐、美、日、蘇等國家，但至少重水提煉的技術應予重視，一但核融合發電技術發展成功後，才不至錯失機先。

但核融合很難達成，原因是必須用到極高的能量，來迫使氫原子融合在一起。迄今民間、人力產出的核融合案例，都得動用到高能加速器或者雷射。核融合反應是宇宙中最普遍的能量轉換方式，也使輕原子核相互融合而成為重原子核而產生各種元素。在恆星的內部因龐大的重力作用引發核融合反應，融合後的原子其原子量較融合前的兩原子重量和小；而減少的質量就以能量的方式發散。基於愛因斯坦發現的質能互換公式 $E=mc^2$ 即使是如同電子般微小的質量，也能放出巨大的能量。宇宙中存在著億萬的恆星，每一個都是巨大的天然核融合爐。

目前無法以人工的方式模擬如恆星般巨大的重力，使得不論何種輕元素都能發生核融合反應。所以人工狀態下只能採用特殊元素來進行；核融合“燃料”與核分裂反應元素有一點相似，都是狀態較不穩定的同位素，才易於發生核反應。要同時考慮反應易於引發、產物污染低(放射性)及經濟效益各方面的問題，那所能選用的元素就更有限了。目前所考慮利用的元素有三種氘(D, Deuterium)、氚(T, Tritium)及氦³(³He)。

氘和氚是氫(H, Hydrogen)的同位素，氫只有一個質子、一個電子(1p 1e)；氘、氚則分別是(1p 1n 1e)、(1p 2n 1e)。同位素不一定是比常態元素多出幾個中子，氦³(2p 1n 2e)比一般氦⁴(2p 2n 2e)少一個中子

(氦核, α particle, $2p\ 2n$)。這三種元素的含量在地球上各不相同；氘約佔氫的 1/10000，在覆蓋地球的海水中可以大量分離；雖然氚具放射性含量不多，但可由中子與鋰(Li, Lithium)反應而得；氦 3 在地球上不多但估計在月球上甚為豐富。

這三種同位素可形成三種核融合反應：

1	氘+氚 (D+T)反應： $D + T \rightarrow {}^4\text{He} + n + \text{Eng.}(\text{能量})$	這是最易進行的核融合反應，生成的中子又可和鋰作用生成氚。
2	氘+氘 (D+D)反應： $D + D \rightarrow {}^3\text{He} + n + \text{Eng.}(\text{能量})$ $D + D \rightarrow T + p + \text{Eng.}(\text{能量})$	這兩個不同的反應各有 50% 的發生率，生成的 ${}^3\text{He}$ 及 T 又可再與氘進行反應。不需先生產具放射性的氚，產物又可再利用。
3	氘+氦 3 (D+ ${}^3\text{He}$)反應： $D + {}^3\text{He} \rightarrow \alpha + p + \text{Eng.}(\text{能量})$	產生的質子與氦核都是帶電粒子(各帶 1, 2 個正電)可直接轉換為電力。又不產生中子，放射性問題減低。但氦 3 地球上含量不多，且技術較 DT 式困難，因此初期的研究並不看好。

比較三種方式的能量生成，DT 或 DD 式都是產生熱量或轉換為產物的動能互相碰撞減速再放出熱。若要應用為發電都需要將熱能轉換給水蒸氣或鈉蒸氣再行推動發電機。而且放出中子會使反應爐壁面帶有放射性，須慎選材料。D+³He 式除放射性低，最重要是可利用熱能又可直接發電，在小型化時可省去發電機空間卻較為困難。但若與現用的核分裂比較可是好處多多；鈾 235 的半衰期為 7 億 380 萬年，而設計中的國際熱核融合試驗爐(ITER International Thermonuclear Experimental Reactor)估計僅約 100 年；一公升水所含的氘，其核反應產能相當燃燒 300 公升煤油；核融合易於得到原料、高產能，若能達到實用將可一舉解決能源與石化燃料引起的生態問題。

核分裂在常溫下就可以發生，但是核融合卻需使反應物處於電漿狀態(plasma)。隨著溫度上升物質會由固體、液體而成為氣體，當超過 1 億 K 時，原子的電子動能高到脫離原子核；形成由裸露的原子核與電子高速運動的電漿，原子核的高速猛烈撞擊產生融合反應，放出質子 n 及氦核 α 。當反應產能使氦核所攜帶的熱足以維持融合溫度時就可以停止由外界輸入能量。

超高溫狀態的電漿是絕不能跟壁面接觸，因為電漿是處於帶電荷狀態，可以利用磁場束縛拉離壁面；並將壁面與電漿束間的空間抽成真空。理論上若發生意外磁場失效使電漿接觸壁面造成蒸發現象時，

雜質混入電漿會使溫度急速降低而停止反應。也就是說在理論上核融合是不會外洩的。另一種方式是用雷射或粒子束將燃料立即轉換成電漿，在短時間內引發大量反應，由於電漿會飛散，所以必須一直重複入射能量。

不論哪一種方式都要以大量的電力維持電漿溫度，核融合發電廠需將部分電力回送給電漿，說起來是一種「電力增幅器」的形式。目前的試驗反應爐都是 DD 式，須經由熱能換產生電；由於熱交換發電有 60 % 能量會逸散，現在僅歐盟的 JET (Joint European Torus) 及日本原子力研究所 (JAERI Japan Atomic Energy Research Institute) 的 JT-60U 達到「零輸出條件」，即輸入能量等於輸出能量。

1998 年秋，日本文部省核融合科學研究所的大型螺旋裝置 (LHD) 完工；同年，國際熱核融合試驗爐 (ITER) 也將設計完成，預計 2009 年開始運轉。但可供商用運轉的實用爐必須要先開發出可耐大量中子照射的爐壁材料，因此在 ITER 計畫的同時也進行國際合作的材料開發計畫。預計從開發到實用，核融合爐約需一世紀的歷程，希望藉由國際合作能在 21 世紀中期完成實驗爐。

一群核子科學家宣布^[10]，他們已在實驗室內成功控制冷融合反應的過程。若此實驗結果證實為真，將是人類步入核子時代以來的最重要里程碑，可望為人類開拓取之不盡、又不會產生核廢料的乾淨核能

源。美國「橡樹嶺國家實驗室」的科學家塔樂亞坎、密西根大學的具伽堤，以及俄羅斯科學院的尼馬突林共同合作，在實驗室內利用簡單與廉價設備，成功融合氫原子核。據英國泰晤士報報導，該研究最矚目之處，是在室溫環境下完成。過去進行核融合的唯一方式，是透過能產生極高溫度的核子武器或巨型實驗機器進行，不過造價都需數十億英鎊。

核融合之所以困難在於要將兩個質子抵抗其相斥力而壓縮到極小的距離，這個步驟需要極大的溫度及壓力。所以在使用核融合所放出的能量為武器的氫彈中，必須先以核分裂的原子彈來提供所需要的能量才能進行核融合。當兩個質子融合之後會形成重氫。不過在反應爐中要做到所需要的條件實在是太過困難，所以研究人員會選擇氘跟氚來進行核融合的研究。一樣可以產生極大的能量不過所需要的條件則略為寬鬆。

美國 Oak Ridge National Laboratory 的 Rusi Taleyarkhan 表示，他們的實驗從另一個完全不同的觀點著手。桌上就可以完成而且所需要的材料相對於傳統核融合反應是便宜又方便。他們主要提供核融合所需的臨界能量的方法稱為 cavitation，是利用釐米級的氣泡受到高頻震盪而爆破所產生的能量。他們表示當泡泡爆破的時候將可以產生一千萬度的高溫及壓力來將兩個原子核進行融合。

他們的實驗是使用一大燒杯的氘化丙酮。正常的丙酮這種化學物質為液體，無色、易揮發，常用來去漆劑，或者作為化學溶劑。氘化丙酮中，正常的氫原子被同位素氘所代換。有種學界尚未完全理解的物理現象稱作「聲致發光」，即使用超音波通過某些液體，液體會發出泡沫，爆裂出閃光。他們就利用本現象對氘化丙酮溶劑先射入高能(14MeV； $1\text{ev}=1.16\times 10^4\text{K}$ ；1K相當於 1.42×10^{-23} 焦耳)中子，產出直徑大約只有一釐米的泡沫群，再以超音波把泡沫壓下去，導致泡沫裂解，產生核融合所要求的幾百萬度超高溫及超高壓，從而釋放出巨大能源。因為泡泡爆破的能量很大又集中於一個小區域，所以可以有足夠的能量使分子發光。另一個可能的證據來自中子的檢測。當兩個氘融合的時候會放出一個中子，所以檢查是否有中子發射出來變成為核融合是否成功的最好證據。他們表示他們偵測到丙酮溶液中顯著增加的氘濃度，也觀察到能量相符的中子束(2.45MeV)從丙酮中放射出來，並將這些解釋成發現核融合的支持證據。若這些實驗結果正確，那麼我們便有了科學家們長久以來夢寐以求的解決地球能源問題的終極答案——實驗桌上的太陽。

目前商業化運轉的核電廠是以核分裂原理來發電，但是核分裂的反應會產生麻煩的核廢料。如鈾堆及其分裂產物，這些放射性核廢料，至今沒有哪個國家有長期貯放的計畫，所依賴的全都是臨時性措

施。而核融合的優點是：

- (1) 幾乎不會產生放射性廢料(或很快衰變而失去放射性)。
- (2) 融合反應所損失的質量比分裂反應多，產生的能量也比較大。
- (3) 核融合反應物的原料取得也較容易。核融合的原料氘、氚、氦可從海水中提煉出來，經濟而豐富。

除了核能工業方面，重水在國防工業也是相當重要。由重水和天然鈾經核反應，即可得到鈾元素，此即為原子彈原料之一。重水電解可獲得重氘，此可做熱核彈(氘彈)之原料，因此重水才會被視為戰略性的管制藥品。

目前核融合反應已應用於氘彈，和平用途的核能發電尚未成功。但科學界努力改進現行的反應裝置，預估還要 30 年時間，人類才能享受核融合發電的成果。核融合發電技術研究者認為，二十一世紀中，將沒有任何一種能源比核融合更具潛力，可供應全世界所需電力。

英國在兩個世紀前，由於馬匹拒絕進入礦坑拉煤礦，迫使人類裝配出第一批動力機，而導致工業革命。不久的未來地球將拒絕再供應化石燃料給人類(已開採枯竭)，樂觀的科學家由歷史的啟示預測：這段時間安排，恰好是核融合發電科技漸趨成熟所需要。或許這就是科學家發展史的定則：關鍵的時刻，誕生關鍵的科技。這個關鍵科技就是核融合發電的新能源科技。

目前常用來提煉重水的方法大致可分為三種，即：

- (1) 硫化氫-水交換法，又稱為 G.S process (Hydrogen Sulfide-Water Exchange)；
- (2) 蒸餾法，DW process (Distillation of Water)；
- (3) 電解法，E process；

一般重水工廠，大都以上述三種程序合併使用。以 Savannah 河重水工廠(Savannah River heavy-water plant)為例，G.S. process 製程係用來將天然水中 D_2O 濃縮至 15 mole % 左右，DW process 係接著 G.S.將 15 mole % D_2O 濃縮至 90 mole %，而 E process 用來將含 90 mole % D_2O 濃縮至 99.75 mole %。由天然水濃縮至 0.085 mole % 所需之成本約佔總成本之 50 %，若繼續濃縮至 15 mole %，則費用約佔總成本之 95 %。由此看來，濃縮重水的確不容易，且費用昂貴。倘若能發展其它的分離程序來取代部分現行所慣用的方法，進而達到便利與節約成本之目的；然熱擴散塔之設備頗為簡單，分離效果也相當可觀，實有相當之發展條件。

1.5 研究動機與目的

由於重水在核能工業上的前景看好，且於目前的國防工業上佔有極重要的角色，但礙於不易提煉，因此找尋新的分離程序來改善重水之提煉，已成為一重要的課題。就熱擴散塔分離同位素而言，其效率取決於分子量差與分子量和之比，比值愈大其分離效果愈好。在第二次世界大戰時，Oak Ridge 實驗室曾經串聯 2100 個熱擴散塔來提煉 ^{235}U ，最後得到濃度為 0.86 % 之 ^{235}U 。鈾同位素混合物之分子量差與分子量和之比值比氫同位素混合物小很多，因此以熱擴散塔來分離氫同位素並提煉重水，其效果是可預期的。

傳統的熱擴散塔中除有續流效應外，尚有造成分離效率削剪的再混合效應，而近年來以熱擴散法提煉重水的一些改良型塔已被發展推出，且由理論與實驗之研究結果證實，這些改良塔的分離效率遠比傳統之熱擴散塔為佳。至今，有關改良型塔之研究計有：

- (1) 平板傾斜塔(inclined column)^[11-26]，
- (2) 網線套管熱擴散塔(wired column)^[27-33]，
- (3) 旋轉型網線塔(rotated wired column)^[34-41]，
- (4) 填料塔(packed column)^[42-50]，
- (5) 中間鑲入隔板(impermeable sheet)或薄膜塔^[51-57]，
- (6) Frazier-Scheme 熱擴散塔^[58-79]等。

這些改良塔之操作原理是以適當的控制對流強度，來加強續流效應與降低再混合效應，進而達到提高分離度之目的。

關於 Clusius 和 Dickel 兩氏設計的熱重力式熱擴散塔裝置，描述此問題之解法除了使用傳送公式求得外，尚有利用有限差分法、分離變數法、perturbation 法等。本研究將探討利用分離變數法配合正交展開方法來求得平板型熱擴散塔之解析解研究。

在文獻中^[8]可以發現，適當地控制上下端之出料質量分率，有助於分離效率的提高，故在此針對具變出料質量分率對熱擴散塔提煉重水效率改善之研究。除此之外，亦考慮不同的操作參數：進料質量流率、進料濃度分率及進料位置和設計參數：改變長寬比、傾斜角、板距及固定操作成本下之板距，以期能提升熱擴散塔之分離效果

第二章是介紹傳統熱擴散塔之傳送公式、推導數學模型之解析解及引入不同之操作與設計參數之分離理論推導。

第三章為估算三成份系統重水之熱物性質。

第四章是探討不同之參數對分離度的影響，並找出其適當的控制而使熱擴散塔之分離效率提高。

第五章則做一結論總結。

第二章

基本理論

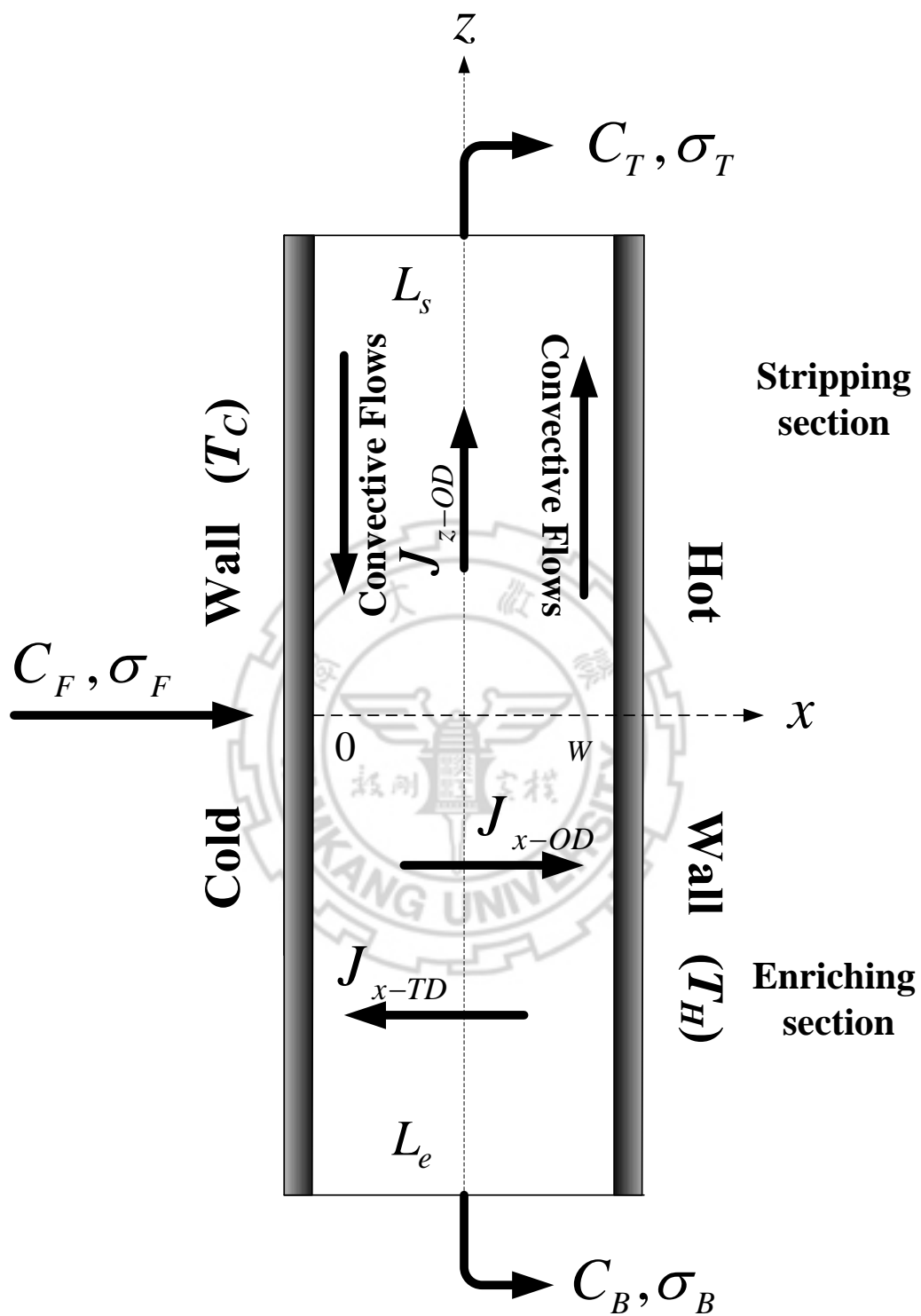
2.1 熱擴散塔之基本理論

2.1.1 傳送公式之近似解

如圖(2-1)所示，為一連續式熱擴散塔系統。由 Furry 和 Jones 等人^[80,81]所推導出之完整的熱重力式熱擴散塔理論一直被沿用至今，已然成為各型改良式熱擴散塔之理論改進之基礎。在熱擴散塔冷熱壁間形成水平方向的溫度梯度。由於熱擴散現象的發生，促使塔內混合物中之某一成分被帶往冷壁，另一成分則被反向帶往熱壁，此種因熱擴散所引起之 x 方向的質量流通量以 J_{x-TD} 表示。同時，因熱擴散的作用亦造成了在水平方向上的濃度梯度，進而在相反方向又產生了普通擴散，其質量流通量以 J_{x-OD} 表示。此時在水平方向之淨質量流通量為

$$J_x = J_{x-TD} + J_{x-OD} \quad (2.1-1)$$

對於垂直方向而言，會有靠近冷壁的流體向下傳送，近熱壁的流體向上傳送的自然對流現象產生，這是由於冷、熱壁溫度之差異所造成的密度梯度而生成的結果。這種自然對流與熱擴散兩個現象的相加成之結果稱為續流效應，會使得某一成分濃度於塔頂與塔底處產生一極大的濃度差，而達到分離的效果。但此時該成分在垂直方向也會同



圖(2.1) 連續式平板型熱擴散塔提煉重水示意圖

時產生一濃度梯度，沿垂直方向亦產生普通擴散，其質量流通量以 J_{z-OD} 表示。綜合以上諸效應，於連續式穩態(steady-state)操作下可以得到方程式^[11]

$$D_b \left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right] - \frac{\alpha_b D_b}{\bar{T}} \frac{dT}{dx} \frac{\partial C \hat{C}}{\partial x} - V_z \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad (2.1-2)$$

上述方程式之 V_z 可經由 Navier-Stokes 方程式求得。

(I) 二成份系統

於增濃段(enriching section)之速度分佈方程式^[80]為

$$V_z = \frac{\beta_T (W/2)^2 (\Delta T) g}{12\mu} [(\eta - \eta^3) + FF(1 - \eta^2)] \quad (2.1-3)$$

其中

$$FF = \frac{9\sigma_e \mu}{\rho \beta_T B (W/2)^3 (\Delta T) g} \quad (2.1-4)$$

$$\eta = x/(2W) \quad (2.1-5)$$

$$\sigma_e = -\int_{-1}^1 \rho V_z B (W/2) d\eta \quad (2.1-6)$$

將 σ_e 以 $-\sigma_s$ 替代可得提取段(stripping section)之速度分佈方程式。

今假設於 z 方向之擴散作用忽略不計，則兩成份混合物中某成分之水平質量流通量(horizontal mass flux)與速度的關係式，可由式(2.1-2)簡化整理得到如下的微分質量平衡方程式(differential mass balance equation)

$$\frac{\partial J}{\partial \eta} + \rho(W/2)V_z \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad (2.1-7)$$

由熱擴散與普通擴散所引起之水平方向質量流通量為

$$J_x = \frac{2D_b\rho}{W} \left(-\frac{\partial C}{\partial \eta} + \frac{\alpha_b C \hat{C}}{\bar{T}} \frac{dT}{d\eta} \right) \quad (2.1-8)$$

將式(2.1-3)至式(2.1-6)與式(2.1-8)代入式(2.1-7)由下列邊界條件

$$\eta = \pm 1 \quad J_x = 0 \quad (2.1-9)$$

$$\eta = \eta \quad C = C(\eta, z) \quad (2.1-10)$$

$$\eta = 0 \quad C = C_0(0, z) \quad (2.1-11)$$

可解得增濃段之濃度分佈方程式為

$$C = C_0 + \frac{\alpha_b C \hat{C} (\Delta T)}{2\bar{T}} \eta - \frac{\beta_T (W/2)^4 (\Delta T) g}{12D_b \mu} \Phi(z) \quad (2.1-12)$$

$$[(1 - 5(F\bar{F})^2) \left(\frac{\eta^3}{6} - \frac{\eta^5}{20} - \frac{\eta}{4} \right) + F\bar{F} \left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^4}{2} + \frac{\eta^6}{6} \right)]$$

其中

$$\Phi(z) = \frac{dC_0}{dz} \quad (2.1-13)$$

$$\frac{\partial C}{\partial z} = (1 - 5F\bar{F}\eta)\Phi(z) \quad (2.1-14)$$

令 $\sigma_e = -\sigma_s$ 帶入上述方程式，可得到提取段之濃度分佈方程式。

二成份混合物中，某成分於 z 方向上之質量傳送量，可由下式表

示

$$\tau = \int_{-W/2}^{W/2} \rho C V_z B dx - \int_{-W/2}^{W/2} \rho D_b \frac{\partial C}{\partial z} B dx \quad (2.1-15)$$

將方程式(2.1-3)與式(2.1-12)代入式(2.1-15)整理，可得增濃段之質量傳送公式為

$$\tau_e = \sigma_e C_T = \sigma_e C_0 + H_b C \hat{C} - K_b \frac{dC_0}{dz} \quad (2.1-16)$$

令 $\sigma_e = -\sigma_s$ 代入式(2.1-16)可得提取段之質量傳送公式為

$$\tau_s = -\sigma_s C_B = -\sigma_s C_0 + H_b C \hat{C} - K_b \frac{dC_0}{dz} \quad (2.1-17)$$

其中

$$H_b = \frac{\alpha_b \beta_T \rho g W^3 B (\Delta T)^2}{6! T \mu} \quad (2.1-18)$$

$$K_b = \frac{\rho g^2 \beta_T^2 W^7 B (\Delta T)^2}{9! D_b \mu^2} + W D_b B \rho \quad (2.1-19)$$

(II) 三成份系統

本文著重於討論重水之熱擴散塔系統，此屬於三成分同位素系統。因此重水系統之連續式熱擴散塔操作可由多成份系統之熱擴散傳送公式^[81-85]做推展

$$\tau_i = C_i \times \left(\sum_{k=1}^3 H_{ik}^i f_{ik} C_k \right) - K_i \frac{dC_i}{dz} \quad (2.1-20)$$

其中

$$f_{ik} = \frac{m_i - m_k}{m_i + m_k} \quad (2.1-21)$$

$$H_{ik}^i = \frac{\alpha_{ik}^i \rho g \beta_T W^3 B(\Delta T)^2}{6! \mu \bar{T}} \quad (2.1-22)$$

$$K_i = \frac{\rho g^2 \beta_T^2 W^7 B(\Delta T)^2}{9! \mu^2 D_i} + D_i W B \rho \quad (2.1-23)$$

式(2.1-22)中之 α 稱之為減數熱擴散係數(reduced thermal diffusion constant)。

對於重水之系統，我們分別令 $i=1$ 、 2 與 3 ，因此經由式(2.1-20)可以分別得到 H_2O (成份 1)· HDO (成份 2)與 D_2O (成份 3)的傳送公式，分別如下：

$$\tau_1 = C_1 \times \left(H_{12}^{tern} \frac{18-19}{18+19} C_2 + H_{13}^{tern} \frac{18-20}{18+20} C_3 \right) - K_1 \frac{dC_1}{dz} \quad (2.1-24)$$

$$\tau_2 = C_2 \times \left(H_{21}^{tern} \frac{19-18}{19+18} C_1 + H_{23}^{tern} \frac{19-20}{19+20} C_3 \right) - K_2 \frac{dC_2}{dz} \quad (2.1-25)$$

$$\tau_3 = C_3 \times \left(H_{31}^{tern} \frac{20-18}{20+18} C_1 + H_{32}^{tern} \frac{20-19}{20+19} C_2 \right) - K_3 \frac{dC_3}{dz} \quad (2.1-26)$$

其中

$$H_{12}^{tern} = \frac{\alpha_{12}^{tern} \rho g \beta_T W^3 B(\Delta T)^2}{6! \mu \bar{T}} = H_{21}^{tern} = \frac{\alpha_{21}^{tern} \rho g \beta_T W^3 B(\Delta T)^2}{6! \mu \bar{T}} \quad (2.1-27)$$

$$H_{13}^{tern} = \frac{\alpha_{13}^{tern} \rho g \beta_T W^3 B(\Delta T)^2}{6! \mu \bar{T}} = H_{31}^{tern} = \frac{\alpha_{31}^{tern} \rho g \beta_T W^3 B(\Delta T)^2}{6! \mu \bar{T}} \quad (2.1-28)$$

$$H_{23}^{tern} = \frac{\alpha_{23}^{tern} \rho g \beta_T W^3 B(\Delta T)^2}{6! \mu \bar{T}} = H_{32}^{tern} = \frac{\alpha_{32}^{tern} \rho g \beta_T W^3 B(\Delta T)^2}{6! \mu \bar{T}} \quad (2.1-29)$$

$$K_1 = \frac{\rho g^2 \beta_T^2 W^7 B(\Delta T)^2}{9! \mu^2 D_1} + D_1 W B \rho \quad (2.1-30)$$

$$K_2 = \frac{\rho g^2 \beta_T^2 W^7 B(\Delta T)^2}{9! \mu^2 D_2} + D_2 W B \rho \quad (2.1-31)$$

$$K_3 = \frac{\rho g^2 \beta_T^2 W^7 B(\Delta T)^2}{9! \mu^2 D_3} + D_3 W B \rho \quad (2.1-32)$$

重水系統中的各個成分之間均會維持著一個平衡關係。其平衡關係式為：



若以莫爾分率來表示式(2.1-33)之平衡常數，則

$$K'_{eq} = \frac{[\text{HDO}]^2}{[\text{H}_2\text{O}][\text{D}_2\text{O}]} \quad (2.1-34)$$

在 25°C 下， $K'_{eq} = 3.80$ ^[86]。今以 C_1 、 C_2 及 C_3 分別表示 H_2O 、 HDO 及 D_2O 之質量分率，則

$$K'_{eq} = \frac{C_2^2}{C_1 C_3} \times \frac{18 \times 20}{19^2} \quad (2.1-35)$$

或

$$K_{eq} = \frac{C_2^2}{C_1 C_3} = K'_{eq} \times \frac{19^2}{18 \times 20} = 1.0028 K'_{eq} \approx K'_{eq} \quad (2.1-36)$$

對三成分的重水系統而言

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1 \quad (2.1-37)$$

且由重水三成份系統的平衡關係式^[85]，由式(2.1-36)及式(2.1-37)可以解出 C_1 及 C_2 為

$$C_1 = 1 + \left(\frac{K_{eq}}{2} - 1 \right) C_3 - \left\{ C_3 K_{eq} \left[1 - \left(1 - \frac{K_{eq}}{4} \right) C_3 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.1-38)$$

$$C_2 = -\frac{K_{eq}}{2} C_3 + \left\{ C_3 K_{eq} \left[1 - \left(1 - \frac{K_{eq}}{4} \right) C_3 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.1-39)$$

將式(2.1-38)與式(2.1-39)代入式(2.1-26)可以得到

$$\begin{aligned} \tau_3 = C_3 \times & \left[H_{31}^{tern} \frac{20-18}{20+18} \left\{ 1 + \left(\frac{K_{eq}}{2} - 1 \right) C_3 - \left\{ C_3 K_{eq} \left[1 - \left(1 - \frac{K_{eq}}{4} \right) C_3 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \right\} \right. \\ & \left. + H_{32}^{tern} \frac{20-19}{20+19} \left\{ -\frac{K_{eq}}{2} C_3 + \left\{ C_3 K_{eq} \left[1 - \left(1 - \frac{K_{eq}}{4} \right) C_3 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \right\} \right] - K_3 \frac{dC_3}{dz} \end{aligned} \quad (2.1-40)$$

傳送係數 H 可改寫為

$$H_{ik}^{tern} = \varpi \alpha_{ik}^{tern} \quad (2.1-41)$$

其中

$$\varpi = \frac{\rho g \beta_T W^3 B (\Delta T)^2}{6! \mu \bar{T}} \quad (2.1-42)$$

而減數熱擴散係數與各個成份的質量之關係如下^[87]：

$$(m_3 - m_2) \alpha_{31}^{tern} = (m_3 - m_1) \alpha_{32}^{tern} \quad (2.1-43)$$

令 $m_1 = 18$ 、 $m_2 = 19$ 和 $m_3 = 20$ ，則可得

$$\alpha_{31}^{tern} = 2 \alpha_{32}^{tern} \quad (2.1-44)$$

將式(2.1-44)代入式(2.1-41)，則

$$H_{31}^{tern} = \varpi \alpha_{31}^{tern} = 2 \varpi \alpha_{32}^{tern} = 2 H_{32}^{tern} \quad (2.1-45)$$

因此可將式(2-1-40)改寫為

$$\begin{aligned} \tau_3 = & H_{32}^{term} C_3 \times \left[2 \frac{20-18}{20+18} \left\{ 1 + \left(\frac{K_{eq}}{2} - 1 \right) C_3 - \left\{ C_3 K_{eq} \left[1 - \left(1 - \frac{K_{eq}}{4} \right) C_3 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{20-19}{20+19} \left\{ -\frac{K_{eq}}{2} C_3 + \left\{ C_3 K_{eq} \left[1 - \left(1 - \frac{K_{eq}}{4} \right) C_3 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \right\} \right] - K_3 \frac{dC_3}{dz} \end{aligned} \quad (2.1-46)$$

整理式(2.1-46)則可得重水成份之質量傳送公式可以表示為

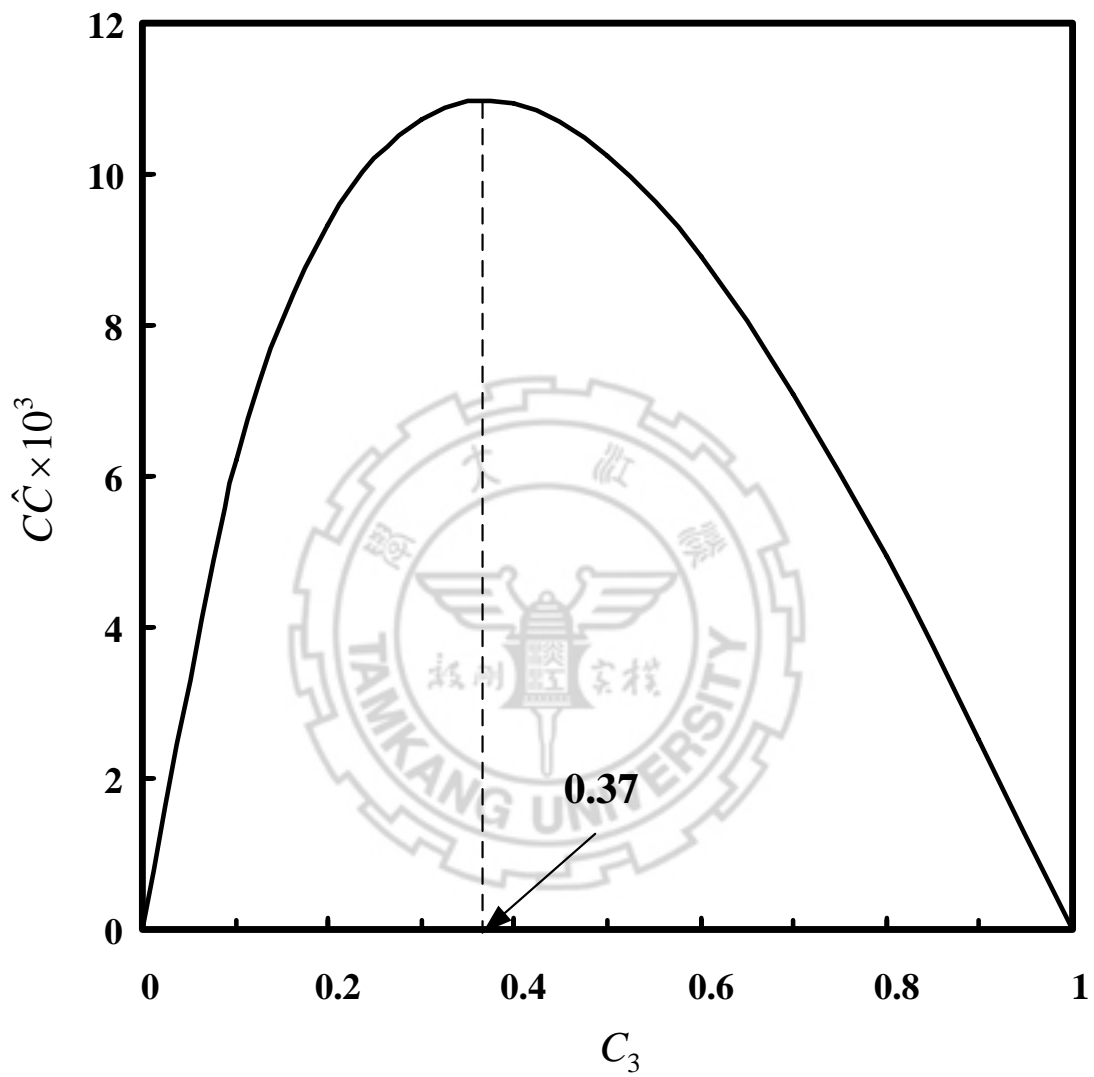
$$\tau_3 = H_{32}^{term} C_3 \hat{C}_3 - K_3 \frac{dC_3}{dz} \quad (2.1-47)$$

其中

$$\begin{aligned} C_3 \hat{C}_3 = & 0.10526 C_3 - (0.10526 - 0.03981 K_{eq}) C_3^2 \\ & - 0.07962 C_3 \left\{ C_3 K_{eq} \left[1 - \left(1 - \frac{K_{eq}}{4} \right) C_3 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.1-48)$$

今以 25°C 時， $K_{eq} = 3.793$ 代入式(2.1-48)中，計算可得重水之濃度 C_3 與 $C\hat{C}$ 之關係圖如圖(2-2)所示。從圖中可以發現當濃度分率在 0.37 時，其擬似濃度積最大。

在考慮於穩態之連續式操作下，增濃段與提取段之質量流率分別為 σ_e 與 σ_s 時，將式(2.1-48)代入式(2.1-16)與式(2.1-17)，且令 $C_0(0, z) = C(z)$ ，於增濃段與提取段於連續式熱擴散塔中，可以得到重水之傳送公式分別為



圖(2.2) 25°C下 C_3 與 $C\hat{C}$ 之關係圖

$$\tau_e = -\sigma_e C_B = -\sigma_e C_e + H_{32}^{tem} C_e \hat{C}_e - K_3 \frac{dC_e}{dz} \quad (2.1-49)$$

$$\tau_s = \sigma_s C_T = \sigma_s C_s + H_{32}^{tem} C_s \hat{C}_s - K_3 \frac{dC_s}{dz} \quad (2.1-50)$$

其中

$$H_{32}^{tem} = \frac{\alpha_{32}^{tem} \rho g \beta_T W^3 B (\Delta T)^2}{6! \mu \bar{T}} \quad (2.1-51)$$

$$K_3 = \frac{\rho g^2 \beta_T^2 W^7 B (\Delta T)^2}{9! \mu^2 D_3} + D_3 W B \rho \quad (2.1-52)$$

2.1.2 傳送公式之簡化—常數近似

在推導熱擴散分離理論中，由於擬似濃度積($C\hat{C}$)的部份為非線性，無論是批次或是連續式熱擴散系統，在積分時相當複雜且不利於分析。因此在某特定濃度範圍時，常以常數近似 $C\hat{C} = F$ 來簡化複雜的計算。而在某些更為特殊的系統中，甚至可於全濃度範圍中使用常數近似；如重水系統。在穩定操作之全濃度範圍中，其濃度差距所形成的範圍不大，對應於 $C\hat{C}$ 之變化僅在 0~0.8% 的範圍內，變化量非常微小。若於此條件下使用常數近似其誤差應當不大。經常數近似後的傳送公式可改寫為

$$\tau_e = -\sigma_e C_B = -\sigma_e C_e + H_{32}^{tem} F_e - K_3 \frac{dC_e}{dz} \quad (2.1-53)$$

$$\tau_s = \sigma_s C_T = \sigma_s C_s + H_{32}^{tem} F_s - K_3 \frac{dC_s}{dz} \quad (2.1-54)$$

以常數近似在作最佳化設計與操作時，雖有其計算上的便利性，但在某些範圍使用此種方法計算時，仍須有一較為完備的理論背景；如線性近似法^[8]，作為基礎相互比較。

在顏尤龍^[88]論文中提到，欲求得 F_e 和 F_s 之近似值，可利用最小平方法解得

$$\text{Min } R_e = \text{Min} \int_{C_F}^{C_B} (C_e \hat{C}_e - F_e)^2 dC_e \quad (2.1-55)$$

$$\text{Min } R_s = \text{Min} \int_{C_T}^{C_F} (C_s \hat{C}_s - F_s)^2 dC_s \quad (2.1-56)$$

其中將式(2.1-55)及式(2.1-56)分別對 F_e 及 F_s 微分，則

$$\frac{dR_e}{dF_e} = \int_{C_F}^{C_B} -2(C_e \hat{C}_e - F_e) dC_e = 0 \quad (2.1-57)$$

$$\frac{dR_s}{dF_s} = \int_{C_T}^{C_F} -2(C_s \hat{C}_s - F_s) dC_s = 0 \quad (2.1-58)$$

整理式(2.1-57)及式(2.1-58)得

$$F_e = \frac{1}{C_B - C_F} \int_{C_F}^{C_B} C_e \hat{C}_e dC_e \quad (2.1-59)$$

$$F_s = \frac{1}{C_F - C_T} \int_{C_T}^{C_F} C_s \hat{C}_s dC_s \quad (2.1-60)$$

由於擬似濃度積的最後一項在積分方面非常複雜，因此可先做泰勒級數展開，取其前二項

$$0.07962 C_e \left\{ C_e K_{eq} \left[1 - \left(1 - \frac{K_{eq}}{4} \right) C_e \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 0.07962 C_e^{\frac{3}{2}} K_{eq}^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} C_e + \frac{1}{8} C_e K_{eq} \right) \quad (2.1-61)$$

因此可將式(2.1-48)改寫為：

$$C_e \hat{C}_e = 0.10526 C_e - (0.10526 - 0.03981 K_{eq}) C_e^2 - 0.07962 C_e^{\frac{3}{2}} K_{eq}^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} C_e + \frac{1}{8} C_e K_{eq}\right) \quad (2.1-62)$$

積分式(2.1-59)及式(2.1-60)並利用式(2.1-62)，可分別求得

$$F_e = \frac{P(C_B^2 - C_F^2) - Q(C_B^{\frac{5}{2}} - C_F^{\frac{5}{2}}) + S(C_B^3 - C_F^3) + T(C_B^{\frac{7}{2}} - C_F^{\frac{7}{2}})}{2(C_B - C_F)} \quad (2.1-63)$$

$$F_s = \frac{P(C_F^2 - C_T^2) - Q(C_F^{\frac{5}{2}} - C_T^{\frac{5}{2}}) + S(C_F^3 - C_T^3) + T(C_F^{\frac{7}{2}} - C_T^{\frac{7}{2}})}{2(C_F - C_T)} \quad (2.1-64)$$

其中

$$P = \frac{5263}{50000} \quad (2.1-65)$$

$$Q = \frac{3981}{62500} K_{eq}^{\frac{1}{2}} \quad (2.1-66)$$

$$S = \frac{1327}{50000} K_{eq} - \frac{5263}{75000} \quad (2.1-67)$$

$$T = \frac{3981}{175000} K_{eq}^{\frac{1}{2}} - \frac{3981}{700000} K_{eq}^{\frac{3}{2}} \quad (2.1-68)$$

2.1.3 簡化後之分離度公式

應用常數近似 $C\hat{C} = F$ ，可將式(2.1-53)及式(2.1-54)化簡成

$$-F_e + \sigma'_e C_B - \sigma'_e C_e = \frac{dC_e}{dz'} \quad (2.1-69)$$

$$-F_s - \sigma'_s C_T + \sigma'_s C_s = \frac{dC_s}{dz'} \quad (2.1-70)$$

其中

$$\sigma'_e = \frac{\sigma_e}{(-H_{32}^{tern})} \quad (2.1-71)$$

$$\sigma'_s = \frac{\sigma_s}{(-H_{32}^{tern})} \quad (2.1-72)$$

$$z' = \frac{z(-H_{32}^{tern})}{K_{3,c} + K_{3,d}} \quad (2.1-73)$$

連續操作之邊界條件為

$$C_e = C_s = C_F \quad \text{at} \quad z' = 0 \quad (2.1-74)$$

$$C_s = C_T \quad \text{at} \quad z' = \frac{L'}{2} \quad (2.1-75)$$

$$C_e = C_B \quad \text{at} \quad z' = -\frac{L'}{2} \quad (2.1-76)$$

其中

$$L' = \frac{L(-H_{32}^{tern})}{K_{3,c} + K_{3,d}} \quad (2.1-77)$$

把邊界條件代入式(2.1-69)及式(2.1-70)可以求得增濃段與提取段之分離度分別為：

$$\Delta_e = C_B - C_F = \frac{F_e \left(1 - e^{-\frac{\sigma'_e L'}{2}} \right)}{\sigma'_e} \quad (2.1-78)$$

$$\Delta_s = C_F - C_T = \frac{F_s \left(1 - e^{-\frac{\sigma'_s L'}{2}} \right)}{\sigma'_s} \quad (2.1-79)$$

因此整個熱擴散塔的分離度為

$$\Delta = \Delta_e + \Delta_s = C_B - C_T = \frac{F_e \left(1 - e^{-\frac{\sigma'_e L'}{2}} \right)}{\sigma'_e} + \frac{F_s \left(1 - e^{-\frac{\sigma'_s L'}{2}} \right)}{\sigma'_s} \quad (2.1-80)$$

我們將 σ'_e, σ'_s, L' 以 σ_e, σ_s, L 的關係式代入上式，則

$$\Delta = \frac{-F_e H_{32}^{tern}}{\sigma_e} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\sigma_e L}{2 (K_{3,c} + K_{3,d})} \right] \right\} + \frac{-F_s H_{32}^{tern}}{\sigma_s} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\sigma_s L}{2 (K_{3,c} + K_{3,d})} \right] \right\} \quad (2.1-81)$$

令 $\sigma_s = \sigma_T$ 、 $\sigma_e = \sigma_B$ 和 $r = \frac{\sigma_T}{\sigma_F}$ ，因為 $\sigma_T + \sigma_B = \sigma_F$ 所以 $\frac{\sigma_B}{\sigma_F} = 1 - r$ 且

$K_{3,d}$ 可以省略，因此， $K_3 = K_{3,c}$ ，故可把式(2.1-81)改寫成

$$\Delta = \frac{-F_e H_{32}^{tern}}{(1-r)\sigma_F} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{(1-r)\sigma_F L}{2 K_3} \right] \right\} + \frac{-F_s H_{32}^{tern}}{r\sigma_F} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{r\sigma_F L}{2 K_3} \right] \right\} \quad (2.1-82)$$

其中

$$H_{32}^{tern} = \frac{\alpha_{32}^{tern} \rho g \beta_T W^3 B (\Delta T)^2}{6! \mu \bar{T}} \quad (2.1-83)$$

$$K_3 = \frac{\rho g^2 \beta_T^2 W^7 B (\Delta T)^2}{9! D_3 \mu^2} \quad (2.1-84)$$

C_B 和 C_T 可以由式(2.1-78)和式(2.1-79)分別表示為：

$$C_B = C_F + \Delta_e \quad (2.1-85)$$

$$C_T = C_F - \Delta_s \quad (2.1-86)$$

將式(2.1-85)與式(2.1-86)代入式(2.1-63)與式(2.1-64)可解得 F_e 與 F_s

$$F_e = [P\Delta_e(2C_F + \Delta_e) - Q[(C_F + \Delta_e)^{\frac{5}{2}} - C_F^{\frac{5}{2}}] + S[(C_F + \Delta_e)^3 - C_F^3] + T[(C_F + \Delta_e)^{\frac{7}{2}} - C_F^{\frac{7}{2}}]] / (2\Delta_e) \quad (2.1-87)$$

$$F_s = [P\Delta_s(2C_F - \Delta_s) - Q[C_F^{\frac{5}{2}} - (C_F - \Delta_s)^{\frac{5}{2}}] + S[C_F^3 - (C_F - \Delta_s)^3] + T[C_F^{\frac{7}{2}} - (C_F - \Delta_s)^{\frac{7}{2}}]] / (2\Delta_s) \quad (2.1-88)$$

2.2 數學模式之解析解

關於 Clusius 和 Dickel^[6,7]兩氏設計的熱重力式熱擴散塔裝置，描述此問題之解法除了使用傳送公式(transport Equation)求得外，尚有利用有限差分法(finite difference method)^[89]、分離變數法(separated variables method)^[90]、微擾法(perturbation method)^[91]等。本節將探討利用分離變數法配合正交展開方法來求得平板型熱擴散塔之解析解研究。

在此我們做了以下的基本假設：

1. 穩態操作；
2. 流體流動方式為層流，故無軸向與徑向之混合產生；
3. 終端效應與熱擴散及普通擴散之質量流通量對速度的影響可予忽略；
4. 無徑向之流動(bulk flow)；
5. 熱物性質(如密度、黏度等等)為常數；
6. 忽略軸向之擴散效應；
7. 溫度只考慮隨徑向變化；

經由以上假設，可以將平板型熱擴散塔系統的理论模型分為以下幾個部份來討論：

2.2.1 溫度分佈

藉由平板熱傳導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\rho C_p} \quad (2.2-1)$$

經由基本假設第一點的穩態操作及第七點的溫度只考慮隨徑向變化，且令 $\dot{q}=0$ ，即無熱源或電源提供熱量，則式(2.2-1)可整理為

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (2.2-2)$$

其中

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} \quad (2.2-3)$$

式(2.2-2)對 x 積分二次，可得

$$T = C_1 x + C_2 \quad (2.2-4)$$

其邊界條件為

$$x=0 \quad , \quad T=T_C \quad (2.2-5)$$

$$x=W \quad , \quad T=T_H \quad (2.2-6)$$

利用式(2.2-5)及式(2.2-6)之邊界條件代入式(2.2-4)可分別求得 C_1 及 C_2

為

$$C_1 = \frac{T_H - T_C}{W} \quad (2.2-7)$$

$$C_2 = T_C \quad (2.2-8)$$

將求得之 C_1 及 C_2 代回式(2.2-4)並做整理，則可解出其溫度分佈為

$$T = T_C + \eta \Delta T \quad (2.2-9)$$

其中

$$\eta = \frac{x}{W} \quad (2.2-10)$$

$$\Delta T = T_H - T_C \quad (2.2-11)$$

2.2.2 速度分佈

由 Navier-Stokes 方程式，且在穩態操作下，可得增濃段與提取段之速度分佈分別為[附錄 A]：

$$V_e = -\frac{\beta_T g W^2 \Delta T}{6\mu} [\eta(\eta-1)(\eta-\gamma_e)] \quad (2.2-12)$$

$$V_s = -\frac{\beta_T g W^2 \Delta T}{6\mu} [\eta(\eta-1)(\eta-\gamma_s)] \quad (2.2-13)$$

其中

$$\gamma_e = 0.5 - \frac{36\mu(-\sigma_e)}{BW^3 \rho \beta_T g \Delta T} \quad (2.2-14)$$

$$\gamma_s = 0.5 - \frac{36\mu\sigma_s}{BW^3 \rho \beta_T g \Delta T} \quad (2.2-15)$$

2.2.3 濃度分佈

對於熱擴散塔之濃度分佈推導可分為增濃段與提取段兩個部份來做討論，其分述如下：

(I) 增濃段(enriching section) :

在基本假設下，增濃段水平方向之質量通量與質量守恆定律得到之平衡方程式可表示為

$$V_e(x) \frac{\partial C_e}{\partial z} = D_3 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{j}{\rho D_3} \right\} \quad (2.2-16)$$

再者，由熱擴散及普通擴散所引起之 j 為

$$j = \rho D_3 \left[\frac{\partial C_e}{\partial x} - h(x) \right] \quad (2.2-17)$$

將式(2.2-17)代入式(2.2-16)得：

$$V_e(x) \frac{\partial C_e}{\partial z} = D_3 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial C_e}{\partial x} - h(x) \right\} \quad (2.2-18)$$

其邊界條件為：

$$C_e = C_B, \quad z = -L_e \quad (2.2-19)$$

$$\frac{\partial C_e}{\partial x} = h(x), \quad x = 0 \quad (2.2-20)$$

$$\frac{\partial C_e}{\partial x} = h(x), \quad x = W \quad (2.2-21)$$

無因次群為：

$$\zeta = \frac{z}{L_e}, \quad \eta = \frac{x}{W}, \quad U_e(\eta) = \frac{W^2 V_e(x)}{L_e D_3}, \quad H(\eta) = Wh(x) \quad (2.2-22)$$

利用式(2.2-22)可將式(2.2-18)至(2.2-21)改寫如下：

$$U_e(\eta) \frac{\partial C_e}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 C_e}{\partial \eta^2} - H'(\eta) \quad (2.2-23)$$

$$C_e = C_B \quad , \quad \zeta = -1 \quad (2.2-24)$$

$$\frac{\partial C_e}{\partial \eta} = H(\eta) \quad , \quad \eta = 0 \quad (2.2-25)$$

$$\frac{\partial C_e}{\partial \eta} = H(\eta) \quad , \quad \eta = 1 \quad (2.2-26)$$

其中，由熱擴散產生的質量通量如下：

$$h(x) = \frac{\alpha_{32}^{tern} C_e \hat{C}_e}{\bar{T}} \frac{dT}{dx} \quad (2.2-27)$$

無因次化後，可以得到：

$$H(\eta) = \frac{\alpha_{32}^{tern} C_e \hat{C}_e}{\bar{T}} \frac{dT}{d\eta} \quad (2.2-28)$$

利用式(2.2-9)之溫度分佈，將其對 η 微分

$$\frac{dT}{d\eta} = \Delta T \quad (2.2-29)$$

將式(2.2-29)代回式(2.2-28)，得

$$H(\eta) \cong \frac{\alpha_{32}^{tern} C_e \hat{C}_e \Delta T}{\bar{T}} \quad (2.2-30)$$

其中

$$C_e \hat{C}_e = C_e \left[0.10526 - (0.10526 - 0.03981 K_{eq}) C_e - 0.07962 \left[C_e K_{eq} \left[1 - \left(1 - \frac{K_{eq}}{4} \right) C_e \right]^{\frac{1}{2}} \right] \right] \quad (2.2-31)$$

利用分離變數法可將增濃段之濃度分佈展開如下：

$$C_e(\eta, \zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} S_{e,m} F_{e,m}(\eta) G_{e,m}(\zeta) + Y(\eta) \quad (2.2-32)$$

將式(2.2-32)代入式(2.2-23)，整理可得

$$U_e(\eta) \sum_{m=0}^{\infty} S_{e,m} F_{e,m}(\eta) G'_{e,m}(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} S_{e,m} F''_{e,m}(\eta) G_{e,m}(\zeta) + Y''(\eta) - H'(\eta) \quad (2.2-33)$$

改寫式(2.2-33)可得

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ S_{e,m} \left[F''_{e,m}(\eta) G_{e,m}(\zeta) - U_e(\eta) F_{e,m}(\eta) G'_{e,m}(\zeta) \right] \right\} + Y''(\eta) - H'(\eta) = 0 \quad (2.2-34)$$

由於式(2.2-32)之 $\sum_{m=0}^{\infty} S_{e,m} F_{e,m}(\eta) G_{e,m}(\zeta)$ 亦符合齊性統制方程式^[92]，即式

(2.2-23)之 $H'(\eta) = 0$ ，故可得

$$F''_{e,m}(\eta) G_{e,m}(\zeta) - U_e(\eta) F_{e,m}(\eta) G'_{e,m}(\zeta) = 0 \quad (2.2-35)$$

將式(2.2-35)代入式(2.2-34)則可求得

$$Y''(\eta) - H'(\eta) = 0 \quad (2.2-36)$$

將式(2.2-35)左右兩邊同除 $G_{e,m}(\zeta)$ 可整理得

$$F''_{e,m}(\eta) - U_e(\eta) F_{e,m}(\eta) \frac{G'_{e,m}(\zeta)}{G_{e,m}(\zeta)} = 0 \quad (2.2-37)$$

其中

$$\frac{G'_{e,m}(\zeta)}{G_{e,m}(\zeta)} = \lambda_{e,m} \Rightarrow G'_{e,m}(\zeta) - \lambda_{e,m} G_{e,m}(\zeta) = 0 \quad (2.2-38)$$

將式(2.2-38)代入式(2.2-37)可求得

$$F_{e,m}''(\eta) - U_e(\eta)F_{e,m}(\eta)\lambda_{e,m} = 0 \quad (2.2-39)$$

將式(2.2-39)左右兩邊同除 $U_e(\eta)F_{e,m}(\eta)$ 可整理得

$$\frac{F_{e,m}''(\eta)}{U_e(\eta)F_{e,m}(\eta)} = \lambda_{e,m} \Rightarrow F_{e,m}''(\eta) - \lambda_{e,m}U_e(\eta)F_{e,m}(\eta) = 0 \quad (2.2-40)$$

對式(2.2-38)解一階 O.D.E 得：

$$G_{e,m}(\zeta) = c_e e^{-\int -\lambda_{e,m} d\zeta} = c_e e^{\lambda_{e,m}\zeta} \quad (2.2-41)$$

其中的特徵值包括了正根及負根，在增濃段中令 $c_e = e^{\lambda_{e,m}}$ ，得

$$G_{e,m}(\zeta) = e^{\lambda_{e,m}(1+\zeta)} \quad (2.2-42)$$

對式(2.2-36)積分兩次可得

$$Y(\eta) = \int_0^\eta H(\eta) d\eta \quad (2.2-43)$$

將式(2.2-32)代入式(2.2-25)並利用式(2.2-43)可將邊界條件改寫為：

$$F'_{e,m}(0) = 0 \quad (2.2-44)$$

同理，可以得到

$$F'_{e,m}(1) = 0 \quad (2.2-45)$$

(II) 提取段(stripping section)：

對提取段只要上面所前推導之公式，將式中腳碼'e'改寫成's'，

即可以利用，則只需將其中式(2.2-24)，改寫成式(2.2-46)便可

$$C_s = C_T \quad , \quad \zeta = 1 \quad (2.2-46)$$

其中，亦可得到提取段之 $G_{s,m}(\zeta)$ 為

$$G_{s,m}(\zeta) = e^{-\lambda_{s,m}(1-\zeta)} \quad (2.2-47)$$

2.2.4 待定係數

利用級數展開法，可將 $F_{e,m}$ 表示如下：

$$F_{e,m}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{mne} \eta^n \quad d_{m0e} = 1 \quad (2.2-48)$$

其中，待定係數 d_{mne} 可由速度分佈與式(2.2-40)，利用比較係數法得到。

將式(2.2-12)之增濃段速度分佈表示為

$$V_e = \bar{b}_1 \eta^3 + \bar{b}_2 \eta^2 + \bar{b}_3 \eta \quad (2.2-49)$$

其中

$$\bar{b}_1 = -\frac{\beta_T g W^2 \Delta T}{6\mu} \quad (2.2-50)$$

$$\bar{b}_2 = \frac{\beta_T g W^2 \Delta T}{6\mu} (\gamma_e + 1) \quad (2.2-51)$$

$$\bar{b}_3 = -\frac{\beta_T g W^2 \Delta T}{6\mu} \gamma_e \quad (2.2-52)$$

增濃段無因次速度分佈之通式為

$$U_e = \sum_{i=0}^n a_i \eta^i \quad (2.2-53)$$

$$= a_0 \eta^0 + a_1 \eta^1 + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3 + \cdots + a_n \eta^n \quad (2.2-54)$$

其中

$$a_0 = 0 \quad (2.2-55)$$

$$a_1 = \frac{\bar{b}_3 W^2}{L_e D_3} \quad (2.2-56)$$

$$a_2 = \frac{\bar{b}_2 W^2}{L_e D_3} \quad (2.2-57)$$

$$a_3 = \frac{\bar{b}_1 W^2}{L_e D_3} \quad (2.2-58)$$

$$a_n = 0 \quad , \quad n \geq 4 \quad (2.2-59)$$

將式(2.2-48)對 η 分別做一次及二次微分，分別可得

$$F'_{e,m}(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} n d_{mne} \eta^{n-1} \quad (2.2-60)$$

$$F''_{e,m}(\eta) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_{mne} \eta^{n-2} \quad (2.2-61)$$

利用式(2.2-44)及式(2.2-60)可求得

$$d_{m1e} = 0 \quad (2.2-62)$$

將式(2.2-48)、式(2.2-54)及式(2.2-61)代入式(2.2-40)後，比較係數得

$$d_{m2e} = \frac{\lambda_{e,m} a_0 d_{m0e}}{2 \cdot 1} \quad (2.2-63)$$

$$d_{m3e} = \frac{\lambda_{e,m} (a_0 d_{m1e} + a_1 d_{m0e})}{3 \cdot 2} \quad (2.2-64)$$

$$d_{m4e} = \frac{\lambda_{e,m} (a_0 d_{m2e} + a_1 d_{m1e} + a_2 d_{m0e})}{4 \cdot 3} \quad (2.2-65)$$

$$d_{m5e} = \frac{\lambda_{e,m} (a_0 d_{m3e} + a_1 d_{m2e} + a_2 d_{m1e} + a_3 d_{m0e})}{5 \cdot 4} \quad (2.2-66)$$

⋮

$$d_{m(n+2)e} = \frac{\lambda_{e,m}(a_0 d_{mne} + a_1 d_{m(n-1)e} + a_2 d_{m(n-2)e} + a_3 d_{m(n-3)e} + \cdots + a_n d_{m0e})}{(n+2)(n+1)} \quad (2.2-67)$$

可將式(2.2-67)簡化為

$$d_{m(n+2)e} = \frac{\lambda_{e,m}}{(n+2)(n+1)} \left[\sum_{k=0}^n a_k d_{m(n-k)e} \right] \quad (2.2-68)$$

其中，比較式(2.2-64)、式(2.2-66)...等式可得奇數項為

$$d_{m(2n+1)e} = \frac{\lambda_{e,m}(a_0 d_{m(2n-1)e} + a_1 d_{m(2n-2)e} + a_2 d_{m(2n-3)e} + a_3 d_{m(2n-4)e} + \cdots + a_{2n-1} d_{m0e})}{4n^2 + 2n} \quad (2.2-69)$$

比較式(2.2-63)、式(2.2-65)...等式可得偶數項為

$$d_{m(2n)e} = \frac{\lambda_{e,m}(a_0 d_{m(2n-2)e} + a_1 d_{m(2n-3)e} + a_2 d_{m(2n-4)e} + a_3 d_{m(2n-5)e} + \cdots + a_{2n-2} d_{m0e})}{4n^2 - 2n} \quad (2.2-70)$$

欲求特徵值 $\lambda_{e,m}$ ，只需假設 $\lambda_{e,m}$ 後，求出 d_{mne} 再由式(2.2-45)判斷是否

滿足，如此使用疊代法即可求出所有的特徵值。

同理，對提取段只要上面所前推導之公式，將式中腳碼'e'改寫成's'，即可以利用。

2.2.5 特徵係數

改寫式(2.2-32)可以得到增濃段之濃度分佈方程式如下：

$$C_e(\eta, \zeta) - Y(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} S_{e,m} F_{e,m}(\eta) G_{e,m}(\zeta) \quad (2.2-71)$$

同理，對於提取段之濃度分佈方程式亦可改寫為：

$$C_s(\eta, \zeta) - Y(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} S_{s,m} F_{s,m}(\eta) G_{s,m}(\zeta) \quad (2.2-72)$$

將式(2.2-24)及式(2.2-46)之邊界條件分別代入式(2.2-71)及式(2.2-72)

並利用式(2.2-42)及式(2.2-47)可得：

$$C_B - Y(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} S_{e,m} F_{e,m}(\eta) \quad (2.2-73)$$

$$C_T - Y(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} S_{s,m} F_{s,m}(\eta) \quad (2.2-74)$$

我們可以導出此統制方程之正交性質如下[附錄 B]：

$$\int_0^1 U_e F_{e,m} F_{e,n} S_{e,m} S_{e,n} d\eta = 0 \quad ; \quad n \neq m \quad (2.2-75)$$

$$\int_0^1 U_s F_{s,m} F_{s,n} S_{s,m} S_{s,n} d\eta = 0 \quad ; \quad n \neq m \quad (2.2-76)$$

結合式(2.2-73)至式(2.2-76)，可求得 $S_{e,m}$ 、 $S_{s,m}$ 之係數展開式為：

$$\int_0^1 [C_B - Y(\eta)] U_e(\eta) F_{e,m}(\eta) d\eta = S_{e,m} \int_0^1 U_e(\eta) F_{e,m}^2(\eta) d\eta \quad (2.2-77)$$

$$\int_0^1 [C_T - Y(\eta)] U_s(\eta) F_{s,m}(\eta) d\eta = S_{s,m} \int_0^1 U_s(\eta) F_{s,m}^2(\eta) d\eta \quad (2.2-78)$$

由式(2.2-77)及式(2.2-78)可求得在不同條件下之特徵值($\lambda_{e,m}$, $\lambda_{s,m}$)所

對應之特徵係數($S_{e,m}$, $S_{s,m}$)。

其中，特徵值包括零與非零兩部份，分別敘述如下：

$$(I) \quad \lambda_{e,0} = \lambda_{s,0} = 0$$

熱擴散塔可分為增濃段(enriching)與提取段(stripping)，對於增濃段(enriching section)而言：

先將式(2.2-40)改寫為

$$F''_{e,0}(\eta) - \lambda_{e,0} U_e(\eta) F_{e,0}(\eta) = 0 \quad (2.2-79)$$

由於 $\lambda_{e,0} = 0$ ，得

$$F''_{e,0}(\eta) = 0 \quad (2.2-80)$$

將式(2.2-80)積分二次並利用式(2.2-44)之邊界條件可求得

$$F_{e,0}(\eta) = 1 \quad (2.2-81)$$

再改寫式(2.2-42)為

$$G_{e,0}(\zeta) = e^{\lambda_{e,0}(1+\zeta)} \quad (2.2-82)$$

由於 $\lambda_{e,0} = 0$ ，得

$$G_{e,0}(\zeta) = e^0 = 1 \quad (2.2-83)$$

將式(2.2-81)代入式(2.2-77)整理得：

$$S_{e,0} = C_B \frac{\int_0^1 Y(\eta) U_e(\eta) d\eta}{\int_0^1 U_e(\eta) d\eta} \quad (2.2-84)$$

同理，對於提取段(stripping section)而言亦可得到

$$S_{s,0} = C_T \frac{\int_0^1 Y(\eta) U_s(\eta) d\eta}{\int_0^1 U_s(\eta) d\eta} \quad (2.2-85)$$

(II) $\lambda_{e,m} \neq 0$ 與 $\lambda_{s,m} \neq 0$

對於增濃段(enriching section)而言，先將式(2.2-77)改寫為

$$S_{e,m} = \frac{C_B \int_0^1 U_e(\eta) F_{e,m}(\eta) d\eta - \int_0^1 Y(\eta) U_e(\eta) F_{e,m}(\eta) d\eta}{\int_0^1 U_e(\eta) F_{e,m}^2(\eta) d\eta} \quad (2.2-86)$$

將式(2.2-86)分成三部份來解可求得特徵係數 $S_{e,m}$ 為[附錄 C]：

$$S_{e,m} = \frac{\int_0^1 H(\eta) F'_{e,m}(\eta) d\eta}{\lambda_{e,m} F_{e,m}(1) \frac{\partial F'_{e,m}(1)}{\partial \lambda_{e,m}}} \quad (2.2-87)$$

$$S_{e,m} = \frac{\alpha_{32}^{term} C_e \hat{C}_e \Delta T [F_{e,m}(1) - 1]}{\bar{T} \lambda_{e,m} F_{e,m}(1) \frac{\partial F'_{e,m}(1)}{\partial \lambda_{e,m}}} \quad (2.2-88)$$

$$S_{e,m} = \frac{\alpha_{32}^{term} F_e \Delta T [F_{e,m}(1) - 1]}{\bar{T} \lambda_{e,m} F_{e,m}(1) \frac{\partial F'_{e,m}(1)}{\partial \lambda_{e,m}}} \quad (2.2-89)$$

同理，對於提取段(stripping section)而言亦可求得特徵係數 $S_{s,m}$ 為：

$$S_{s,m} = \frac{\int_0^1 H(\eta) F'_{s,m}(\eta) d\eta}{\lambda_{s,m} F_{s,m}(1) \frac{\partial F'_{s,m}(1)}{\partial \lambda_{s,m}}} \quad (2.2-90)$$

$$S_{s,m} = \frac{\alpha_{32}^{term} C_s \hat{C}_s \Delta T [F_{s,m}(1) - 1]}{\bar{T} \lambda_{s,m} F_{s,m}(1) \frac{\partial F'_{s,m}(1)}{\partial \lambda_{s,m}}} \quad (2.2-91)$$

$$S_{s,m} = \frac{\alpha_{32}^{term} F_s \Delta T [F_{s,m}(1) - 1]}{\bar{T} \lambda_{s,m} F_{s,m}(1) \frac{\partial F'_{s,m}(1)}{\partial \lambda_{s,m}}} \quad (2.2-92)$$

由(I)與(II)的結果，可將濃度分佈表示為：

$$C_e(\eta, \zeta) = S_{e,0} + \sum_{m=1}^{\infty} S_{e,m} F_{e,m}(\eta) G_{e,m}(\zeta) + Y(\eta) \quad (2.2-93)$$

$$C_s(\eta, \zeta) = S_{s,0} + \sum_{m=1}^{\infty} S_{s,m} F_{s,m}(\eta) G_{s,m}(\zeta) + Y(\eta) \quad (2.2-94)$$

2.2.6 熱擴散塔分離度

先定義濃縮段與提取段之平均濃度差

$$C_B - C_F = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\int_0^{r_e} U_e(\eta) [C_e(\eta, -1) - C_e(\eta, 0)] d\eta}{\int_0^{r_e} U_e(\eta) d\eta} + \frac{\int_{r_e}^1 U_e(\eta) [C_e(\eta, -1) - C_e(\eta, 0)] d\eta}{\int_{r_e}^1 U_e(\eta) d\eta} \right\} \quad (2.2-95)$$

$$C_F - C_T = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\int_0^{r_s} U_s(\eta) [C_s(\eta, 0) - C_s(\eta, 1)] d\eta}{\int_0^{r_s} U_s(\eta) d\eta} + \frac{\int_{r_s}^1 U_s(\eta) [C_s(\eta, 0) - C_s(\eta, 1)] d\eta}{\int_{r_s}^1 U_s(\eta) d\eta} \right\} \quad (2.2-96)$$

由於

$$\int_0^{r_e} U_e(\eta) [C_e(\eta, -1) - C_e(\eta, 0)] d\eta + \int_{r_e}^1 U_e(\eta) [C_e(\eta, -1) - C_e(\eta, 0)] d\eta = 0 \quad (2.2-97)$$

利用式(2.2-97)可將式(2.2-95)改寫為：

$$C_B - C_F = \left\{ \int_0^{r_e} U_e(\eta) [C_e(\eta, -1) - C_e(\eta, 0)] d\eta \right\} \left\{ \frac{[\int_0^{r_e} U_e(\eta) d\eta]^{-1} - [\int_{r_e}^1 U_e(\eta) d\eta]^{-1}}{2} \right\} \quad (2.2-98)$$

同理，對於提取段亦可改寫為：

$$C_F - C_T = \left\{ \int_0^{r_s} U_s(\eta) [C_s(\eta, 0) - C_s(\eta, 1)] d\eta \right\} \left\{ \frac{[\int_0^{r_s} U_s(\eta) d\eta]^{-1} - [\int_{r_s}^1 U_s(\eta) d\eta]^{-1}}{2} \right\} \quad (2.2-99)$$

將式(2.2-40)、式(2.2-42)及式(2.2-93)代入式(2.2-98)中之積分項可求得

$$\int_0^{r_e} U_e(\eta) [C_e(\eta, -1) - C_e(\eta, 0)] d\eta = \sum_{m=1}^{\infty} S_{e,m} [1 - e^{-\lambda_{e,m}}] \frac{1}{\lambda_{e,m}} \int_0^{r_e} F_{e,m}''(\eta) d\eta \quad (2.2-100)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} S_{e,m} [1 - e^{-\lambda_{e,m}}] \frac{1}{\lambda_{e,m}} [F_{e,m}'(r_e) - F_{e,m}'(0)] \quad (2.2-101)$$

之後，再將邊界條件式(2.2-44)代入式(2.2-101)可整理得：

$$\int_0^{r_e} U_e(\eta) [C_e(\eta, -1) - C_e(\eta, 0)] d\eta = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_{e,m} F_{e,m}'(r_e) [1 - e^{-\lambda_{e,m}}]}{\lambda_{e,m}} \quad (2.2-102)$$

同理，對於提取段亦可求得：

$$\int_0^{r_s} U_s(\eta) [C_s(\eta, 0) - C_s(\eta, 1)] d\eta = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_{s,m} F_{s,m}'(r_s) [e^{-\lambda_{s,m}} - 1]}{\lambda_{s,m}} \quad (2.2-103)$$

最後，將式(2.2-102)及式(2.2-103)分別代回式(2.2-98)及式(2.2-99)得

$$C_B - C_F = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_{e,m} F_{e,m}'(r_e) [1 - e^{-\lambda_{e,m}}]}{\lambda_{e,m}} \right\} \left\{ \frac{[\int_0^{r_e} U_e(\eta) d\eta]^{-1} - [\int_{r_e}^1 U_e(\eta) d\eta]^{-1}}{2} \right\} \quad (2.2-104)$$

$$C_F - C_T = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_{s,m} F'_{s,m}(r_s) [e^{-\lambda_{s,m}} - 1]}{\lambda_{s,m}} \right\} \left\{ \frac{[\int_0^{r_s} U_s(\eta) d\eta]^{-1} - [\int_{r_s}^1 U_s(\eta) d\eta]^{-1}}{2} \right\} \quad (2.2-105)$$

熱擴散塔之分離度定義如下：

$$\Delta = C_B - C_T = (C_B - C_F) + (C_F - C_T) \quad (2.2-106)$$

將式(2.2-104)及式(2.2-105)式代入式(2.2-106)整理可以得到：

$$\begin{aligned} \Delta = C_B - C_T &= \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_{e,m} F'_{e,m}(r_e) [1 - e^{-\lambda_{e,m}}]}{\lambda_{e,m}} \right\} \left\{ \frac{[\int_0^{r_e} U_e(\eta) d\eta]^{-1} - [\int_{r_e}^1 U_e(\eta) d\eta]^{-1}}{2} \right\} \\ &+ \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_{s,m} F'_{s,m}(r_s) [e^{-\lambda_{s,m}} - 1]}{\lambda_{s,m}} \right\} \left\{ \frac{[\int_0^{r_s} U_s(\eta) d\eta]^{-1} - [\int_{r_s}^1 U_s(\eta) d\eta]^{-1}}{2} \right\} \end{aligned} \quad (2.2-107)$$

整個熱擴散塔之質量平衡為

$$(\sigma_T + \sigma_B) C_F = \sigma_T C_T + \sigma_B C_B \quad (2.2-108)$$

聯立解式(2.2-106)及式(2.2-108)可得到

$$C_B = C_F + \frac{\Delta (\frac{\sigma_T}{\sigma_B})}{(1 + \frac{\sigma_T}{\sigma_B})} \quad (2.2-109)$$

$$C_T = C_F - \frac{\Delta}{(1 + \frac{\sigma_T}{\sigma_B})} \quad (2.2-110)$$

2.3 影響熱擴散塔之參數

在連續式熱擴散分離操作時，塔內之對流同時具有促進分離效果之續流效應(cascading effect)及抑制分離效果之再混合效應(remixing effect)，因此，改變不同設計與操作參數並找出其最佳條件有助於提升熱擴散塔之分離效果，且近年來一些改良型熱散塔之分離理論與實驗結果證實，改良型熱擴散塔之分離效果遠比傳統之熱擴散塔好。故在本研究中引入了八個設計與操作參數來作討論，其分述如下：操作參數，如：出料質量分率(r)、進料質量流率(σ_F)、進料濃度分率(C_F)及進料位置(δ)；而設計參數，如：固定操作面積(S)下之長寬比(ξ)、傾斜角(θ)、板距(W)及固定操作成本下之板距 $\frac{\Delta T}{W} = \text{const}$ ，將這些參數作一適當的控制，以期能提升熱擴散塔之分離效果。

為了可以更清楚明白表示此八個參數對平板型熱擴散塔對分離度的影響，因此將此八個參數分為三個群組，且分別做分離理論公式推導，其群組的參數分述如下：

- (1) 出料質量分率、進料質量流率、進料濃度分率及進料位置
- (2) 出料質量分率、固定操作面積下之長寬比及傾斜角
- (3) 出料質量分率、板距及固定操作成本之板距

2.3.1 出料質量分率、進料質量流率、進料濃度分率及進料位置之熱

擴散塔理論分析

根據顏^[88]、張^[90]提出有關出料質量分率報告得知，若將塔頂及塔底以不同的出料質量分率作一適當的控制可以減少再混合效應，同時亦可達到提高分離度的效果。除此之外，考慮進料位置^[90,93,94]的改變，將可能影響重水於增濃段及提取段的濃度分佈，故慎選進料位置將有助於提升熱擴散塔之分離度。

由 2.2 節所得熱擴散塔之解析解數學模式中，引入四變數分別為出料質量分率、進料質量流率、進料濃度分率及進料位置。

其中，出料質量分率之定義如下：

$$r = \frac{\sigma_s}{\sigma_F} \quad (2.3-1)$$

$$\sigma_s = r \cdot \sigma_F \quad (2.3-2)$$

$$\sigma_e = (1 - r) \cdot \sigma_F \quad (2.3-3)$$

將式(2.3-2)及式(2.3-3)代入 2.2.2 節速度分佈之式(2.2-12)至式(2.2-15)

中則可改寫速度分佈為

$$V_e = -\frac{\beta_T g W^2 \Delta T}{6\mu} [\eta(\eta - 1)(\eta - \gamma_e)] \quad (2.2-12)$$

$$V_s = -\frac{\beta_T g W^2 \Delta T}{6\mu} [\eta(\eta - 1)(\eta - \gamma_s)] \quad (2.2-13)$$

其中

$$\gamma_e = 0.5 + \frac{36\mu(1-r)\sigma_F}{BW^3 \rho\beta_T g\Delta T} \quad (2.3-4)$$

$$\gamma_s = 0.5 - \frac{36\mu r\sigma_F}{BW^3 \rho\beta_T g\Delta T} \quad (2.3-5)$$

將式(2.3-4)及式(2.3-5)分別代回式(2.1-12)及式(2.2-13)便可求出不同出料質量分率下之速度分佈。

整個熱擴散塔之質量平衡也因此可改寫為

$$C_B = C_F + \frac{\Delta(\frac{r}{1-r})}{(1+\frac{r}{1-r})} \quad (2.3-6)$$

$$C_T = C_F - \frac{\Delta}{(1+\frac{r}{1-r})} \quad (2.3-7)$$

進料位置之定義如下：

$$\delta = \frac{L_s}{L} \quad (2.3-8)$$

$$L_s = \delta \cdot L \quad (2.3-9)$$

$$L_e = (1 - \delta) \cdot L \quad (2.3-10)$$

將式(2.3-9)及式(2.3-10)代入 2.2.4 節待定係數之式(2.2-53)至式(2.2-59)

則可改寫增濃段無因次速度分佈之通式為

$$U_e = \sum_{i=0}^n a_i \eta^i \quad (2.2-53)$$

$$= a_0 \eta^0 + a_1 \eta^1 + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3 + \cdots + a_n \eta^n \quad (2.2-54)$$

其中

$$a_0 = 0 \quad (2.2-55)$$

$$a_1 = \frac{\bar{b}_3 W^2}{(1-\delta)LD_3} \quad (2.3-11)$$

$$a_2 = \frac{\bar{b}_2 W^2}{(1-\delta)LD_3} \quad (2.3-12)$$

$$a_3 = \frac{\bar{b}_1 W^2}{(1-\delta)LD_3} \quad (2.3-13)$$

$$a_n = 0 \quad , \quad n \geq 4 \quad (2.2-59)$$

同理，亦可得提取段為

$$a_0 = 0 \quad (2.2-55)$$

$$a_1 = \frac{\bar{b}_3 W^2}{\delta LD_3} \quad (2.3-14)$$

$$a_2 = \frac{\bar{b}_2 W^2}{\delta LD_3} \quad (2.3-15)$$

$$a_3 = \frac{\bar{b}_1 W^2}{\delta LD_3} \quad (2.3-16)$$

$$a_n = 0 \quad , \quad n \geq 4 \quad (2.2-59)$$

只要利用式(2.3-4)、式(2.3-5)及以上係數求出所有的待定係數、特徵值及特徵係數，即可藉由式(2.2-107)求得不同出料質量分率及不同進料位置下之熱擴散塔分離度。同時，亦可改變進料質量流率及進料濃度分率，從不同的參數中找出其最佳條件而使熱擴散塔達到最大之分離效率。

2.3.2 出料分率、固定操作面積下之長寬比及傾斜角之熱擴散塔理論分析

在連續式熱擴散分離操作時，若能給予一個適當的出料質量分率、長寬比^[15, 95]及傾斜角^[13-15, 17-18, 20, 24-25]來控制其對流強度，便能使塔內促進分離效果之續流效應增強，並且使抑制分離效果之再混合效應降低，以提高其分離效率。

由 2.2 節所得熱擴散塔之解析解數學模式中，引入三變數分別為出料質量分率、固定操作面積下之長寬比及傾斜角。

對於傾斜塔系統，其最主要之差異在於熱擴塔與垂直線成一個角度關係，如圖(2-2)所示，因此可將重力加速度改寫為

$$g \cdot \cos \theta \quad (2.3-17)$$

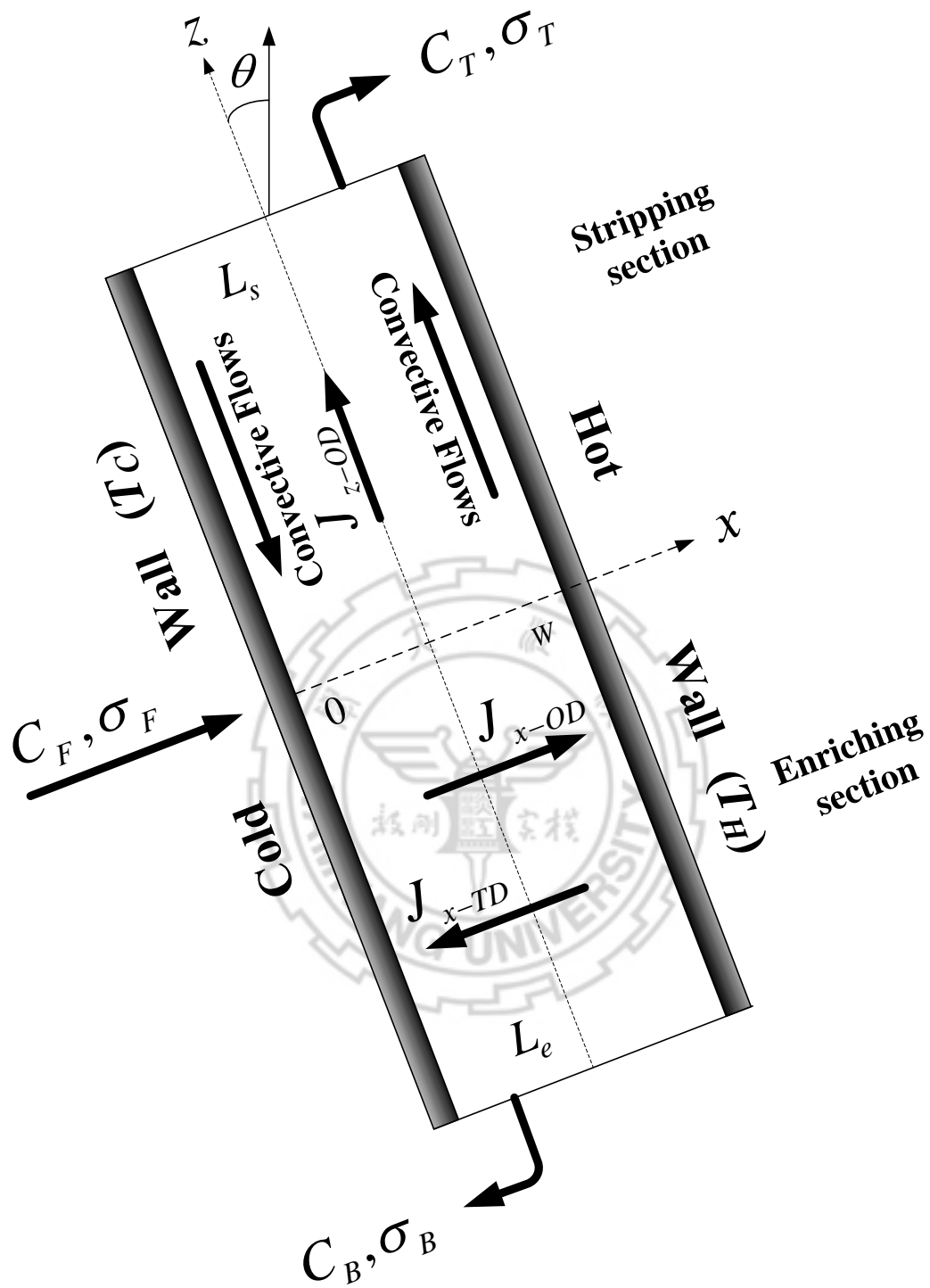
本節對塔頂及塔底變出料質量分率來加以討論，因此，將式(2.3-2)、(2.3-3)及(2.3-17)代入 2.2.2 節速度分佈之式(2.2-12)至式(2.2-15)則可改寫速度分佈為

$$V_e = -\frac{\beta_T (g \cdot \cos \theta) W^2 \Delta T}{6\mu} [\eta(\eta-1)(\eta-\gamma_e)] \quad (2.3-18)$$

$$V_s = -\frac{\beta_T (g \cdot \cos \theta) W^2 \Delta T}{6\mu} [\eta(\eta-1)(\eta-\gamma_s)] \quad (2.3-19)$$

其中

$$\gamma_e = 0.5 + \frac{36\mu(1-r)\sigma_F}{BW^3 \rho \beta_T (g \cdot \cos \theta) \Delta T} \quad (2.3-20)$$



圖(2.3) 連續式平板型熱擴散傾斜塔提煉重水示意圖

$$\gamma_s = 0.5 - \frac{36\mu r\sigma_F}{BW^3\rho\beta_T(g \cdot \cos\theta)\Delta T} \quad (2.3-21)$$

由式(2.3-18)至式(2.3-21)便可求出不同出料質量分率及不同傾斜角下之速度分佈。而 2.2.4 節待定係數之式(2.2-49)至式(2.2-52)亦可改寫增濃段速度分佈為

$$V_e = \bar{b}_1\eta^3 + \bar{b}_2\eta^2 + \bar{b}_3\eta \quad (2.2-49)$$

其中

$$\bar{b}_1 = -\frac{\beta_T(g \cdot \cos\theta)W^2\Delta T}{6\mu} \quad (2.3-22)$$

$$\bar{b}_2 = \frac{\beta_T(g \cdot \cos\theta)W^2\Delta T}{6\mu}(\gamma_e + 1) \quad (2.3-23)$$

$$\bar{b}_3 = -\frac{\beta_T(g \cdot \cos\theta)W^2\Delta T}{6\mu}\gamma_e \quad (2.3-24)$$

同理，亦可得提取段為

$$\bar{b}_1 = -\frac{\beta_T(g \cdot \cos\theta)W^2\Delta T}{6\mu} \quad (2.3-25)$$

$$\bar{b}_2 = \frac{\beta_T(g \cdot \cos\theta)W^2\Delta T}{6\mu}(\gamma_s + 1) \quad (2.3-26)$$

$$\bar{b}_3 = -\frac{\beta_T(g \cdot \cos\theta)W^2\Delta T}{6\mu}\gamma_s \quad (2.3-27)$$

長寬比之定義如下：

$$\xi = \frac{L}{B} \quad (2.3-28)$$

在固定操作面積下，調整不同之長寬比找出其最佳的操作長寬比，故

可令

$$S = L \cdot B \quad (2.3-29)$$

其中， L 及 B 分別為熱擴散塔之塔長及塔寬，可將此塔長及塔寬代換成長寬比及表面積的函數為

$$L = (S \cdot \xi)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3-30)$$

$$B = \left(\frac{S}{\xi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3-31)$$

亦可得增濃段及提取段之塔長分別為

$$L_e = \frac{1}{2} (S \cdot \xi)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3-32)$$

$$L_s = \frac{1}{2} (S \cdot \xi)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3-33)$$

將式(2.3-32)及式(2.3-33)代入 2.2.4 節待定係數之式(2.2-53)至式(2.2-59)則可改寫增濃段無因次速度分佈之通式為

$$U_e = \sum_{i=0}^n a_i \eta^i \quad (2.2-53)$$

$$= a_0 \eta^0 + a_1 \eta^1 + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3 + \cdots + a_n \eta^n \quad (2.2-54)$$

其中

$$a_0 = 0 \quad (2.2-55)$$

$$a_1 = \frac{\bar{b}_3 W^2}{\frac{1}{2} (S \cdot \xi)^{\frac{1}{2}} D_3} \quad (2.3-34)$$

$$a_2 = \frac{\bar{b}_2 W^2}{\frac{1}{2}(S \cdot \xi)^{\frac{1}{2}} D_3} \quad (2.3-35)$$

$$a_3 = \frac{\bar{b}_1 W^2}{\frac{1}{2}(S \cdot \xi)^{\frac{1}{2}} D_3} \quad (2.3-36)$$

$$a_n = 0 \quad , \quad n \geq 4 \quad (2.2-59)$$

同理，對於提取段而言亦可得到將同之結果。

利用式(2.3-18)至式(2.3-21)、式(2.3-22)至式(2.3-27)及以上係數可將所有的待定係數、特徵值及特徵係數求出，再藉由式(2.2-107)便可得不同出料質量分率、不同固定操作面積下之長寬比及不同傾斜角下之熱擴散塔分離度，並從中找出其最佳條件而使熱擴散塔達到最大之分離效率。

2.3.3 出料質量分率、板距及固定操作成本下板距之熱擴散塔理論分析

根據 Yeh^[13, 18, 24, 25, 96, 97] 提出有關板距報告得知在連續式熱擴散塔提煉重水之系統中所需考慮的成本有下列兩個部份：固定成本(fixed charge)及操作成本(operating expense)。因為在熱擴散塔裡的板距通常都很小，所以改變板距其固定成本增加並不多，而在本系統中主要的操作成本為兩板間之熱傳量約等於 $kBL \cdot \left(\frac{\Delta T}{W} \right)$ 。若將板距增加表示我

們必須提高熱擴散塔冷、熱板間的溫度差，同時也表示必須花費更多的成本來維持更高的溫度差，但為了經濟上的考量，我們必須將重點放在如何在最低的成本下，來達到最大的分離效果。因此，本章節除了討論改變板距對分離度的影響外，還探討了在固定操作成本之前提下，不同板距對熱擴散塔提煉重水之分離度的影響。

若考慮改變板距對分離度的影響時，則需改變 2.2 節熱擴散塔之板距進行模擬，將所得之分離度和固定操作成本下改變板距所求得之分離度作比較。而在固定操作成本前提下，也就是固定熱傳量

$kBL \cdot \left(\frac{\Delta T}{W}\right)$ ，即

$$\frac{\Delta T}{W} = \text{const} = 875 \text{ K/cm} \quad (2.3-37)$$

$$\Delta T = 875 \cdot W \quad (2.3-38)$$

$$W = \frac{\Delta T}{875} \quad (2.3-39)$$

(I) 溫度分佈

將式(2.3-38)代入 2.2.1 節溫度分佈之式(2.2-9)至式(2.2-11)則可改寫溫度分佈為

$$T = T_C + \eta(875 \cdot W) \quad (2.3-40)$$

其中

$$\eta = \frac{x}{W} \quad (2.2-10)$$

$$\Delta T = T_H - T_C \quad (2.2-11)$$

由式(2.3-40)便可求出不同固定操作成本下之板距的溫度分佈。

(II) 速度分佈

本節對塔頂及塔底變出料質量分率來加以討論，故將式(2.3-2)、式(2.3-3)、式(2.3-38)及式(2.3-39)代入 2.2.2 節速度分佈之式(2.2-12)至式(2.2-15)則可改寫速度分佈為

$$V_e = -\frac{\beta_T g W \Delta T^2}{(6 \times 875) \mu} [\eta(\eta-1)(\eta-\gamma_e)] \quad (2.3-41)$$

$$V_s = -\frac{\beta_T g W \Delta T^2}{(6 \times 875) \mu} [\eta(\eta-1)(\eta-\gamma_s)] \quad (2.3-42)$$

其中

$$\gamma_e = 0.5 + \frac{(36 \times 875^2) \mu (1-r) \sigma_F}{B W \rho \beta_T g \Delta T^3} \quad (2.3-43)$$

$$\gamma_s = 0.5 - \frac{(36 \times 875^2) \mu r \sigma_F}{B W \rho \beta_T g \Delta T^3} \quad (2.3-44)$$

由式(2.3-41)至式(2.3-44)便可求出不同出料質量分率及不同固定操作成本下之板距下之速度分佈。

(III) 待定係數

將式(2.3-38)及式(2.3-39)代入 2.2.4 節待定係數之式(2.2-49)至式(2.2-52)亦可改寫增濃段速度分佈為

$$V_e = \bar{b}_1 \eta^3 + \bar{b}_2 \eta^2 + \bar{b}_3 \eta \quad (2.2-49)$$

其中

$$\bar{b}_1 = -\frac{\beta_T g W \Delta T^2}{(6 \times 875) \mu} \quad (2.3-45)$$

$$\bar{b}_2 = \frac{\beta_T g W \Delta T^2}{(6 \times 875) \mu} (\gamma_e + 1) \quad (2.3-46)$$

$$\bar{b}_3 = -\frac{\beta_T g W \Delta T^2}{(6 \times 875) \mu} \gamma_e \quad (2.3-47)$$

同理，亦可得提取段為

$$\bar{b}_1 = -\frac{\beta_T g W \Delta T^2}{(6 \times 875) \mu} \quad (2.3-48)$$

$$\bar{b}_2 = \frac{\beta_T g W \Delta T^2}{(6 \times 875) \mu} (\gamma_s + 1) \quad (2.3-49)$$

$$\bar{b}_3 = -\frac{\beta_T g W \Delta T^2}{(6 \times 875) \mu} \gamma_s \quad (2.3-50)$$

同時，亦可將式(2.2-53)至式(2.2-59)之增濃段無因次速度分佈通式改

寫為

$$U_e = \sum_{i=0}^n a_i \eta^i \quad (2.2-53)$$

$$= a_0 \eta^0 + a_1 \eta^1 + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3 + \cdots + a_n \eta^n \quad (2.2-54)$$

其中

$$a_0 = 0 \quad (2.2-55)$$

$$a_1 = \frac{\bar{b}_3 \Delta T^2}{875^2 L_e D_3} \quad (2.3-51)$$

$$a_2 = \frac{\bar{b}_2 \Delta T^2}{875^2 L_e D_3} \quad (2.3-52)$$

$$a_3 = \frac{\bar{b}_1 \Delta T^2}{875^2 L_e D_3} \quad (2.3-53)$$

$$a_n = 0 \quad , \quad n \geq 4 \quad (2.2-59)$$

同理，亦可得提取段為

$$a_0 = 0 \quad (2.2-55)$$

$$a_1 = \frac{\bar{b}_3 \Delta T^2}{875^2 L_s D_3} \quad (2.3-54)$$

$$a_2 = \frac{\bar{b}_2 \Delta T^2}{875^2 L_s D_3} \quad (2.3-55)$$

$$a_3 = \frac{\bar{b}_1 \Delta T^2}{875^2 L_s D_3} \quad (2.3-56)$$

$$a_n = 0 \quad , \quad n \geq 4 \quad (2.2-59)$$

(IV) 特徵係數

將式(2.3-38)代入 2.2.5 節待定係數之式(2.2-87)至式(2.2-92)可將

增濃段特徵係數 $S_{e,m}$ 改寫為

$$S_{e,m} = \frac{875 \alpha_{32}^{tern} C_e \hat{C}_e W [F_{e,m}(1) - 1]}{\bar{T} \lambda_{e,m} F_{e,m}(1) \frac{\partial F'_{e,m}(1)}{\partial \lambda_{e,m}}} \quad (2.3-57)$$

$$S_{e,m} = \frac{875\alpha_{32}^{tern} F_e W[F_{e,m}(1) - 1]}{\bar{T}\lambda_{e,m} F_{e,m}(1) \frac{\partial F'_{e,m}(1)}{\partial \lambda_{e,m}}} \quad (2.3-58)$$

同理，亦可得提取段之特徵係數 $S_{s,m}$ 為：

$$S_{s,m} = \frac{875\alpha_{32}^{tern} C_s \hat{C}_s W[F_{s,m}(1) - 1]}{\bar{T}\lambda_{s,m} F_{s,m}(1) \frac{\partial F'_{s,m}(1)}{\partial \lambda_{s,m}}} \quad (2.3-59)$$

$$S_{s,m} = \frac{875\alpha_{32}^{tern} F_s W[F_{s,m}(1) - 1]}{\bar{T}\lambda_{s,m} F_{s,m}(1) \frac{\partial F'_{s,m}(1)}{\partial \lambda_{s,m}}} \quad (2.3-60)$$

利用式(2.3-41)至式(2.3-44)及以上之待定係數可將所有的特徵值求出，並與式(2.3-57)至式(2.3-60)之特徵係數藉由式(2.2-107)便可得不同出料質量分率及不同固定操作成本下之板距的熱擴散塔分離度，並從中找出其最佳條件而使熱擴散塔達到最大之分離效率。

第三章

三成份系統重水之熱物性質估算

由基本理論所建立之連續式熱擴散塔之數學模式，需要一些熱物性質才可進行模擬，因此，各熱物性質之估算方式如下：

3.1 熱膨脹係數(β_T)之估算

體積熱膨脹係數定義如下：

$$\beta_T \equiv \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad (3-1)$$

利用有限差分法(finite difference)^[89]可求得熱膨脹係數與密度、溫度間的關係式為：

$$\beta_T = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{2(T_2 - T_1)\rho_1\rho_2} \times \rho \quad (3-2)$$

其中

ρ ：平均之密度(g/cm^3)

T_1 ：13°C = 286 K

T_2 ：48°C = 321 K

在不同溫度下會有不同的密度產生，其溫度及密度之間的關係式為

[98]：

$$\begin{aligned} \rho = & (0.99983952 + 0.016945176T - 0.79870401 \times 10^{-5}T^2 \\ & - 0.46170461 \times 10^{-7}T^3 + 0.10556302 \times 10^{-9}T^4 \\ & - 0.28054253 \times 10^{-13}T^5) / (1 + 0.016879850T) \end{aligned} \quad (3-3)$$

因此，可利用式(3-3)求得不同溫度下水的密度之近似值為：

$$\rho_1 = 0.999377 \text{ g/cm}^3 \quad (3-4)$$

$$\rho_2 = 0.988963 \text{ g/cm}^3 \quad (3-5)$$

將 t_1 、 t_2 、 ρ 、 ρ_1 及 ρ_2 代入式(3-2)則可求得熱膨脹係數為

$$\beta_T = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{2(T_2 - T_1)\rho_1\rho_2} \times \rho = 2.97551 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3 \cdot K \quad (3-6)$$

由於水及重水之組成成份相似，假設重水熱膨脹係數與水熱膨脹係數相等，因此，可將所求出之水熱膨脹係數取代重水熱膨脹係數在此重水系統中進行模擬。

3.2 減數熱擴散係數(α)及普通擴散係數(D)之估算

由黃慰國^[8]及張光榮^[90]論文中找尋出六組實驗數據，並利用此六組實驗數據求出重水系統之傳送係數 H_{32}^{tern} 及 K_3 值，其方法如下：

六組實驗數據如下表所示：

第一組 ^[8]	
$C_F = 0.381, r = 0.8, \delta = 0.5$	
$\sigma_F (g/hr)$	$\Delta(\%)$
0.93	3.37
1.87	1.67
3.75	0.78
5.62	0.46

第二組 ^[90]	
$C_F = 0.381, r = 0.8, \delta = 0.5$	
$\sigma_F (g/hr)$	$\Delta(\%)$
0.5	3.822
1.2	1.934
1.8	1.167
3.8	0.5489
5.6	0.3643

第三組 ^[90]	
$\sigma_F = 0.5(g/hr), C_F = 0.381, \delta = 1/6$	
r	$\Delta(\%)$
0.1	1.89429
0.3	2.4797
0.5	2.63568
0.7	4.06329
0.9	6.15694

第四組 ^[90]	
$\sigma_F = 0.5(g/hr), C_F = 0.381, \delta = 5/6$	
r	$\Delta(\%)$
0.1	5.85694
0.3	4.41329
0.5	2.83834
0.7	2.40797
0.9	1.49429

第五組 ^[90]	
$\sigma_F = 1(g/hr), C_F = 0.381, \delta = 1/6$	
r	$\Delta(\%)$
0.1	1.50044
0.3	1.5024
0.5	1.53009
0.7	1.8925
0.9	3.41196

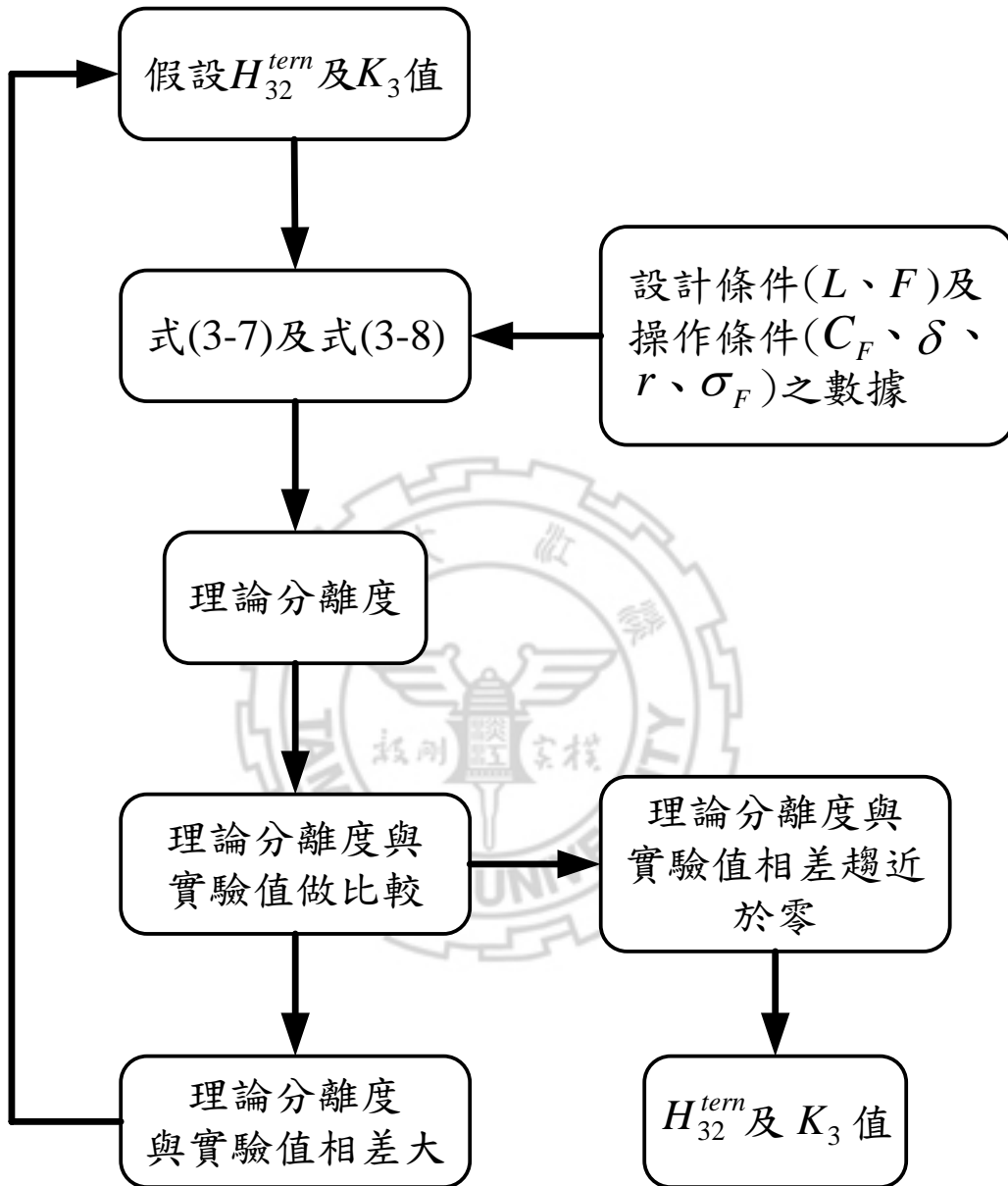
第六組 ^[90]	
$\sigma_F = 1(g/hr), C_F = 0.381, \delta = 5/6$	
r	$\Delta(\%)$
0.1	3.680162
0.3	2.5534
0.5	1.59009
0.7	1.54321
0.9	1.56044

由 2.1 節可得知熱擴散塔增濃段與提取段之分離度分別為：

$$\Delta_e = \frac{-F_e H_{32}^{tem}}{(1-r)\sigma_F} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{(1-r)\sigma_F L}{2 K_3} \right] \right\} \quad (3-7)$$

$$\Delta_s = \frac{-F_s H_{32}^{tem}}{r\sigma_F} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{r\sigma_F L}{2 K_3} \right] \right\} \quad (3-8)$$

應用上面的實驗數據及式(3-7)、式(3-8)之分離度公式加上利用所對應的熱物性質常數或設計及操作條件之數據便可求出重水系統之傳送係數 H_{32}^{tem} 及 K_3 值，圖(3-1)為一組實驗數據求得傳送係數之流程圖。



圖(3.1) 傳送係數求解之流程圖

經過上述的傳送係數之求解過程後，由六組不同實驗數據可求得六個

不同之 H_{32}^{tern} 及 K_3 值分別為：

表(3.1) 實驗數據求得之傳送係數

第一組	$H_{32,1}^{tern}$	$-1.2735 \times 10^{-4} \text{ g/hr}$
	$K_{3,1}$	$1.7896 \times 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm/hr}$
第二組	$H_{32,2}^{tern}$	$-1.3838 \times 10^{-4} \text{ g/hr}$
	$K_{3,2}$	$1.8932 \times 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm/hr}$
第三組	$H_{32,3}^{tern}$	$-1.1153 \times 10^{-4} \text{ g/hr}$
	$K_{3,3}$	$1.5481 \times 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm/hr}$
第四組	$H_{32,4}^{tern}$	$-1.0968 \times 10^{-4} \text{ g/hr}$
	$K_{3,4}$	$1.5489 \times 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm/hr}$
第五組	$H_{32,5}^{tern}$	$-1.0230 \times 10^{-4} \text{ g/hr}$
	$K_{3,5}$	$1.5573 \times 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm/hr}$
第六組	$H_{32,6}^{tern}$	$-1.1335 \times 10^{-4} \text{ g/hr}$
	$K_{3,6}$	$1.5481 \times 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm/hr}$

由上表之 H_{32}^{tern} 及 K_3 值作整理可得平均之傳送係數為

$$H_{32}^{tern} = \frac{\alpha_{32}^{tern} \rho g \beta_T W^3 B (\Delta T)^2}{6! \bar{\mu} T} = -1.1710 \times 10^{-4} \text{ g/hr} \quad (3-9)$$

$$K_3 = \frac{\rho g^2 \beta_T^2 W^7 B (\Delta T)^2}{9! D_3 \mu^2} = 1.6475 \times 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm/hr} \quad (3-10)$$

其中，熱物性質及設計條件之參數為

$$\rho = 1.1 \text{ g/cm}^3$$

$$g = 980 \text{ cm/s}^2$$

$$\mu = 0.0126 \text{ g/cm} \cdot \text{s}$$

$$W = 0.04 \text{ cm}$$

$$B = 10 \text{ cm}$$

$$\bar{T} = 303.5 \text{ K}$$

$$\Delta T = 35 \text{ K}$$

將 3.1 節所求得之熱膨脹係數(β_T)和上面之熱物性質及設計條件之參數分別代入式(3-9)及式(3-10)即可求出減數熱擴散係數(α_{32}^{tern})及普通擴散係數(D_3)分別為：

$$\alpha_{32}^{tern} = -1.2821 \quad (3-11)$$

$$D_3 = 1.97785 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s} \quad (3-12)$$

由文獻中可以發現，減數熱擴散係數在同位素系統中三成份與二成份相等^[99-101]，因此可以得到

$$\alpha_{ik}^{tern} = \alpha_{ik}^{bin} \quad (3-13)$$

式(3-11)及式(3-12)之減數熱擴散係數及普通擴散係數是利用實驗數據所求得，但當實驗數據不足時，我們亦可利用二成份之減數熱擴散係數的理論方程式搭配式(3-13)求得三成份系統之減數熱擴散係數。



第四章

結果與討論

本研究建立了平板型熱擴散塔之解析解數學模型，總共引入了八個不同之操作及設計參數，探討在不同參數下對分離效率的影響，在 2.3 節中，我們將此八個參數分為三個群組來做分離理論公式推導，因此，在此我們亦將此八個參數分為三個群組來進行模擬並繪成圖表且加以分析討論。

- (I) 出料質量分率、進料質量流率、進料濃度分率及進料位置
- (II) 出料質量分率、固定操作面積下之長寬比及傾斜角
- (III) 出料質量分率、板距及固定操作成本下之板距

為了解不同操作及設計參數對熱擴散塔提煉重水之分離度的影響，因此設定了以下之熱物性質、操作及設計參數，將這些參數代入第二章基本理論所建立之連續式平板型熱擴散塔之解析解分離度公式中進行模擬，將模擬之結果繪成圖表並對提煉重水之分離度加以分析討論。

其中，熱物性質：

$$\alpha_{32}^{bin} = -1.2821$$

$$\beta_T = 2.97551 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3 \cdot K$$

$$D_3 = 1.97785 \times 10^{-6} \text{ cm}^2 / \text{s}$$

$$\rho = 1.1 \text{ g} / \text{cm}^3$$

$$g = 980 \text{ cm} / \text{s}^2$$

$$\mu = 0.0126 \text{ g} / \text{cm} \cdot \text{s}$$

$$K_{eq} = 3.793 (\bar{T} = 303.5^\circ\text{C})$$

設計參數：

$$W = 0.04 \text{ cm}$$

$$B = 10 \text{ cm}$$

$$L = 122 \text{ cm}$$

操作參數：

$$T_1 = 13^\circ\text{C} = 286 \text{ K}$$

$$T_2 = 48^\circ\text{C} = 321 \text{ K}$$

$$\bar{T} = 303.5 \text{ K}$$

$$\Delta T = 35 \text{ K}$$

$$\sigma_F = 0.01 \sim 6 \text{ g} / \text{hr}$$

$$= 2.78 \times 10^{-6} \sim 1.67 \times 10^{-3} \text{ g} / \text{s}$$

$$C_F = 0.1 \sim 0.9$$

$$r = 0.1 \sim 0.9$$

$$\delta = 0.1 \sim 0.9$$

$$\xi = 1 \sim 50$$

$$\theta = 0 \sim 80^\circ$$

$$W = 0.02 \sim 0.06 \text{ cm}$$

4.1 出料質量分率、進料質量流率、進料濃度分率及進料位置之結果與討論

本節引入了四變數分別為出料質量分率、進料質量流率、進料濃度分率及進料位置。將本節分為二個部份來作討論：

- (I) 出料質量分率、進料質量流率、進料濃度分率及進料位置對特徵值之影響
- (II) 出料質量分率、進料質量流率、進料濃度分率及進料位置對分離度之影響

(I) 出料質量分率、進料質量流率、進料濃度分率及進料位置對特徵值之影響

從圖(4.1-1)及圖(4.1-6)可發現提取段特徵值隨著進料質量流率增大而增加，增濃段特徵值與進料質量流率則為遞減的關係；且從圖中亦可得知不論在增濃段或提取段之特徵值皆隨會著出料質量分率及進料位置的增大而遞增；經過數學模擬結果顯示進料濃度分率

不受特徵值的影響。

(II) 出料質量分率、進料質量流率、進料濃度分率及進料位置對分離度之影響

而由圖(4.1-7)至圖(4.1-9)可看出進料質量流率愈小其分離效果愈好，這是因為當進料質量流率愈小時，流體在熱擴散塔裡的停滯時間增長，而使分離度提高。其中，從圖(4.1-7)可得知當出料質量分率在 0.5 時，其分離效果最差，因此，在考慮出料質量分率操作時應將出料質量分率設定在越偏離 0.5 之處才會有較高的分離度。而由圖(4.1-8)可以知道，當進料濃度分率越接近 0.381 時，會有較高的分離度，這是因為擬似濃度積 $C\hat{C}$ 在濃度分率為 0.37 時會有最大值所造成之結果。除此之外，由圖(4.1-9)亦可看出固定出料質量分率 $r=0.5$ ，進料位置在 0.5 時，其分離度最高。最後從圖(4.1-10)至圖(4.1-12)可以再一次驗證圖(4.1-7)至圖(4.1-9)之結果。

從圖(4.1-13)至圖(4.1-15)可發現，當進料濃度分率愈接近 0.37 時，其分離效果愈好，這是由於擬似濃度積與熱物性質隨著濃度分率不同所造成的影響。由圖(2-2)得知擬似濃度積在濃度分率為 0.37 時會有最大值。且從圖(4.1-13)中得知，隨著進料質量流率愈小，其分離效果愈好。如圖(4.1-14)及圖(4.1-15)所示，當出料質量分率

$r = 0.5$ 及進料位置 $\delta = 0.5$ 時，在進料濃度分率 $C_F = 0.37$ 時會有最好的分離度，但當出料質量分率及進料位置愈偏離 0.5 時，則最佳之進料濃度分率亦會偏離 0.37，這是因為在 2.1.2 節之傳送公式之簡化-常數近似中，我們將擬似濃度積作常數近似所得知結果。除此之外，圖(4.1-14.1)及圖(4.1-14.2)告訴我們，當出料質量分率愈偏離 0.5 時，其分離效果愈好。另外，圖(4.1-15.1)及圖(4.1-15.2)也說明當出料質量分率為 0.5 時，則需選擇從中間進料，即進料位置 $\delta = 0.5$ ，會有最好的分離效果。最後，亦可從圖(4.1-16)至圖(4.1-18)來確認圖(4.1-13)至圖(4.1-15)之結果。

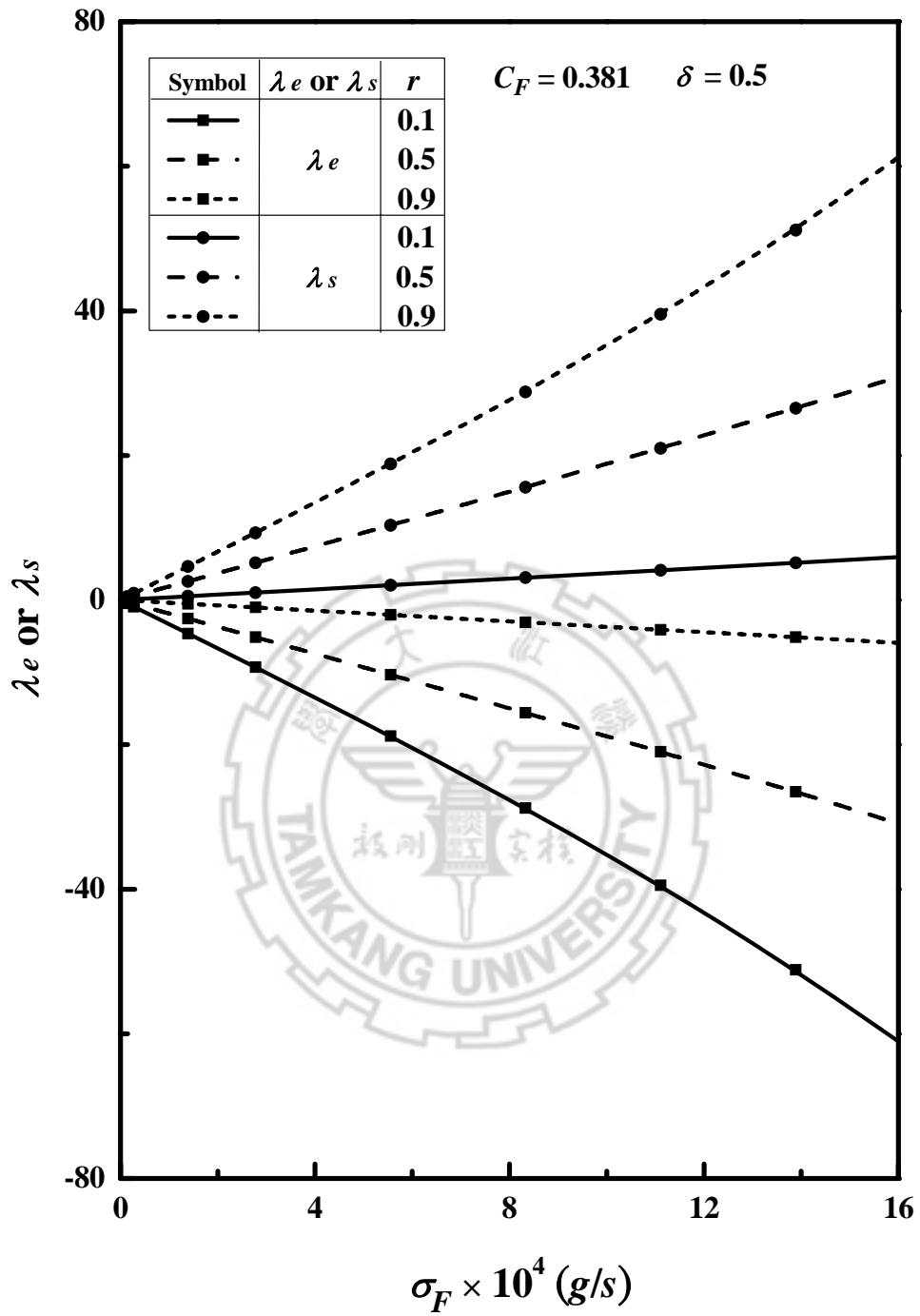
如圖(4.1-19)所示，在固定進料位置 $\delta = 0.5$ 、進料濃度分率 $C_F = 0.381$ 時，當出料質量分率 $r = 0.5$ ，也就是塔頂與塔底之出料質量分率相等時，其分離度最小，這是因為再混合(remixing)效應所造成之結果；當出料質量分率愈偏離 0.5 時，其分離度會愈高，這是由於當出料質量分率值愈小時，代表塔頂之流量較小，會造成塔底的流量變大，而使塔底增濃段的分離效率提昇有限，但因為塔頂的流量較小，會使塔頂提取段的分離度大大的提升，進而提昇整個熱擴散塔之分離度；反之，當出料質量分率值愈大時，代表塔頂之流量較大，而使塔頂提取段之分離度增加不多，同時，由於塔底之流量變小，進而造成塔底增濃段之分離效果增加，亦使整個熱擴散塔

之分離度也相對增加，且由圖中還可得知分離度會隨著進料質量流率減小而遞增。而從圖(4.1-20)則可觀察得到，當進料濃度分率愈接近 0.381 時，分離度愈好；且當進料濃度分率小於 0.381 時，分離度隨著出料質量分率增加而增加；反之，當進料濃度分率大於 0.381 時，則出料質量分率愈小其分離效果愈佳，這是由於考慮常數近似所形成之結果。除此之外，從圖(4.1-21)可以知道當出料質量分率 r 為 0.5 時，則需選擇從中間進料方可使分離效果提升。最後，可從圖(4.1-22)至圖(4.1-24)再次驗證圖(4.1-19)至圖(4.1-21)之結果。

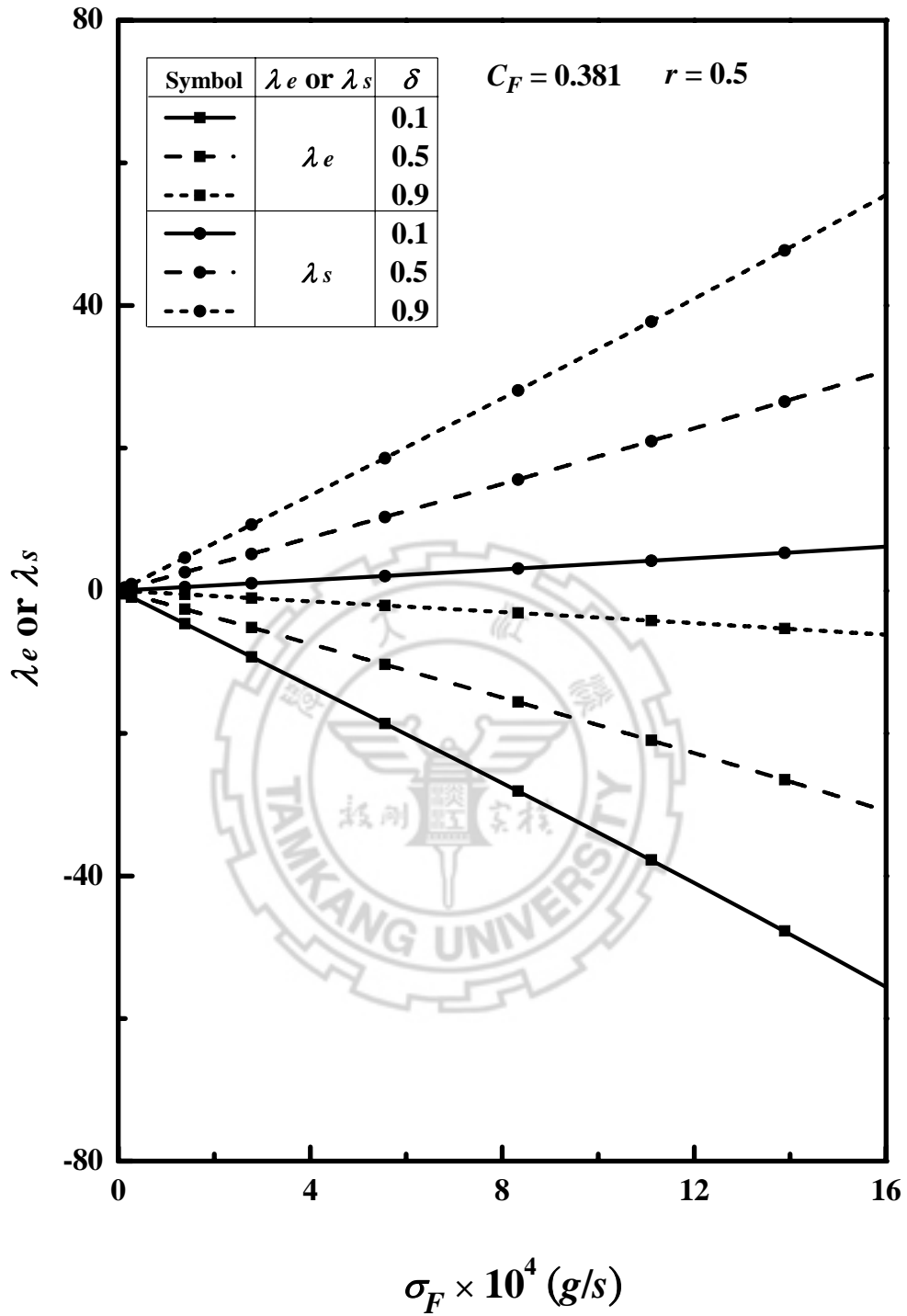
由圖(4.1-25)及圖(4.1-26)知道，當進料位置愈接近 0.5 時，也就是從塔中間進料時，會有較佳之分離度。且由圖(4.1-25)可得知分離度會隨著進料質量流率愈小而遞增。接著，由圖(4.1-26)可看出，當進料濃度分率愈接近 0.381 時會有較高的分離度；且當進料濃度分率小於 0.381 時，整體而言，進料位置偏小時，即靠近塔頂的位置進料，會有較佳的分離效果，反之，當進料濃度分率大於 0.381 時，則要選擇進料位置靠近塔底處才會使分離度提高。除此之外，從圖(4.1-21)及圖(4.1-27)可知道當出料質量分率小於 0.5，此時若選擇愈大之進料位置，即愈靠近塔底處，則可得到較佳的分離度，這是因為當進料位置靠近塔底處又加上出料質量分率在提取段之質量流率較小，可增長流體在提取段之滯留時間，使得提取段之分離度增加

而提昇整個熱擴散塔之分離度；反之，當出料質量分率愈大於 0.5，則代表增濃段之質量速率較小，而選擇進料位置靠近塔頂處可使增濃段之滯留時間加長，而提高熱擴散塔之分離效率；而若是當出料質量分率為 0.5 時，則選擇從中間進料可得到較佳的分離效果。最後，可從圖(4.1-28)至圖(4.1-30)驗證圖(4.1-25)至圖(4.1-27)之結果。

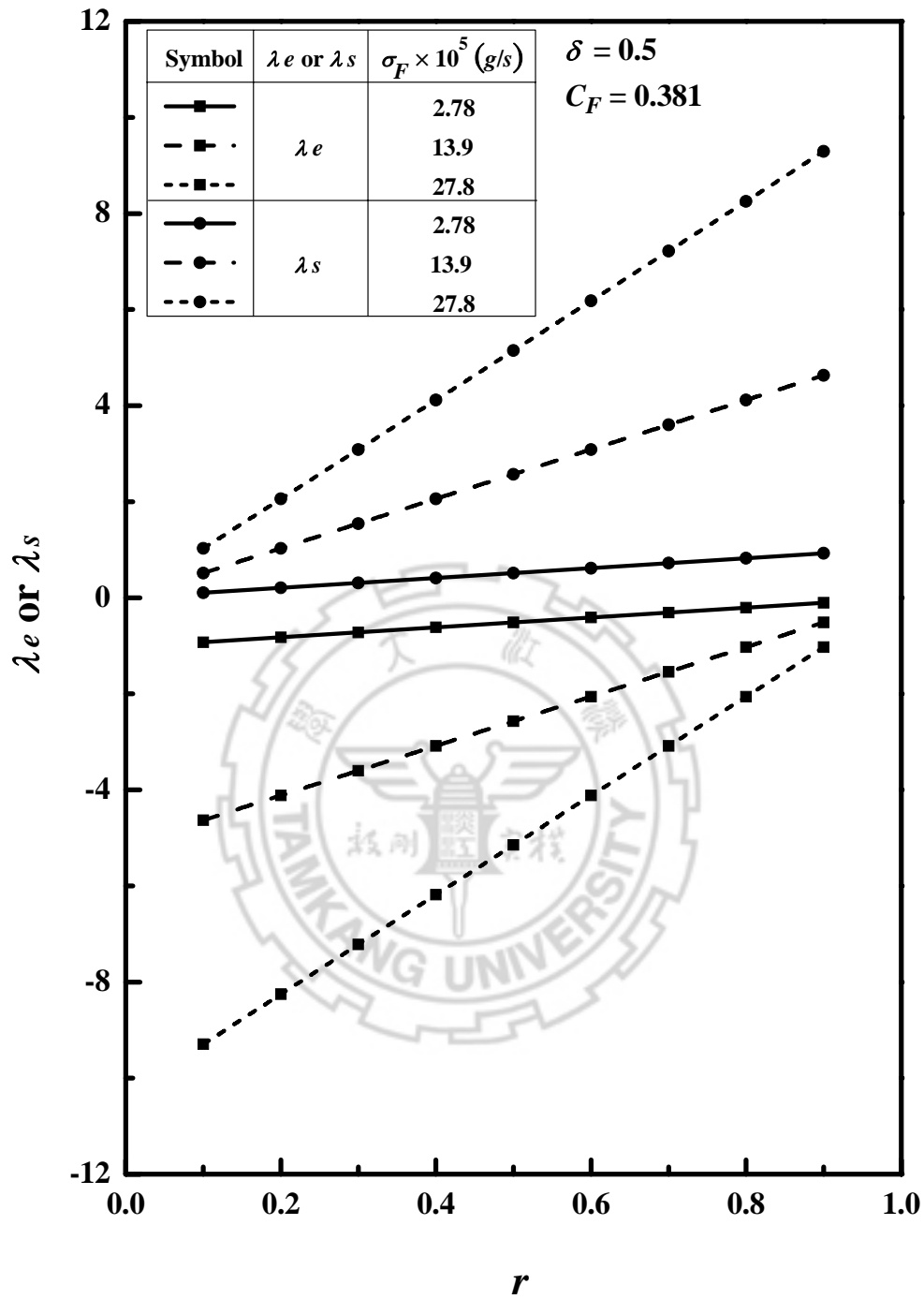
圖(4.1-31)及圖(4.1-32)是利用平板型熱擴散塔之解析解數學模型模擬出來之結果與近似解及實驗值作比較，從圖中可看出其解析解模擬出結果和實驗值頗為相近，且亦比近似解更接近實驗值，因此，可證明解析解數學模型模擬之結果更具可靠性。除此之外，本研究找尋多組之實驗數據與解析解數學模型做比較，從圖(4.1-33)至圖(4.1-39)中可發現，實驗值趨勢與解析解理論值都很接近，故可顯示出理論分析之正確性。



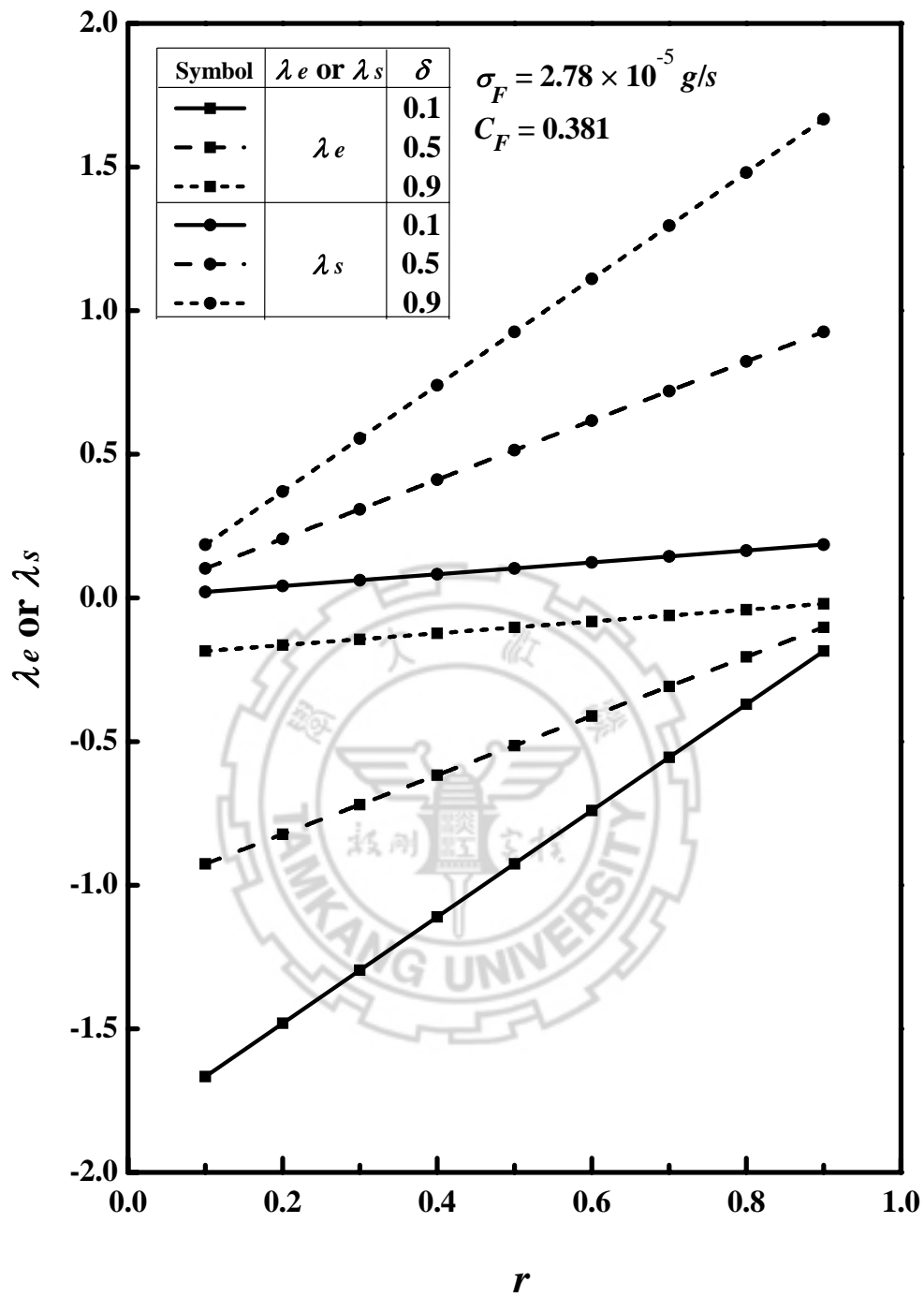
圖(4.1-1) 固定進料濃度分率 $C_F = 0.381$ 與進料位置 $\delta = 0.5$ ，在不同出料質量分率下，進料質量流率與特徵值之關係圖



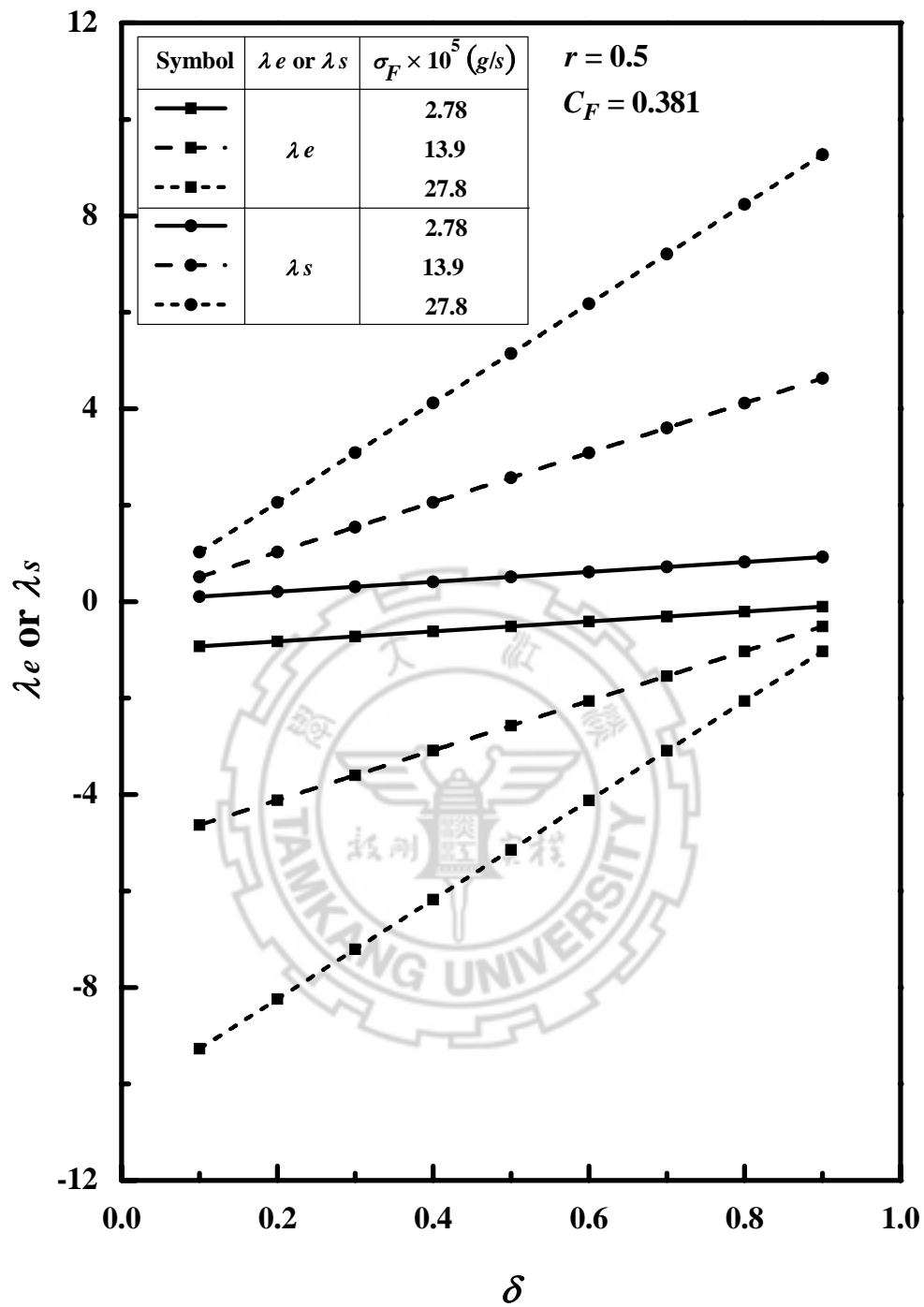
圖(4.1-2) 固定進料濃度分率 $C_F = 0.381$ 與出料質量分率 $r = 0.5$ ，
 在不同進料位置下，進料質量流率與特徵值之關係圖



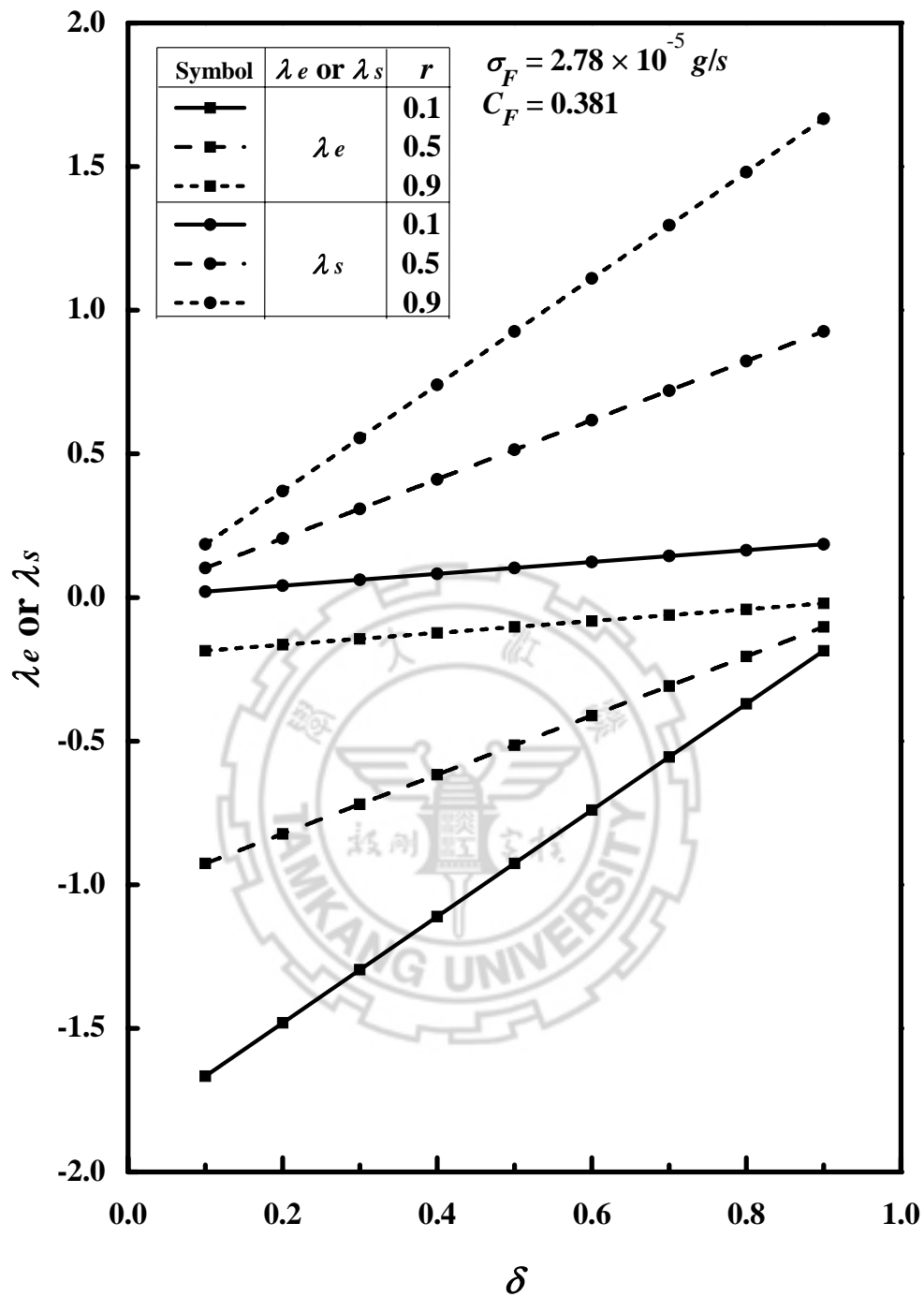
圖(4.1-3) 固定進料濃度分率 $C_F = 0.381$ 與進料位置 $\delta = 0.5$ ，在不同進料質量流率下，出料質量分率與特徵值之關係圖



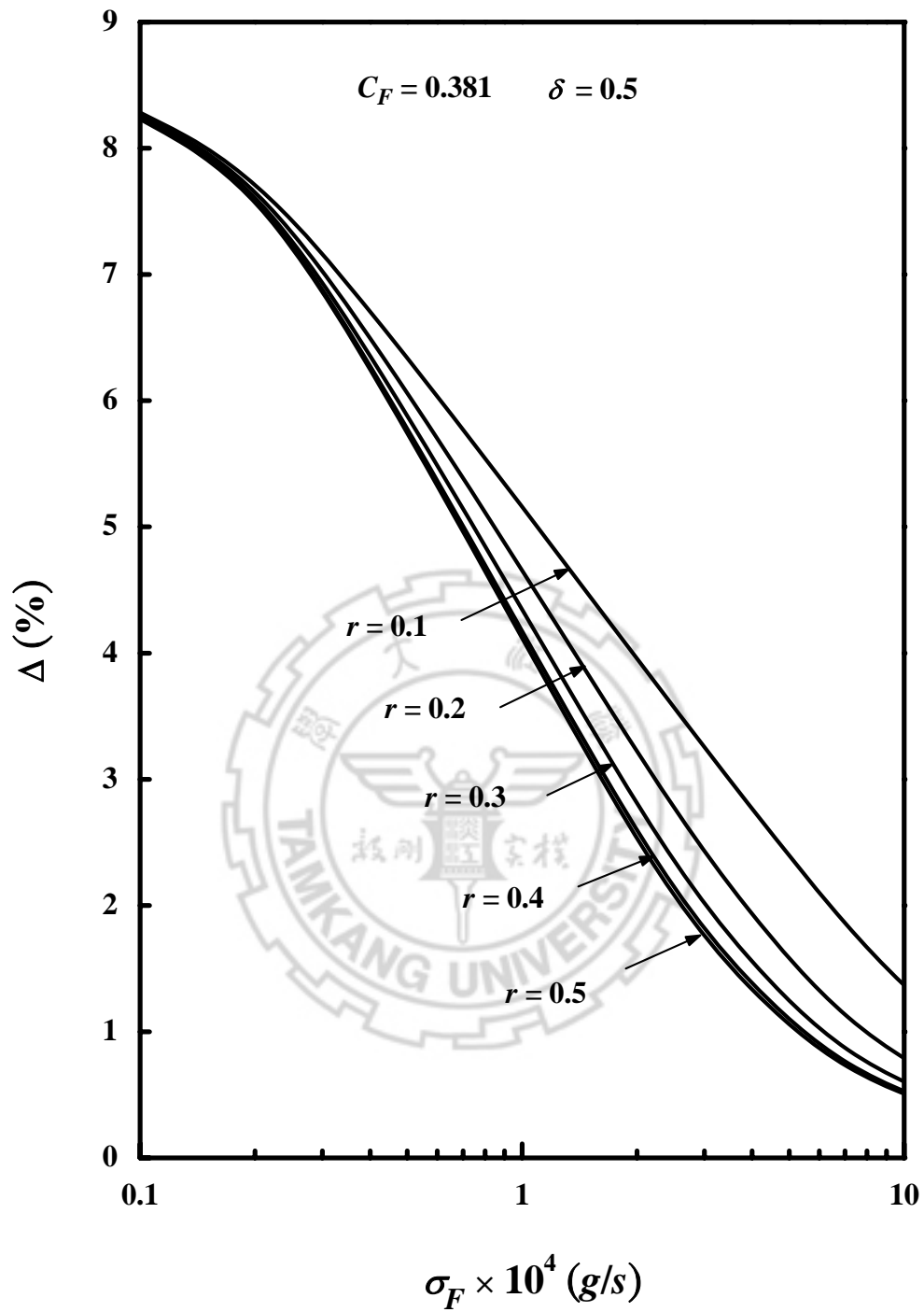
圖(4.1-4) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與進料濃度分率 $C_F = 0.381$ ，在不同進料位置下，出料質量分率與特徵值之關係圖



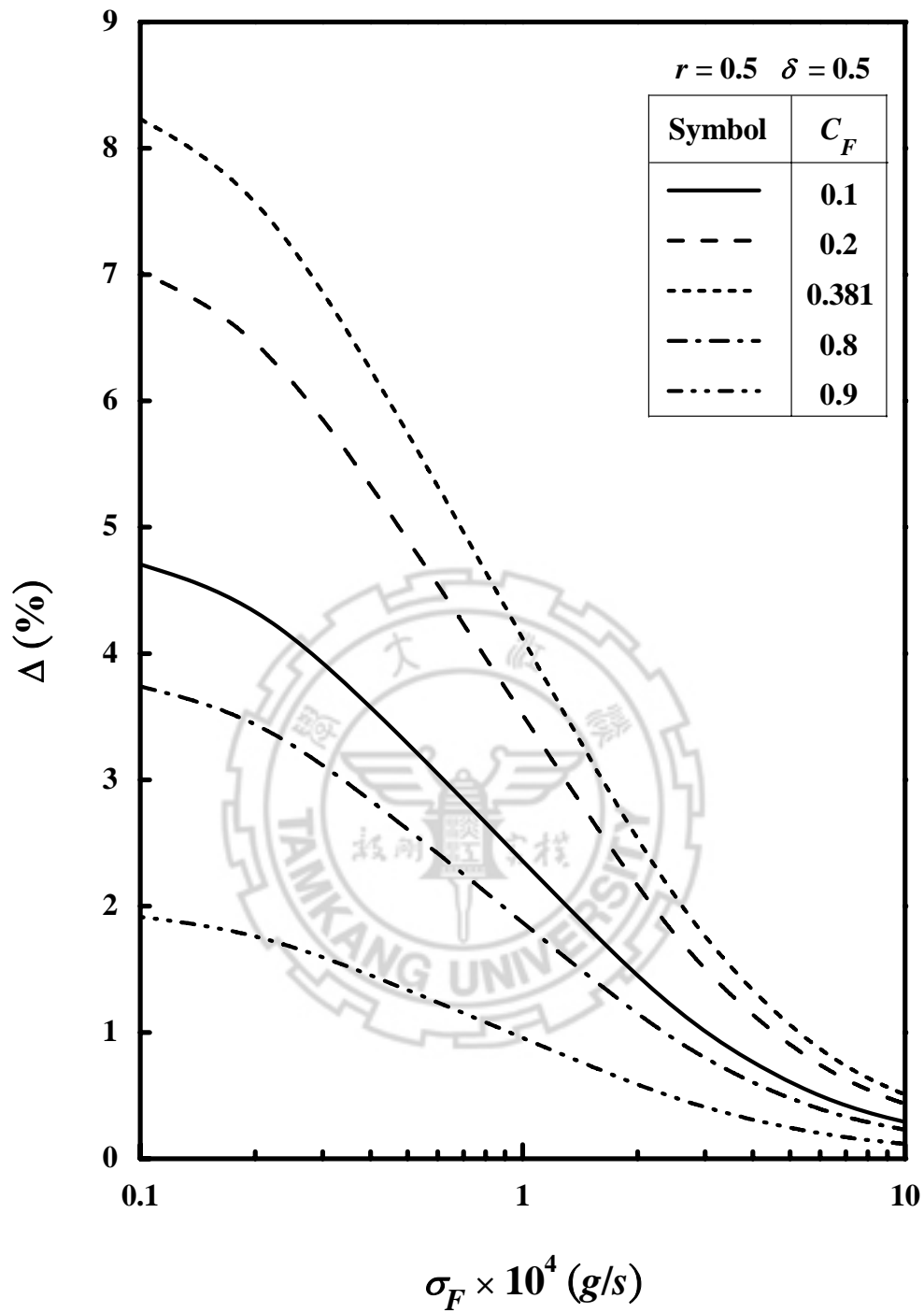
圖(4.1-5) 固定進料濃度分率 $C_F = 0.381$ 與出料質量分率 $r = 0.5$ ，
在不同進料質量流率下，進料位置與特徵值之關係圖



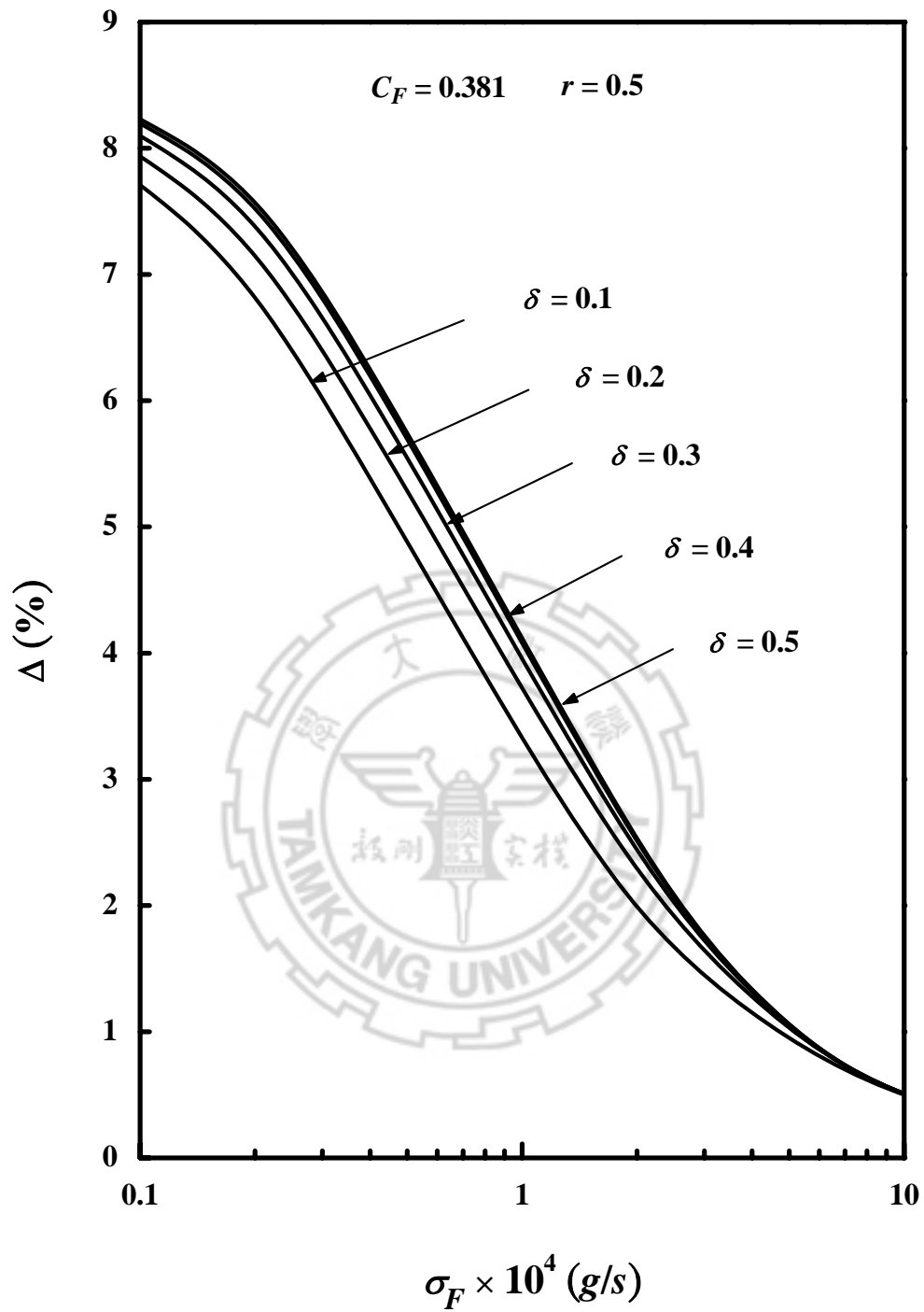
圖(4.1-6) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與進料濃度分率 $C_F = 0.381$ ，在不同出料質量分率下，進料位置與特徵值之關係圖



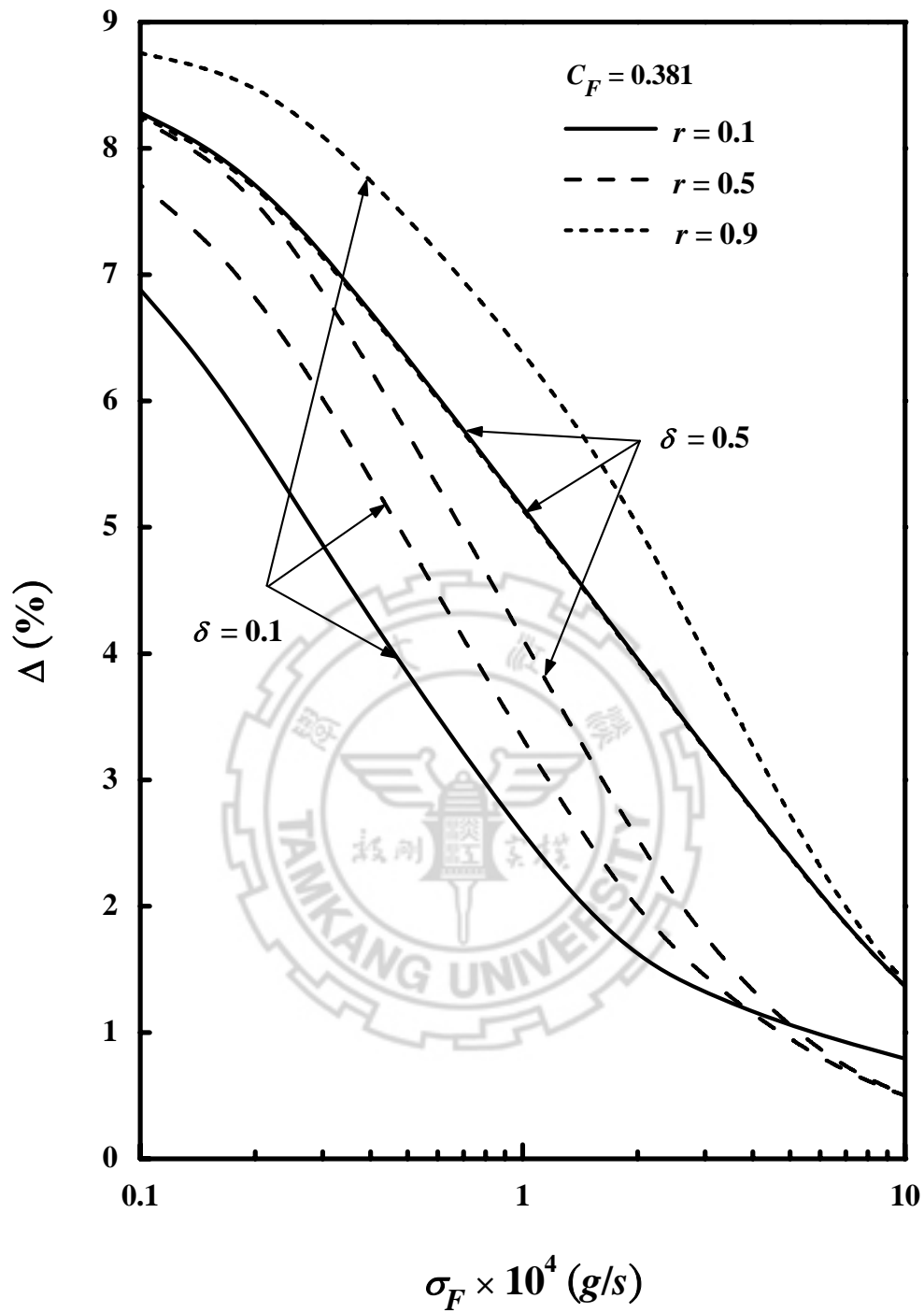
圖(4.1-7) 固定進料濃度分率 $C_F = 0.381$ 與進料位置 $\delta = 0.5$ ，在不同出料質量分率下，進料質量流率與分離度之關係圖



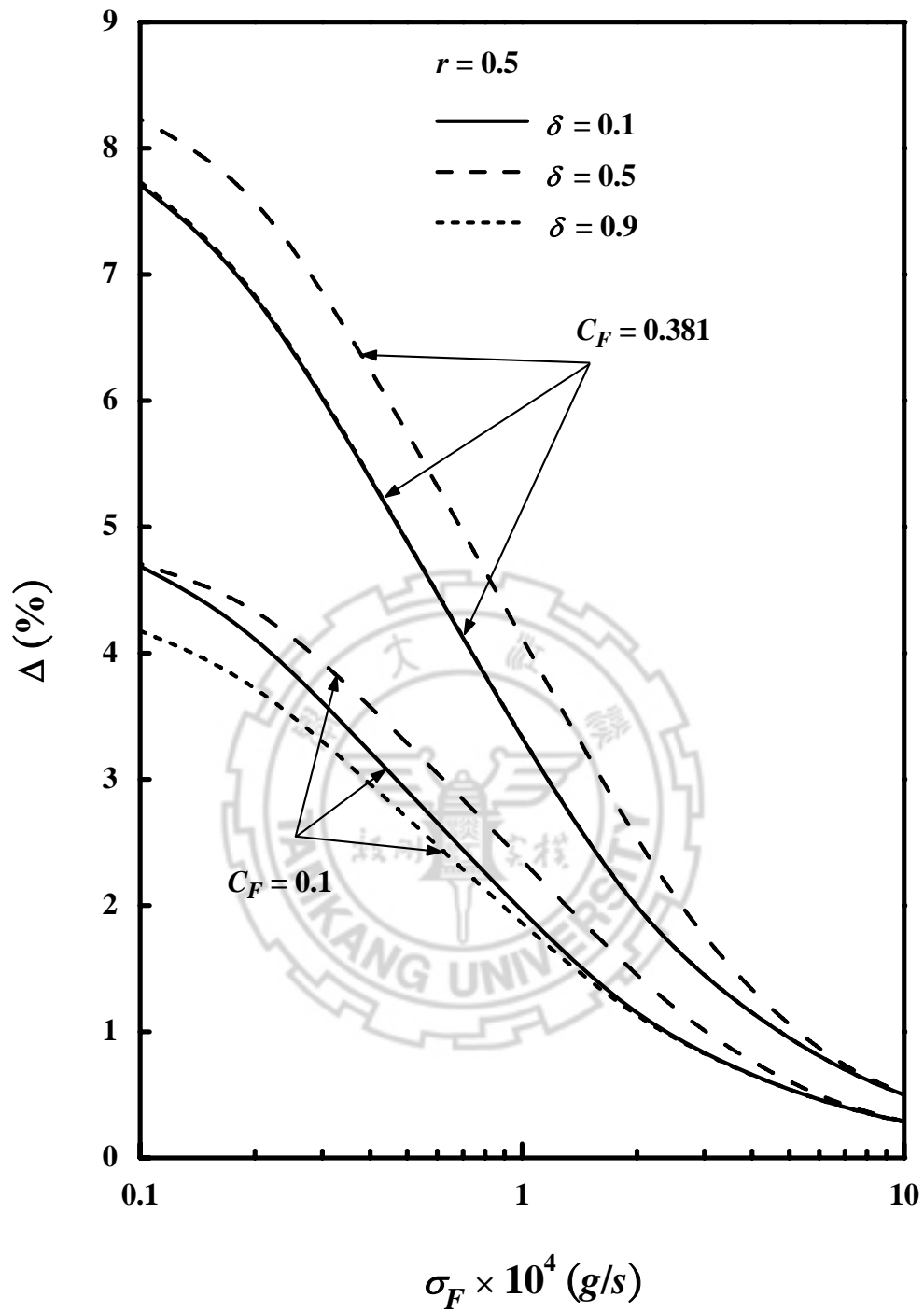
圖(4.1-8) 固定出料質量分率 $r=0.5$ 與進料位置 $\delta=0.5$ ，在不同進料濃度分率下，進料質量流率與分離度之關係圖



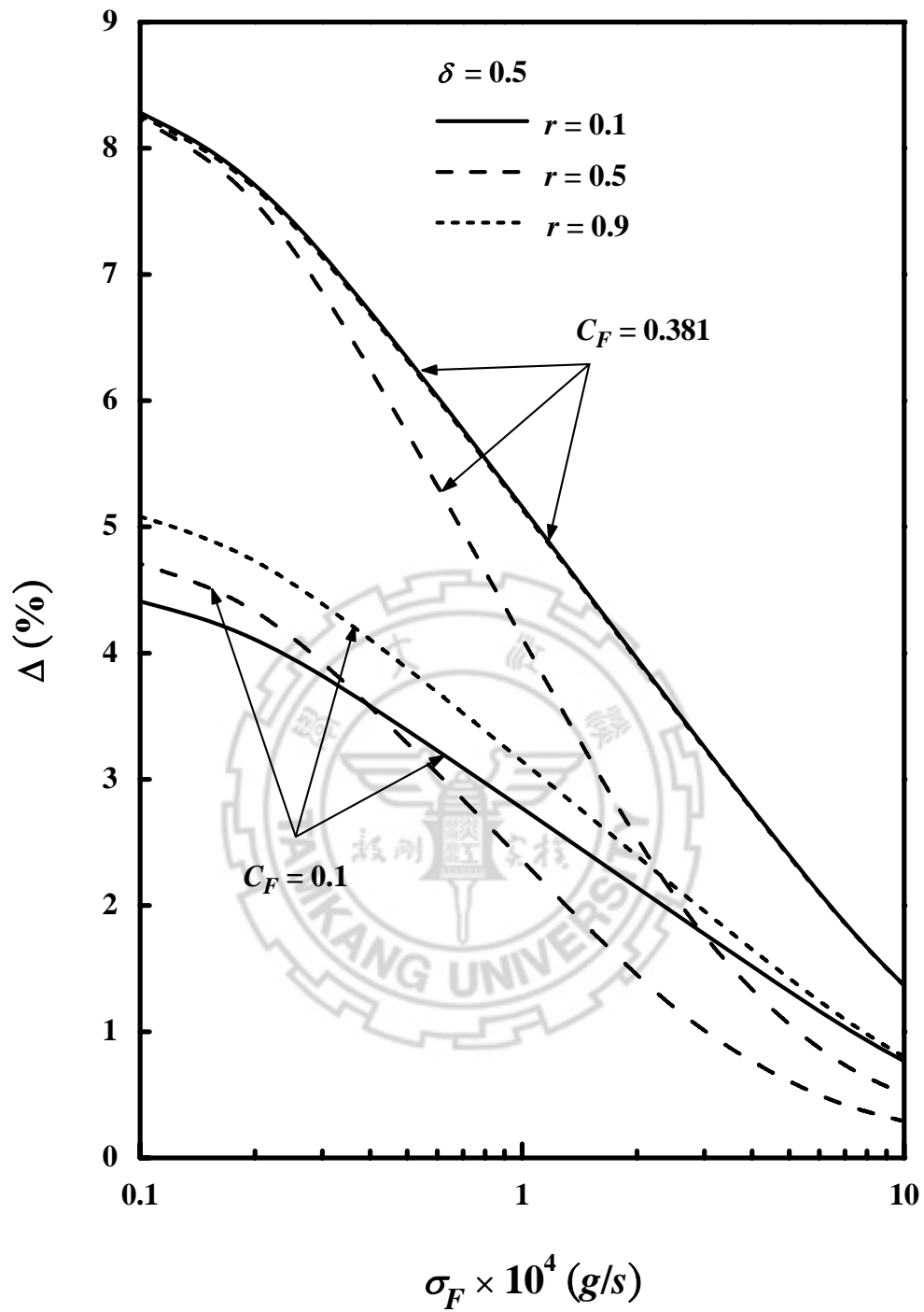
圖(4.1-9) 固定出料濃度分率 $C_F = 0.381$ 與出料質量分率 $r = 0.5$ ，
 在不同進料位置下，進料質量流率與分離度之關係圖



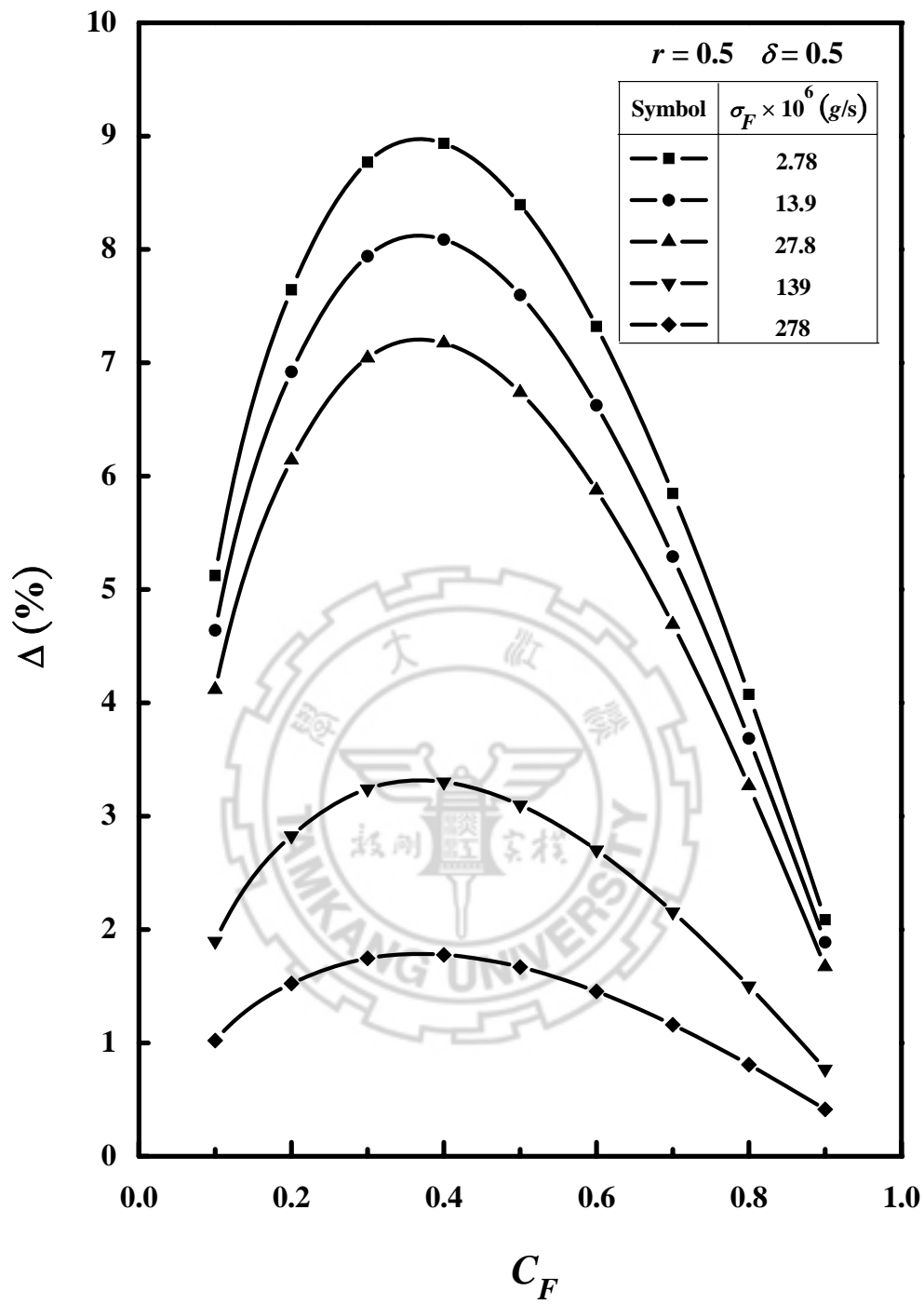
圖(4.1-10) 固定出料濃度分率 $C_F = 0.381$ ，在不同出料質量分率與
進料位置下，進料質量流率與分離度之關係圖



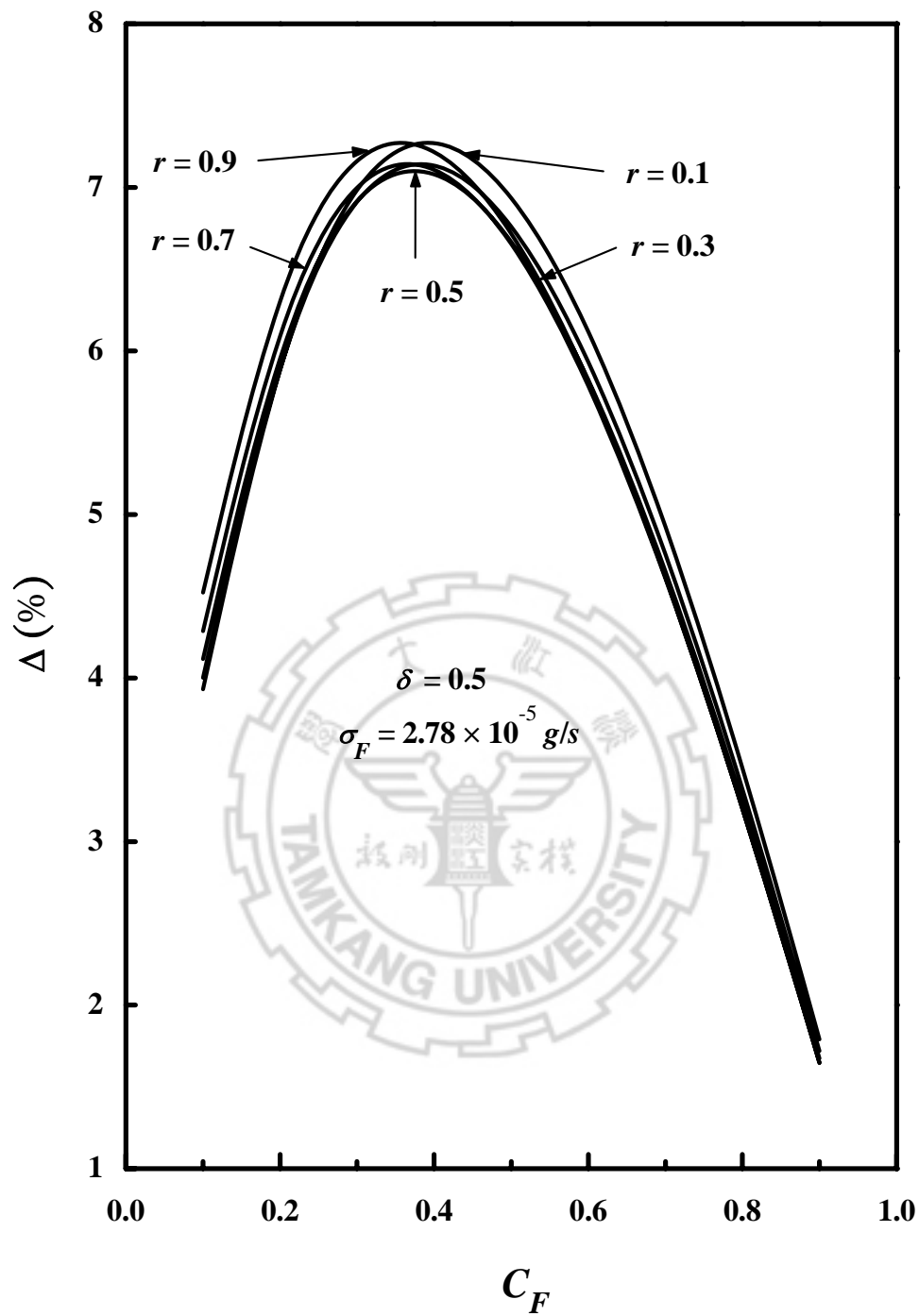
圖(4.1-11) 固定出料質量分率 $r=0.5$ ，在不同進料濃度分率與進料位置下，進料質量流率與分離度之關係圖



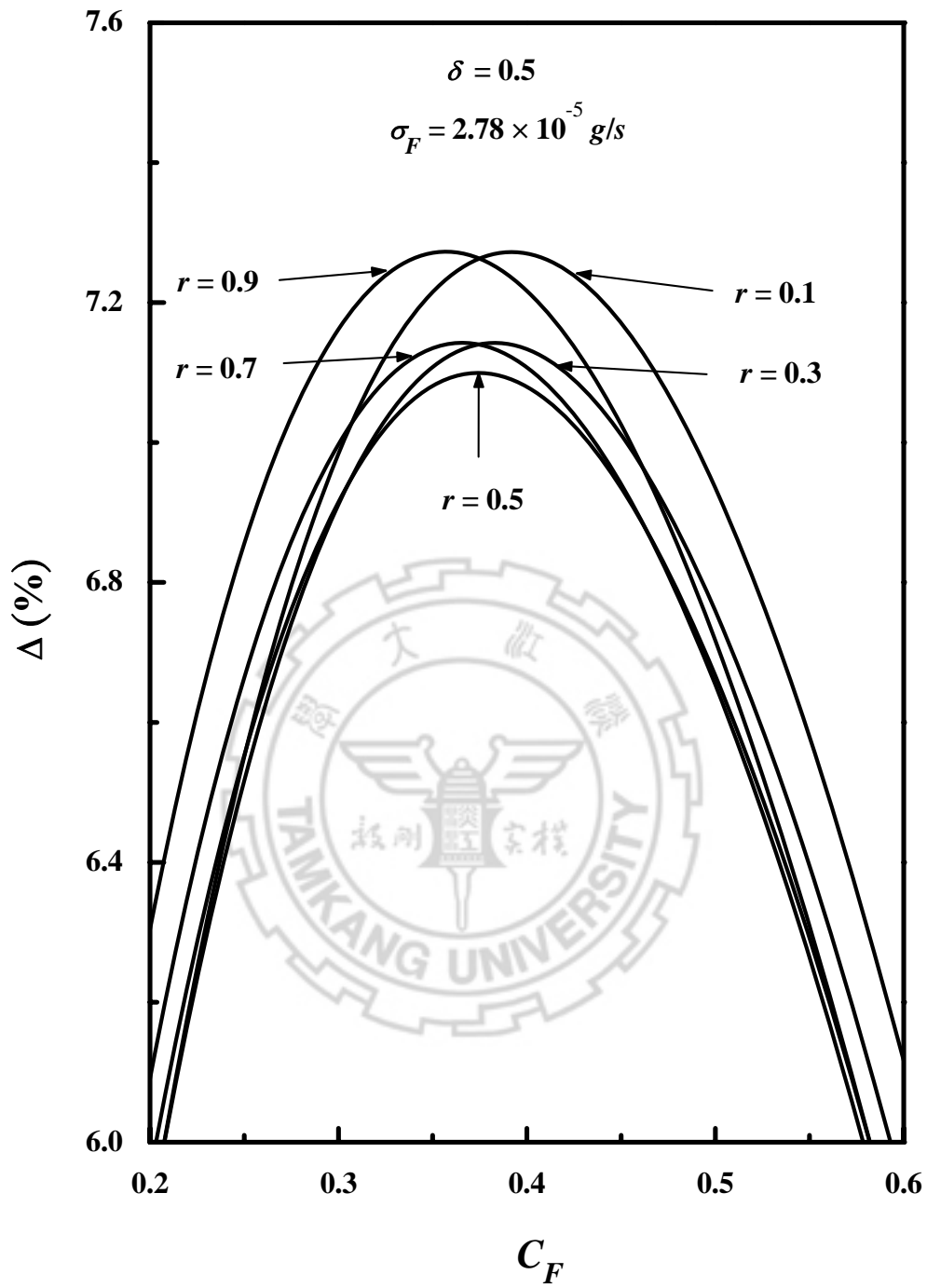
圖(4.1-12) 固定進料位置 $\delta=0.5$ ，在不同進料濃度分率與出料質量分率下，進料質量流率與分離度之關係圖



圖(4.1-13) 固定出料質量分率 $r=0.5$ 與進料位置 $\delta=0.5$ ，在不同進料質量流率下，進料濃度分率與分離度之關係圖



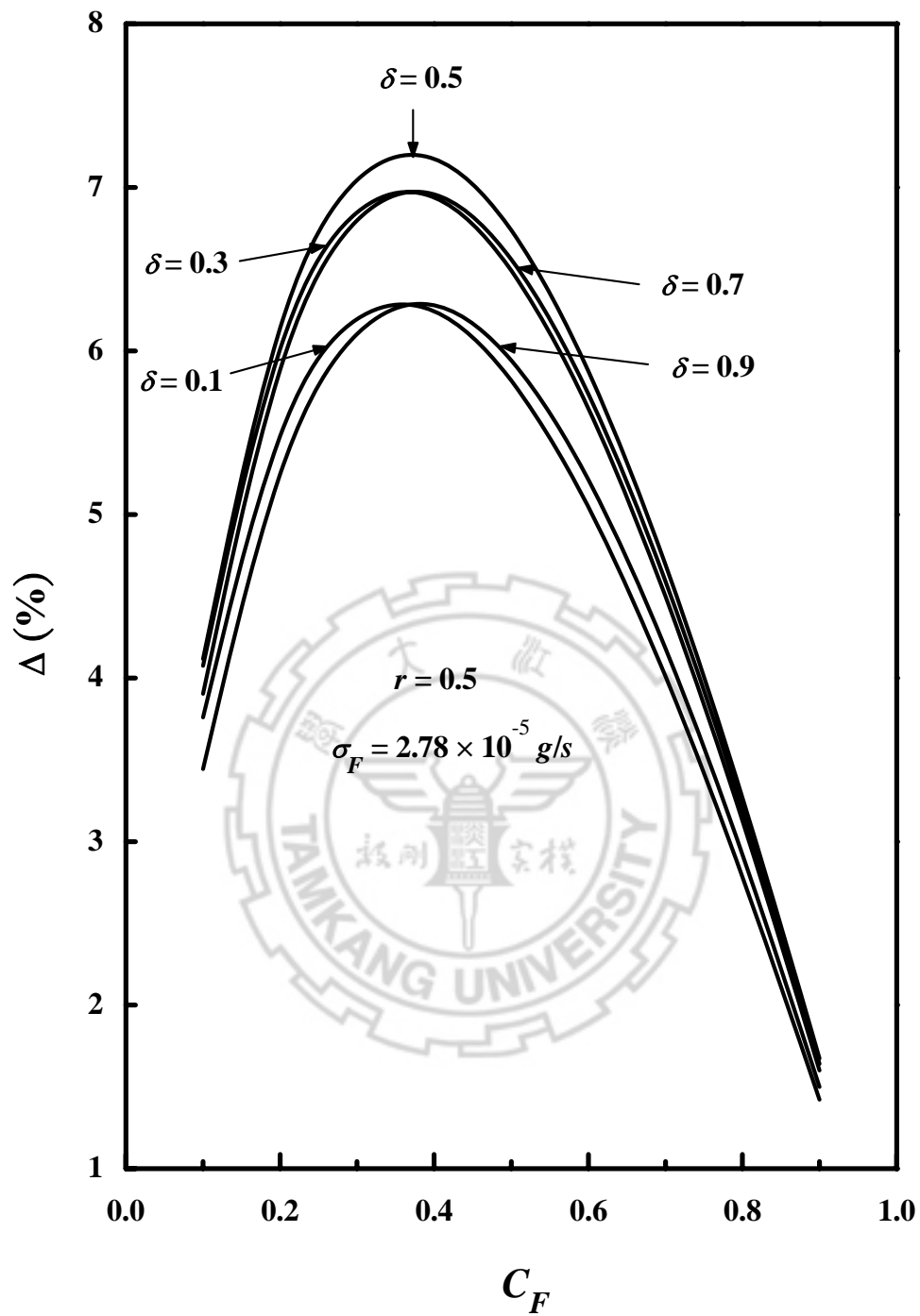
圖(4.1-14.1)固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與進料位置 $\delta = 0.5$ ，在不同出料質量分率下，進料濃度分率與分離度之關係圖



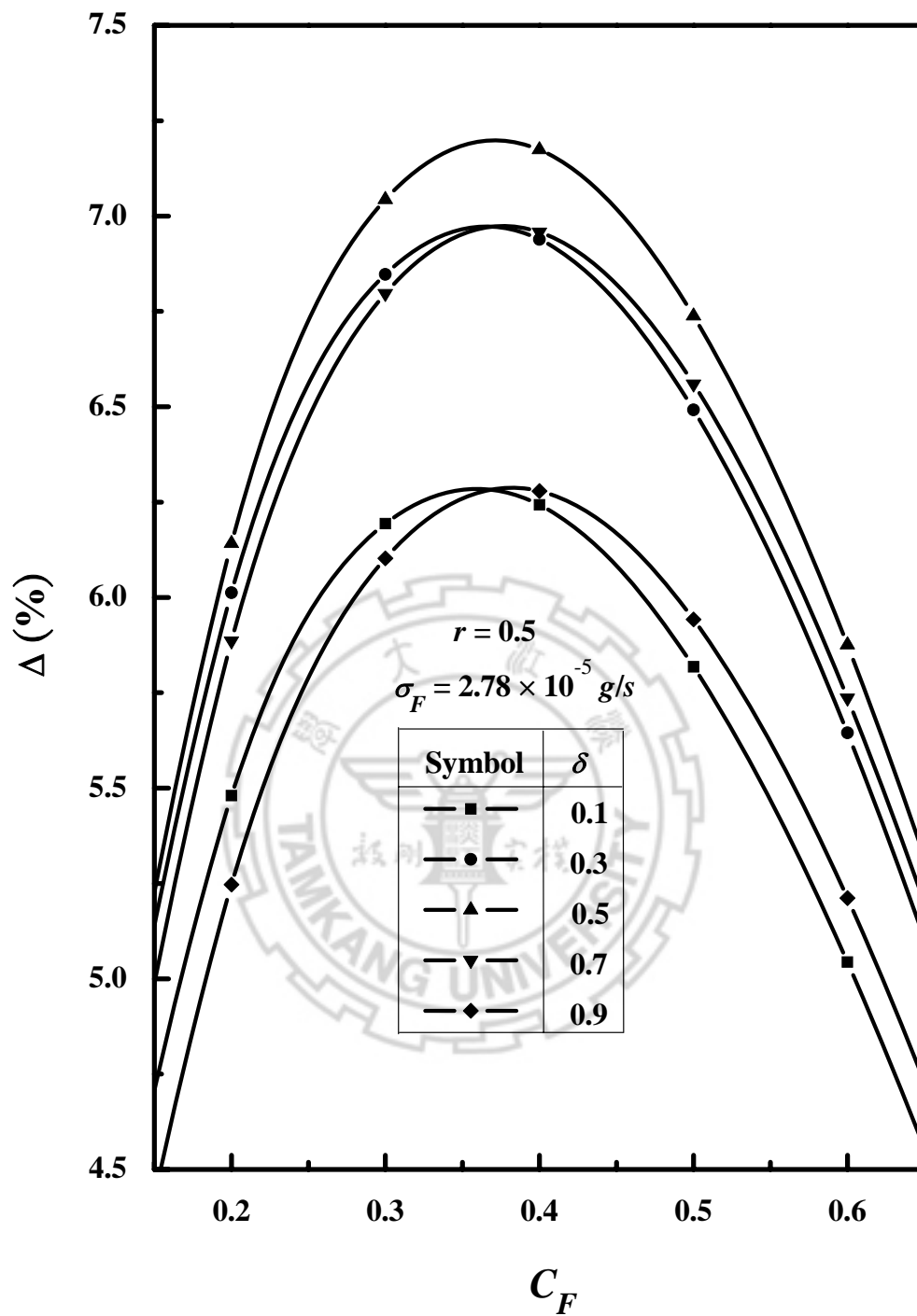
圖(4.1-14.2)固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與進料位置

$\delta = 0.5$ ，在不同出料質量分率下，進料濃度分率與分離

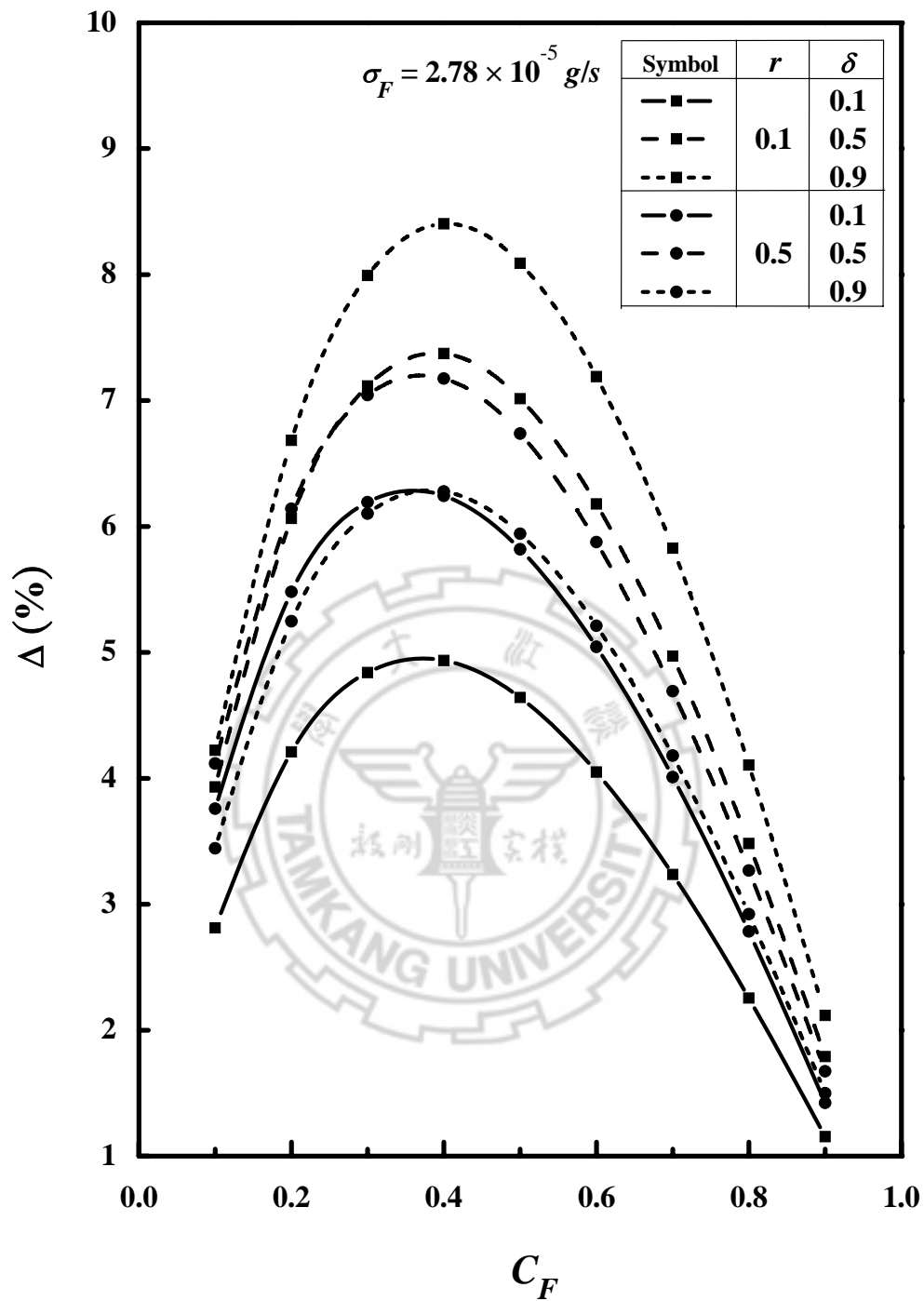
度之關係圖



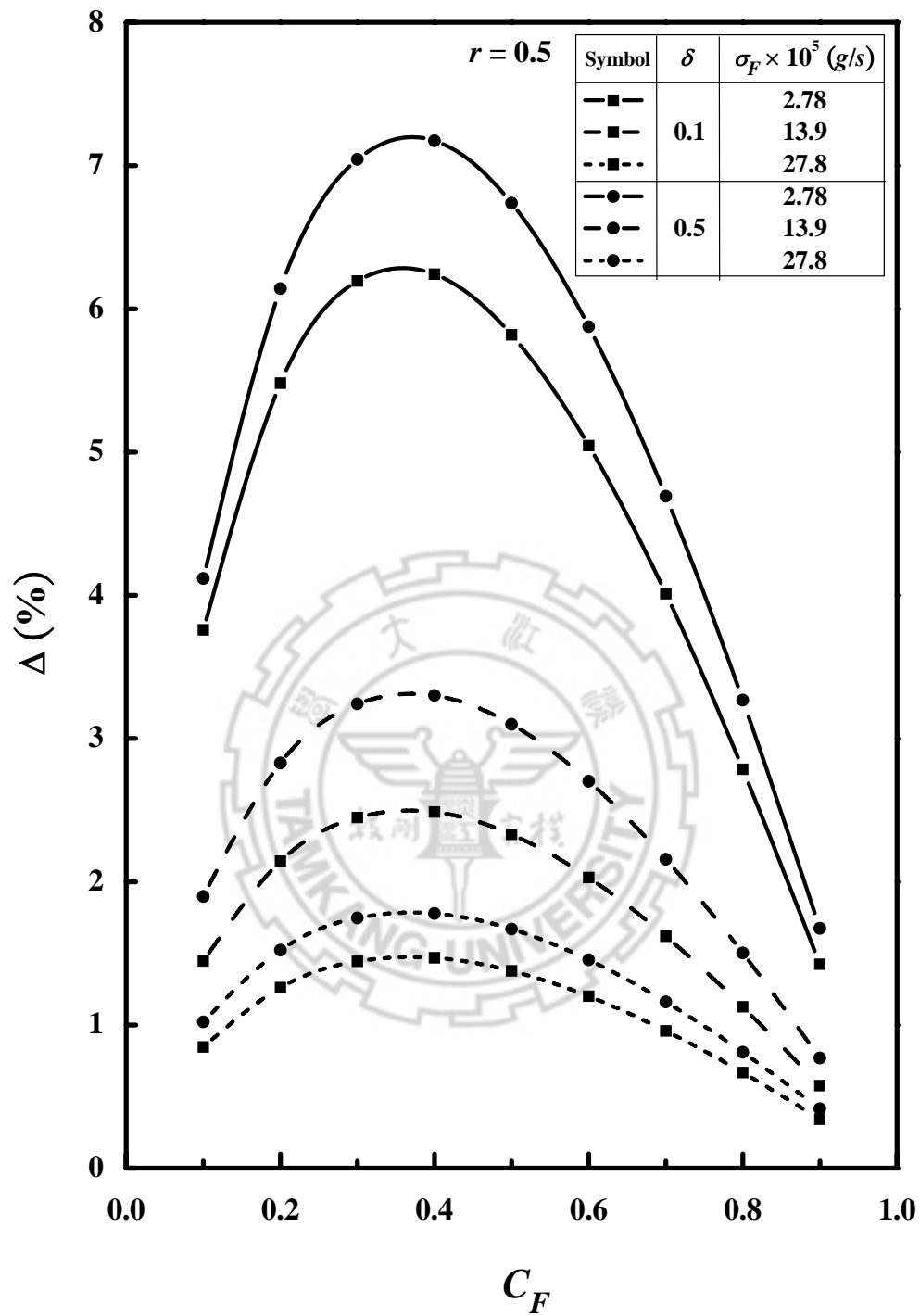
圖(4.1-15.1)固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與出料質量分率 $r = 0.5$ ，在不同進料位置下，進料濃度分率與分離度之關係圖



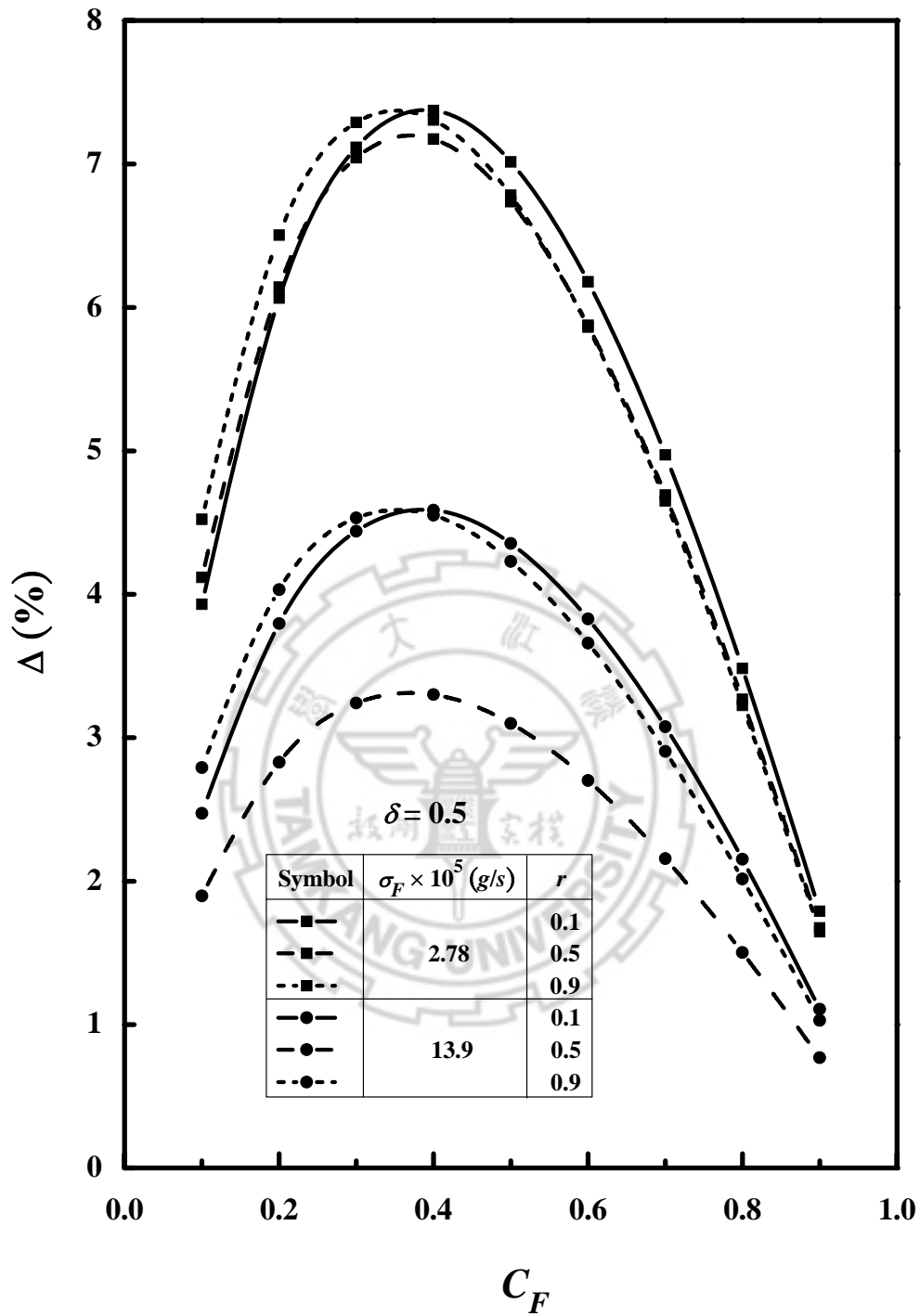
圖(4.1-15.2)固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與出料質量分率 $r = 0.5$ ，在不同進料位置下，進料濃度分率與分離度之關係圖



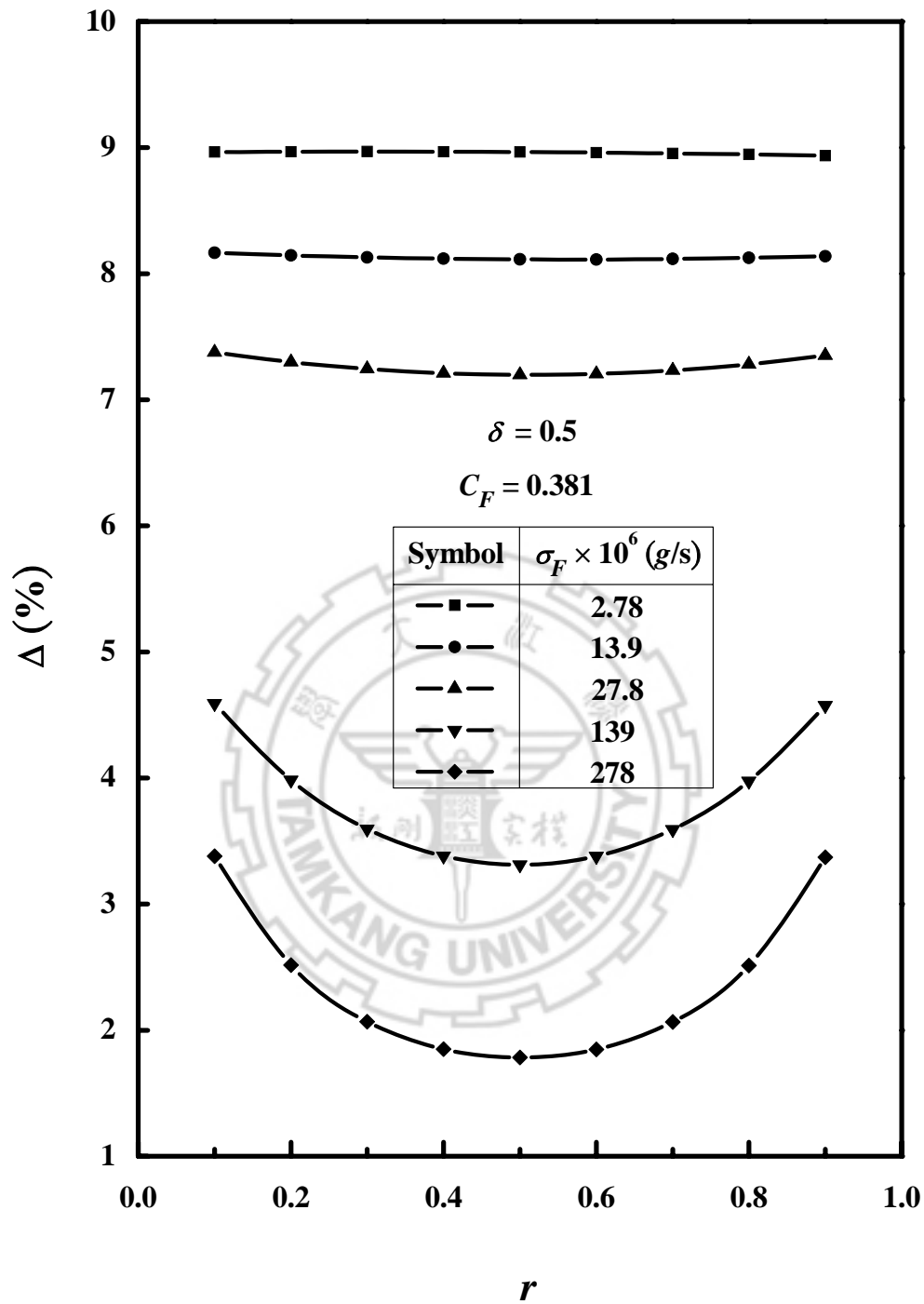
圖(4.1-16) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ ，在不同出料質量分率與進料位置下，進料濃度分率與分離度之關係圖



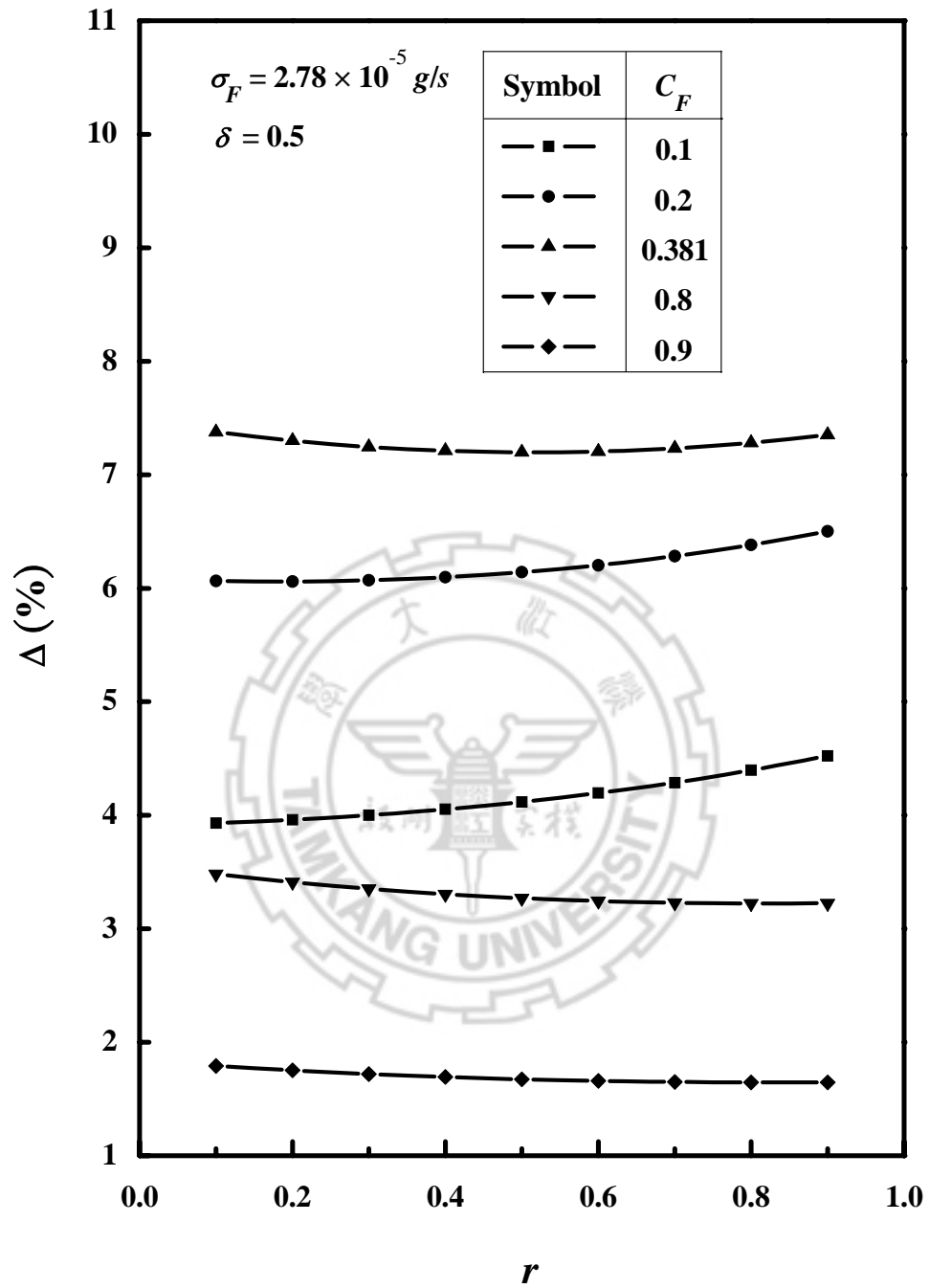
圖(4.1-17) 固定出料質量分率 $r=0.5$ ，在不同進料質量流率與進料位置下，進料濃度分率與分離度之關係圖



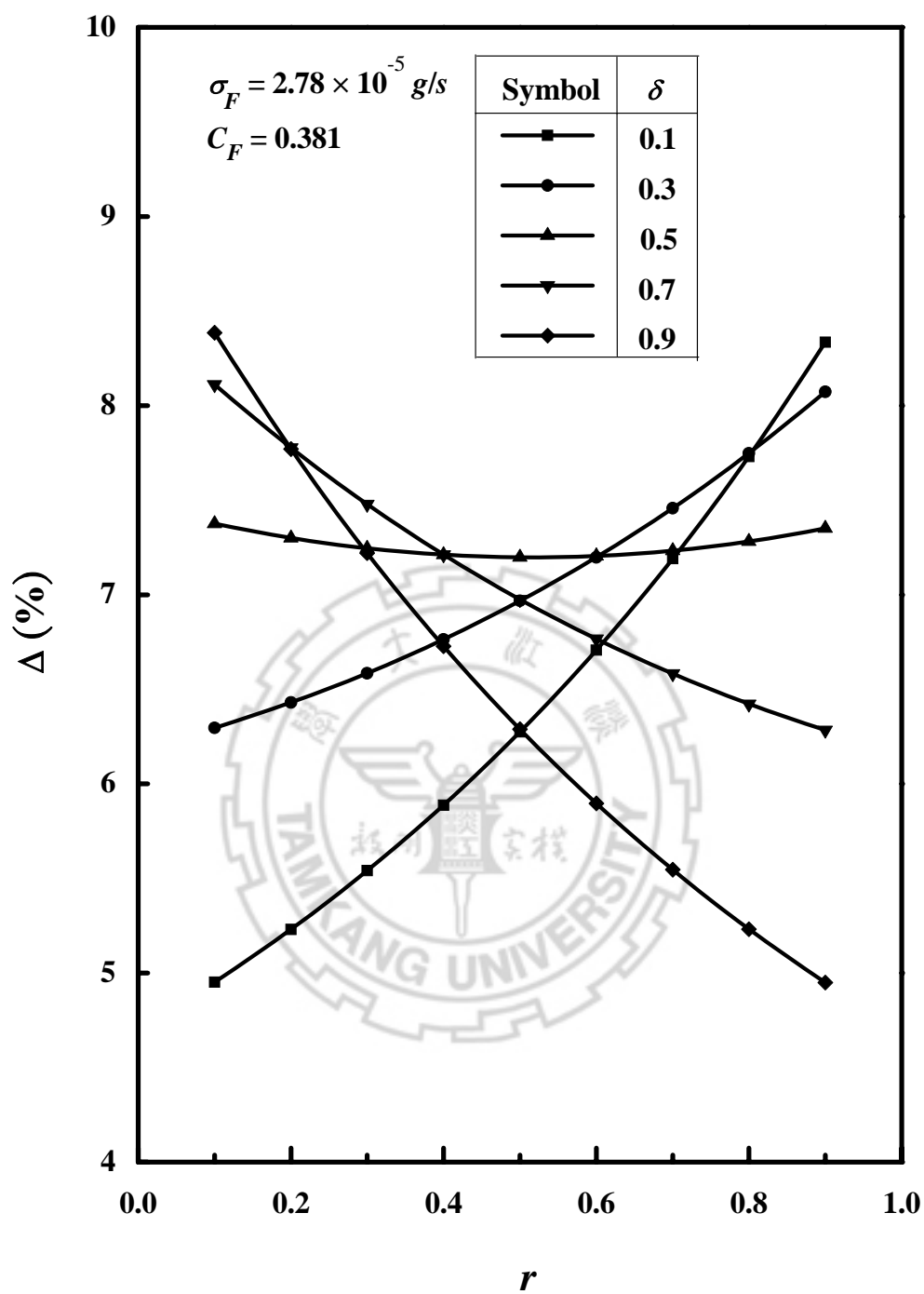
圖(4.1-18) 固定進料位置 $\delta=0.5$ ，在不同進料質量流率與出料質量分率下，進料濃度分率與分離度之關係圖



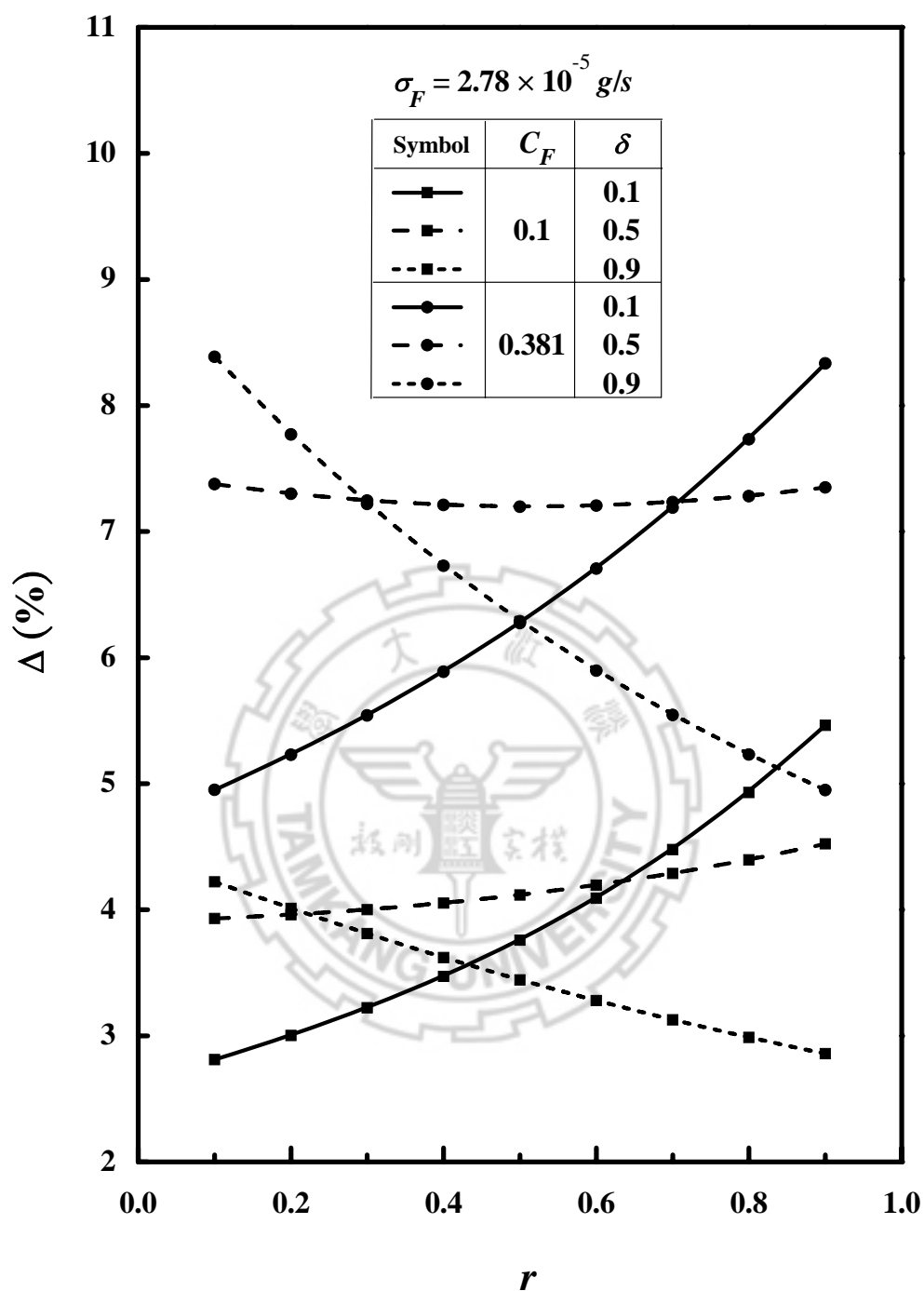
圖(4.1-19) 固定進料位置 $\delta = 0.5$ 與進料濃度分率 $C_F = 0.381$ ，在不同進料質量流率下，出料質量分率與分離度之關係圖



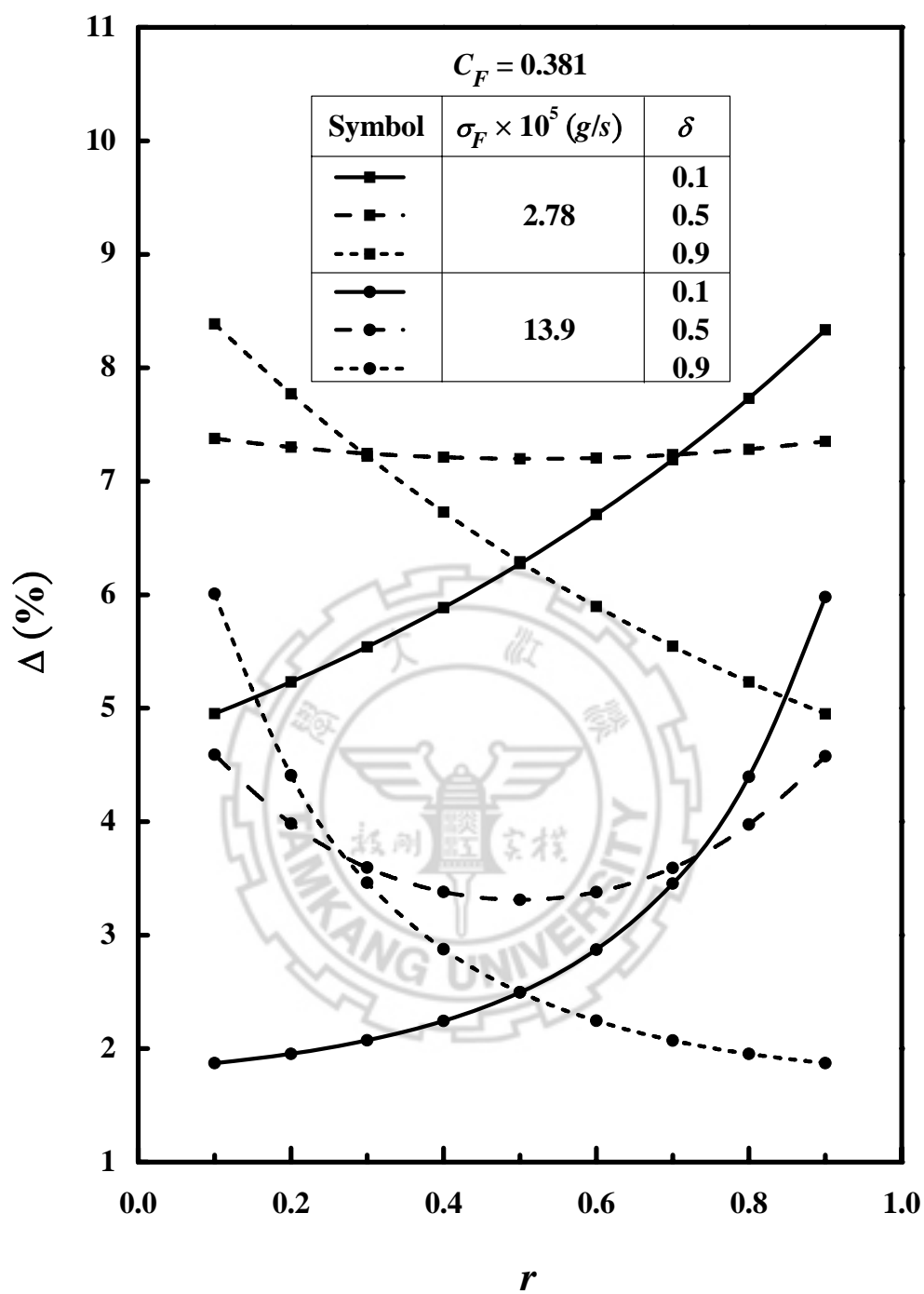
圖(4.1-20) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與進料位置 $\delta = 0.5$ ，在不同進料濃度分率下，出料質量分率與分離度之關係圖



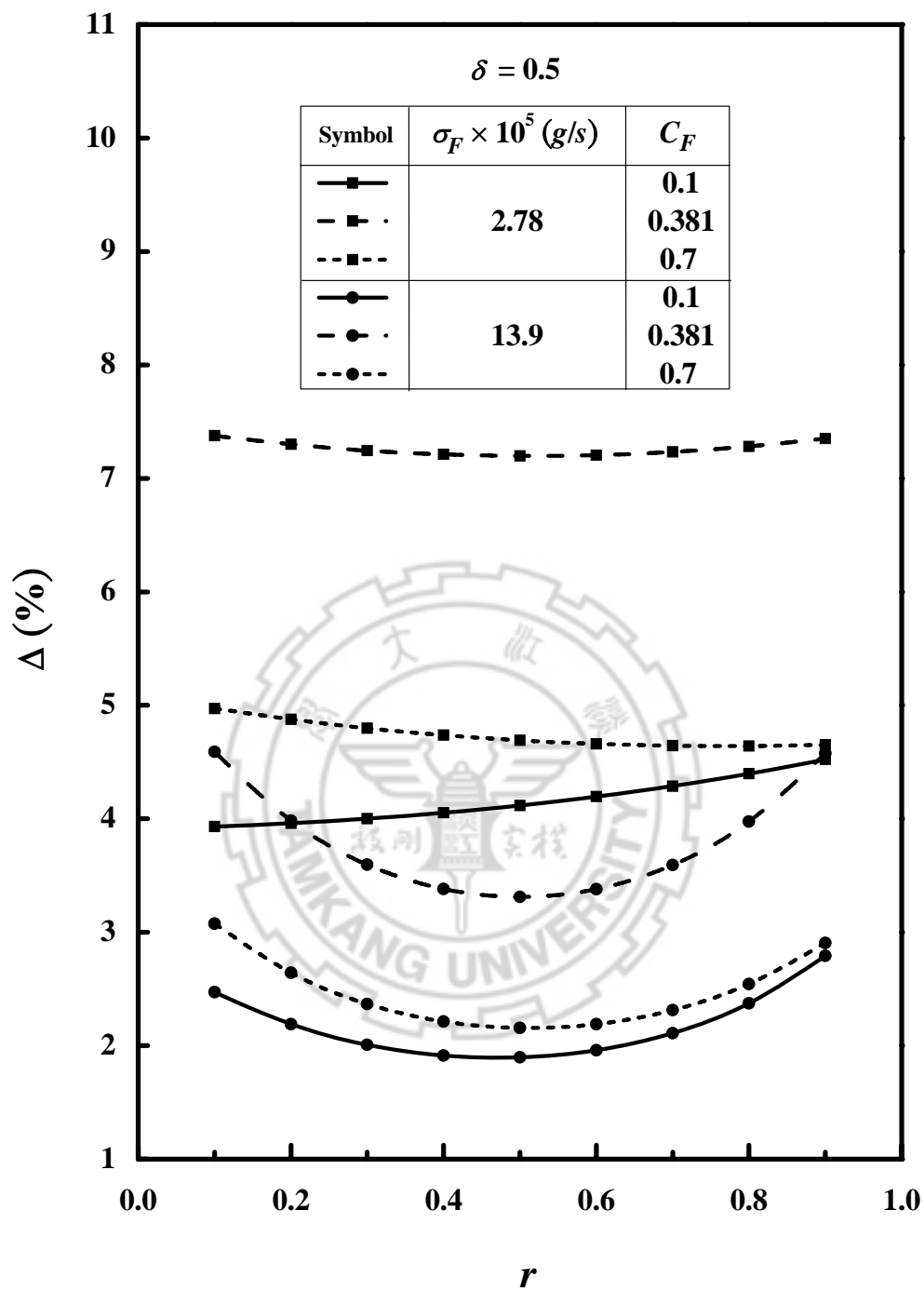
圖(4.1-21) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與進料濃度分率 $C_F = 0.381$ ，在不同進料位置下，出料質量分率與分離度之關係圖



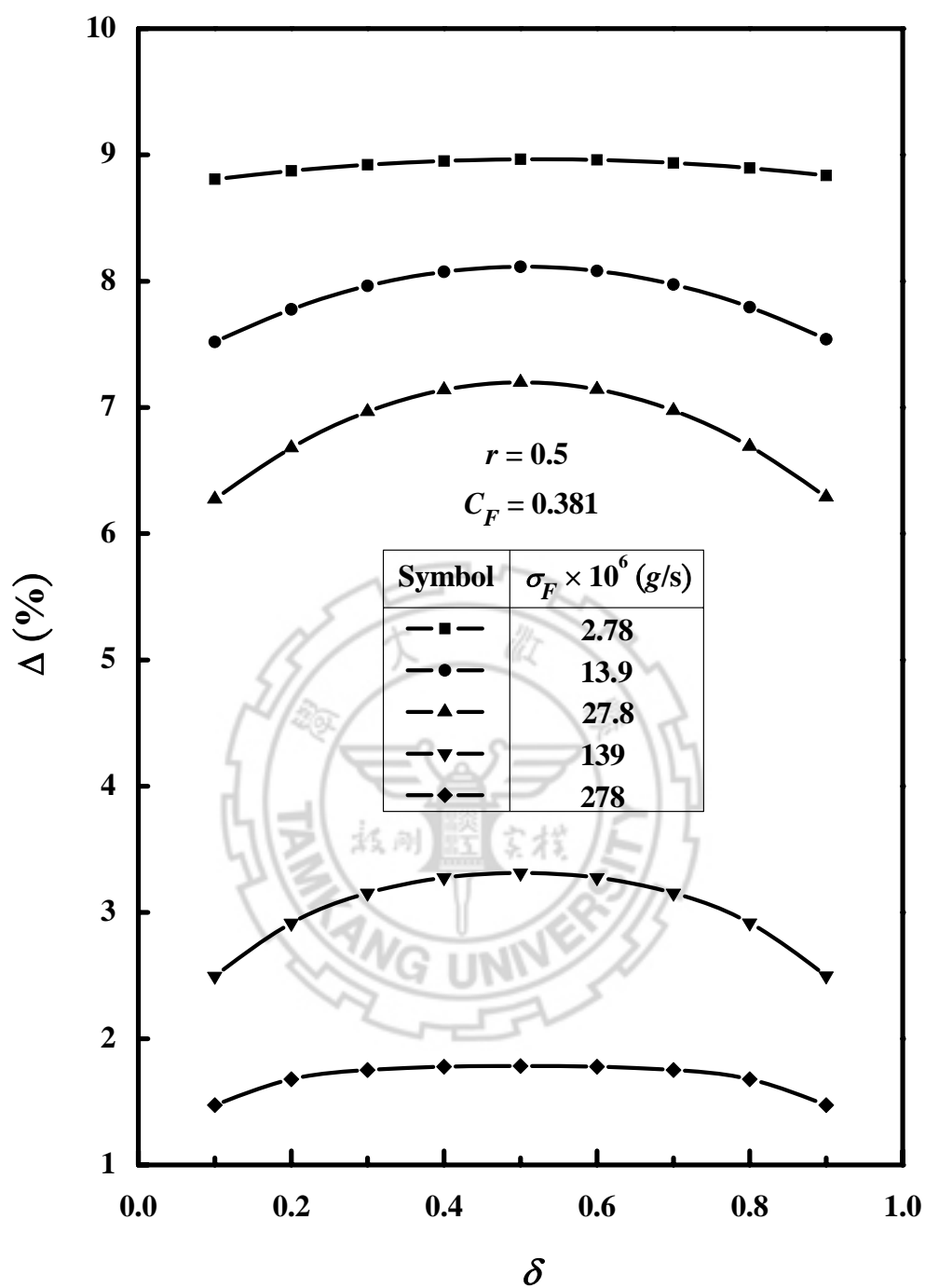
圖(4.1-22) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ ，在不同進料濃度分率與進料位置下，出料質量分率與分離度之關係圖



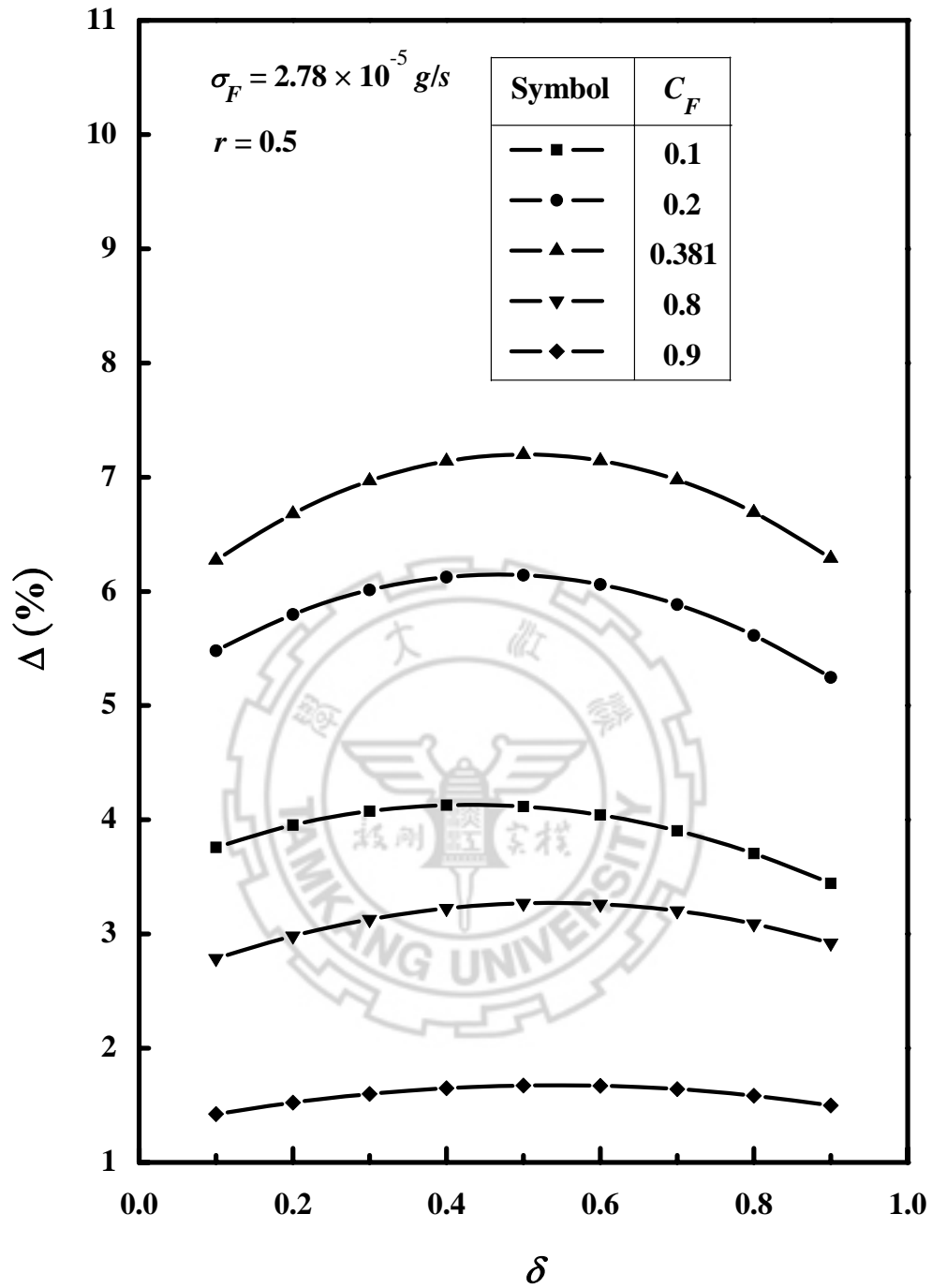
圖(4.1-23) 固定進料濃度分率 $C_F = 0.381$ ，在不同進料質量流率與進料位置下，出料質量分率與分離度之關係圖



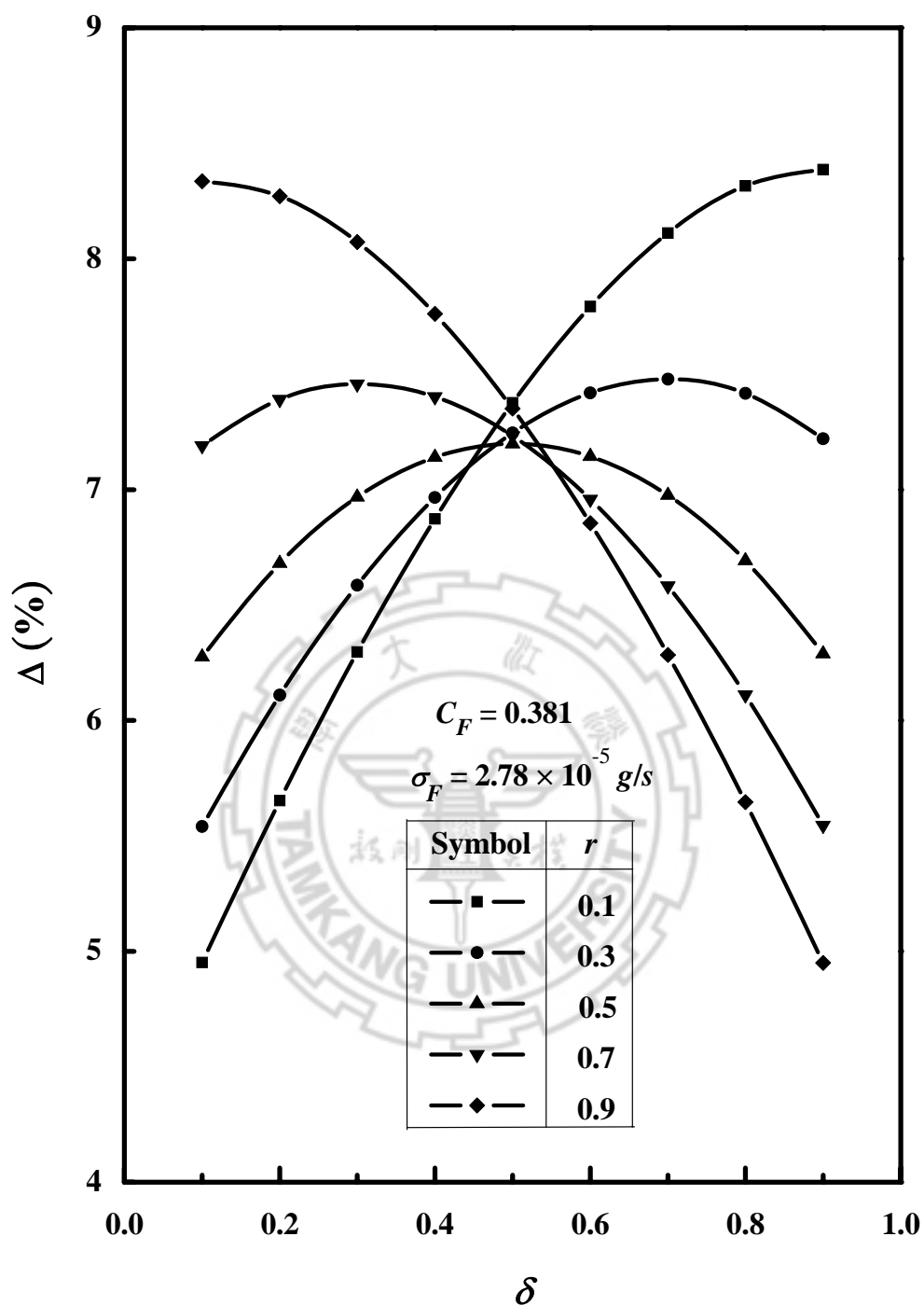
圖(4.1-24) 固定進料位置 $\delta = 0.5$ ，在不同進料質量流率與進料濃度分率下，出料質量分率與分離度之關係圖



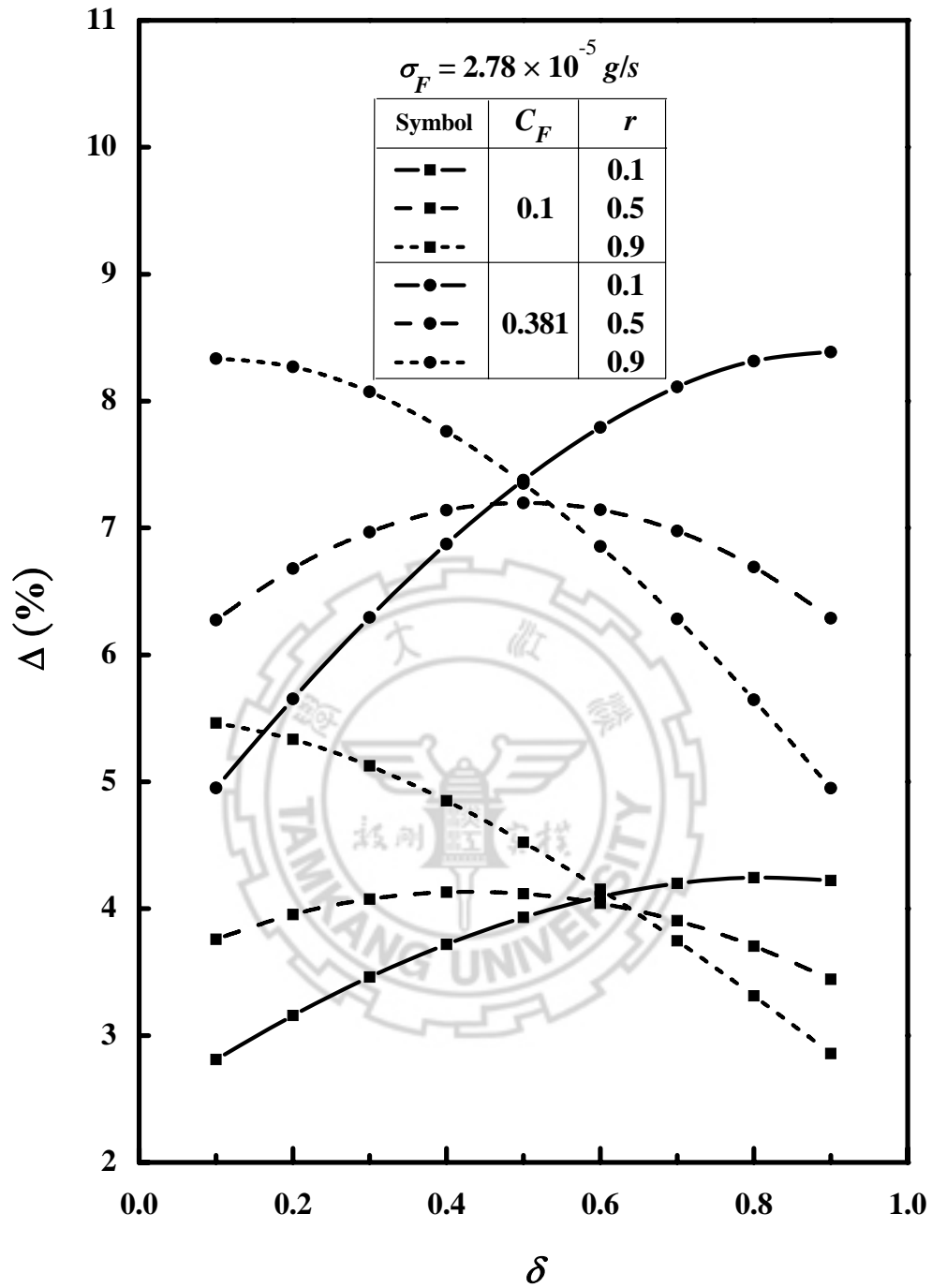
圖(4.1-25) 固定出料質量分率 $r = 0.5$ 與進料濃度分率 $C_F = 0.381$ ，
在不同進料質量流率下，進料位置與分離度之關係圖



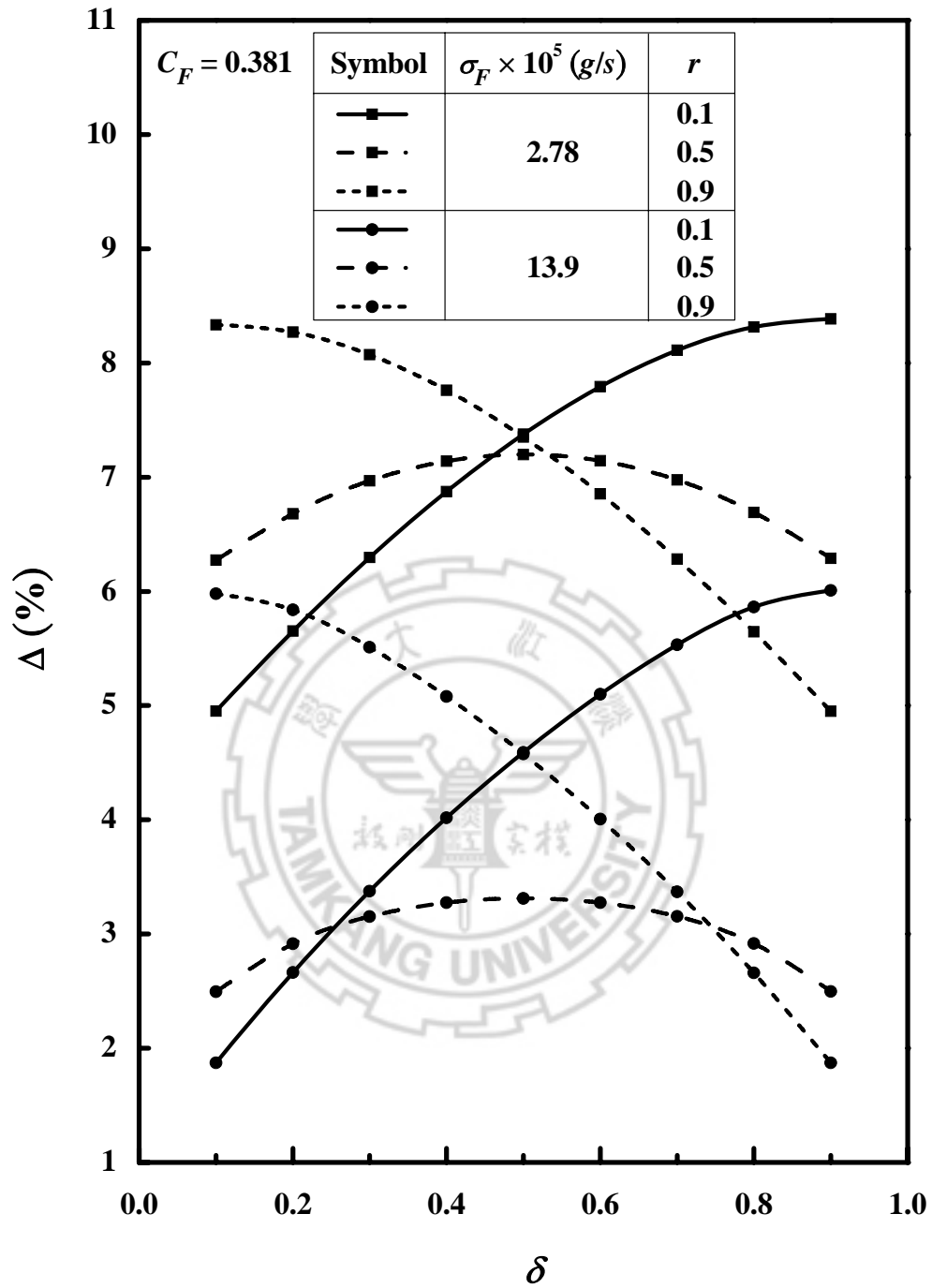
圖(4.1-26) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與出料質量分率 $r = 0.5$ ，在不同進料濃度分率下，進料位置與分離度之關係圖



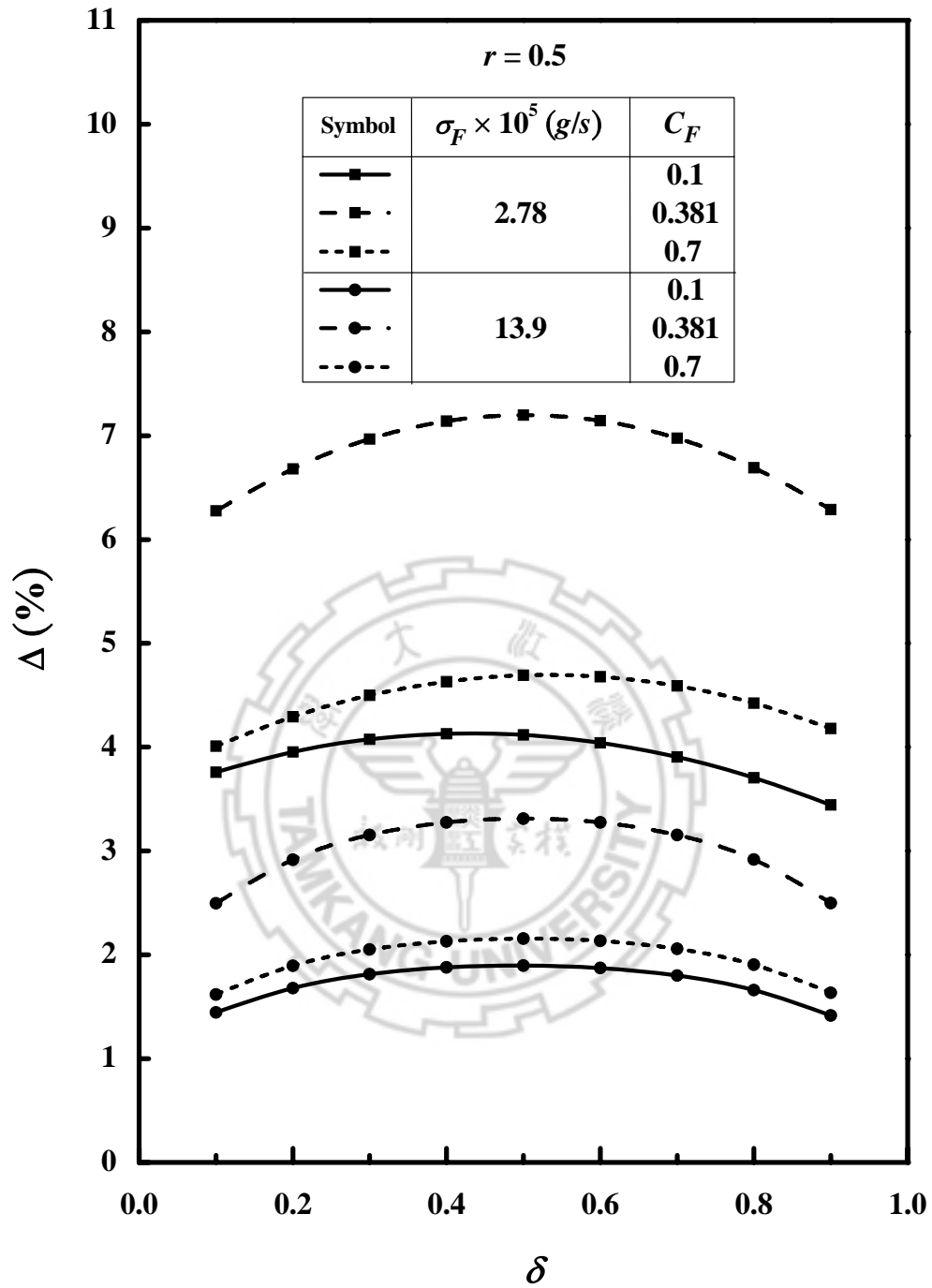
圖(4.1-27) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ 與進料濃度分率 $C_F = 0.381$ ，在不同出料質量分率下，進料位置與分離度之關係圖



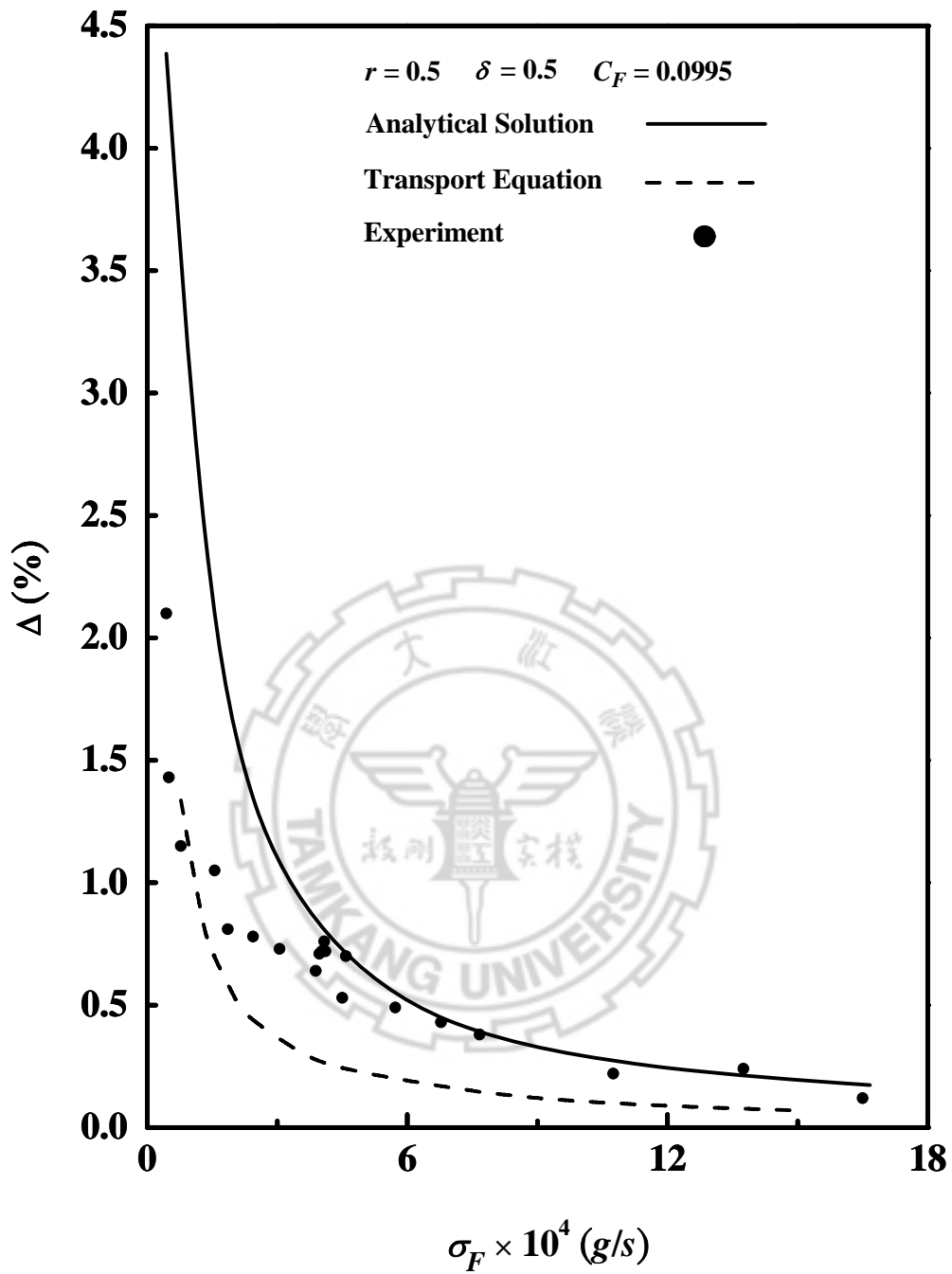
圖(4.1-28) 固定進料質量流率 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-5} \text{ g/s}$ ，在不同進料濃度分率與出料質量分率下，進料位置與分離度之關係圖



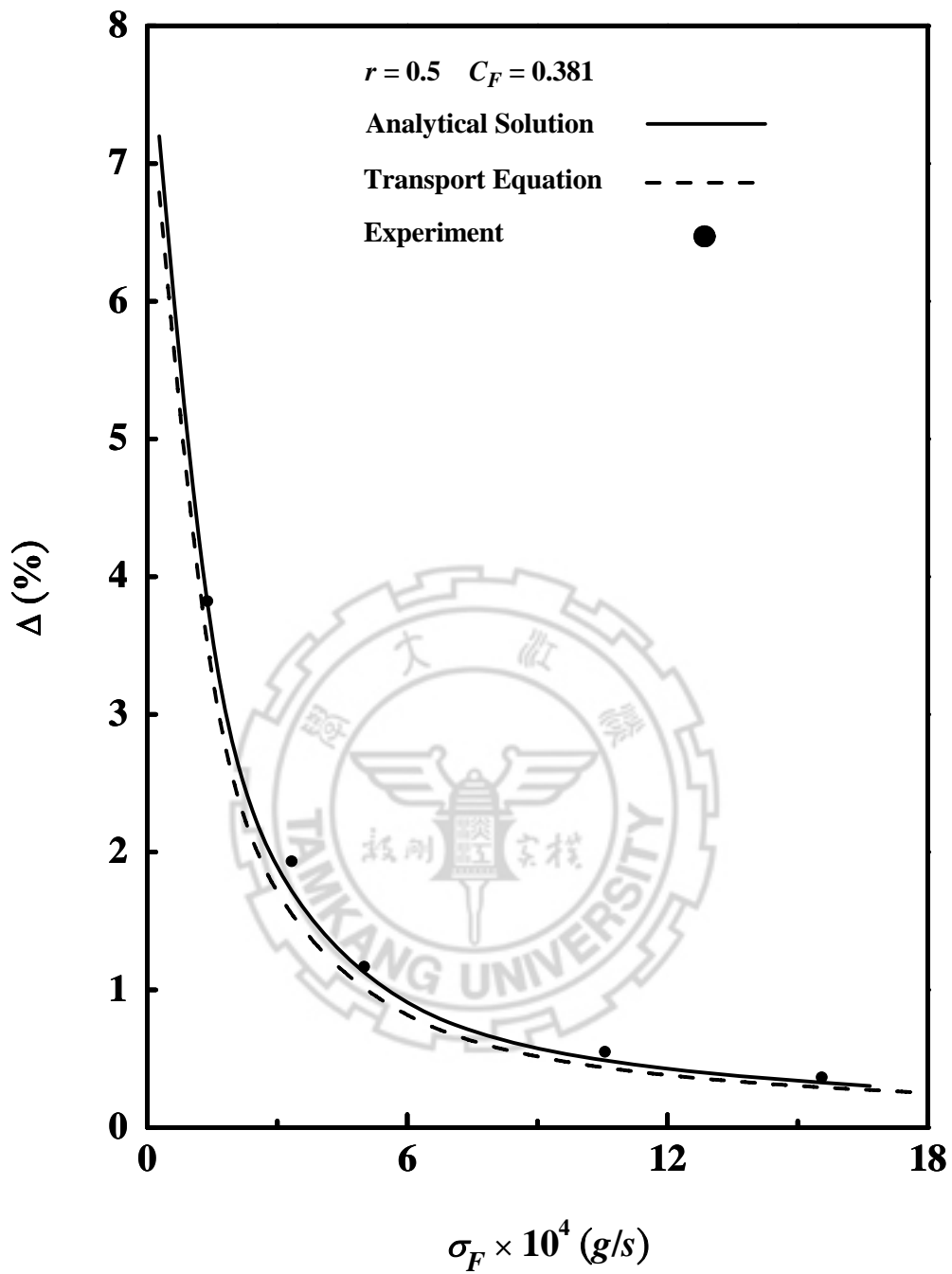
圖(4.1-29) 固定進料濃度分率 $C_F = 0.381$ ，在不同進料質量流率與出料質量分率下，進料位置與分離度之關係圖



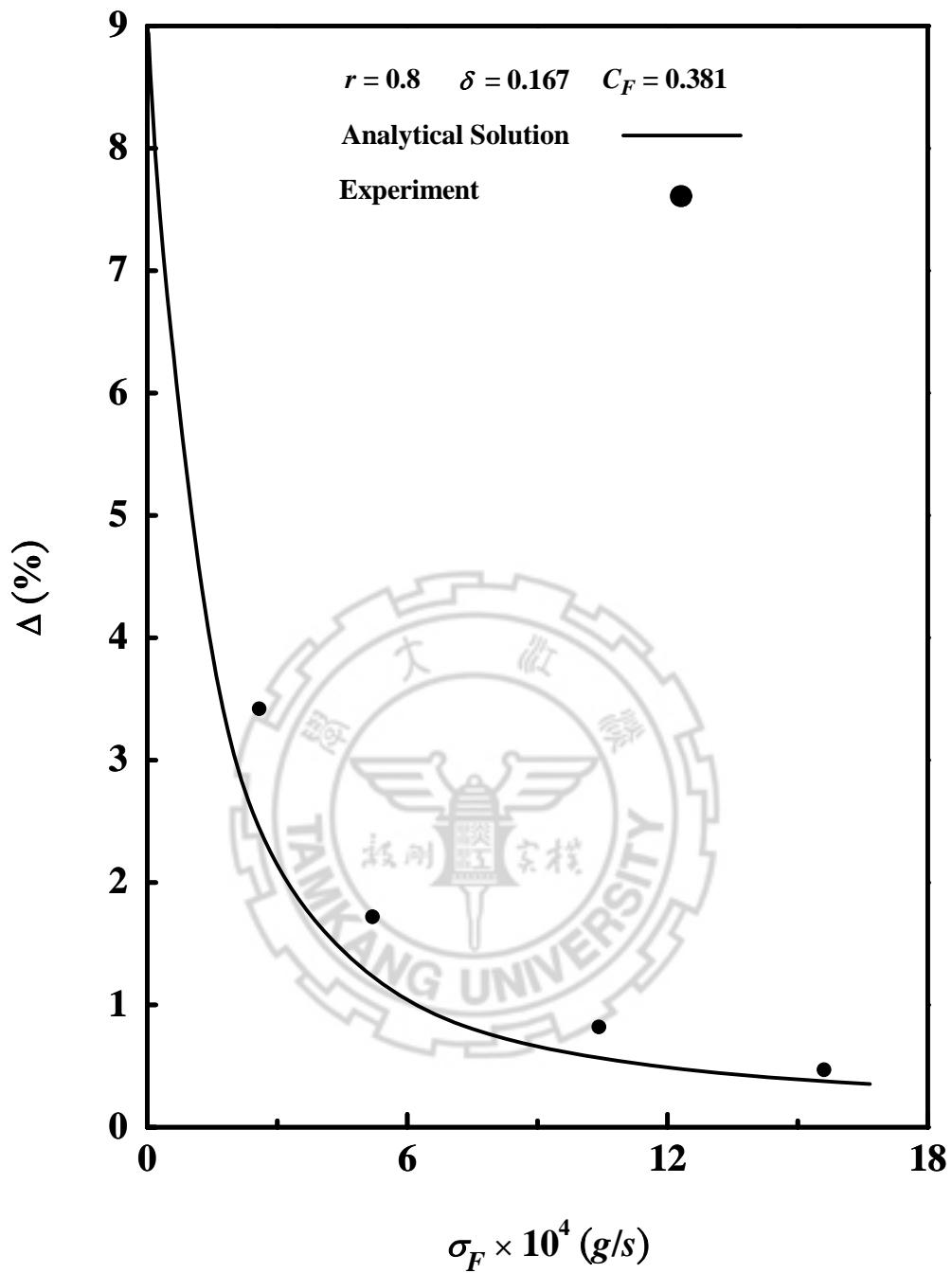
圖(4.1-30) 固定出料質量分率 $r=0.5$ ，在不同進料質量流率與進料濃度分率下，進料位置與分離度之關係圖



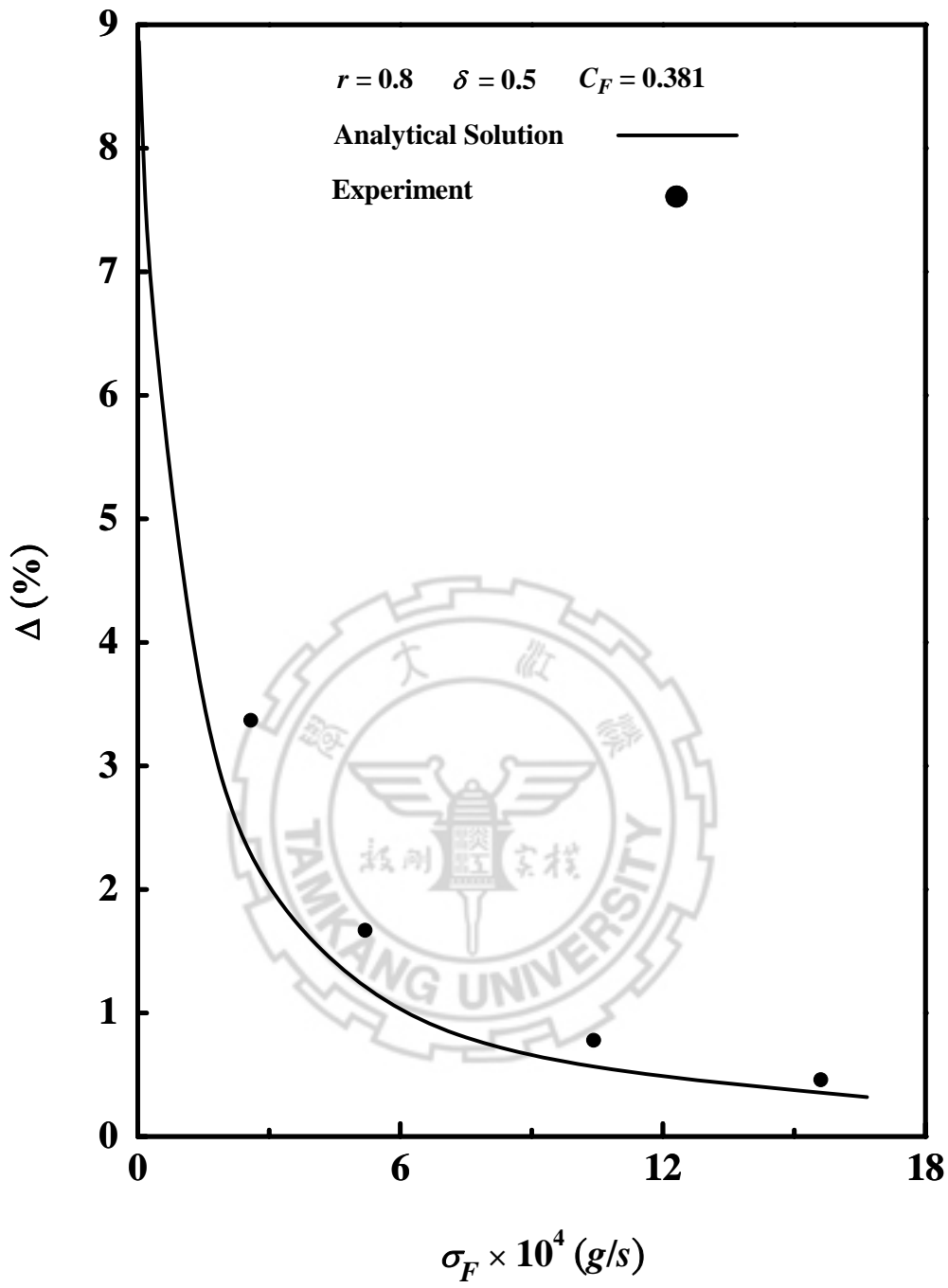
圖(4.1-31) 固定出料質量分率 $r=0.5$ 、進料位置 $\delta=0.5$ 與進料濃度分率 $C_F=0.0995$ 下，解析解、近似解^[102]與實驗值^[102]求得進料質量流率與分離度之關係比較圖



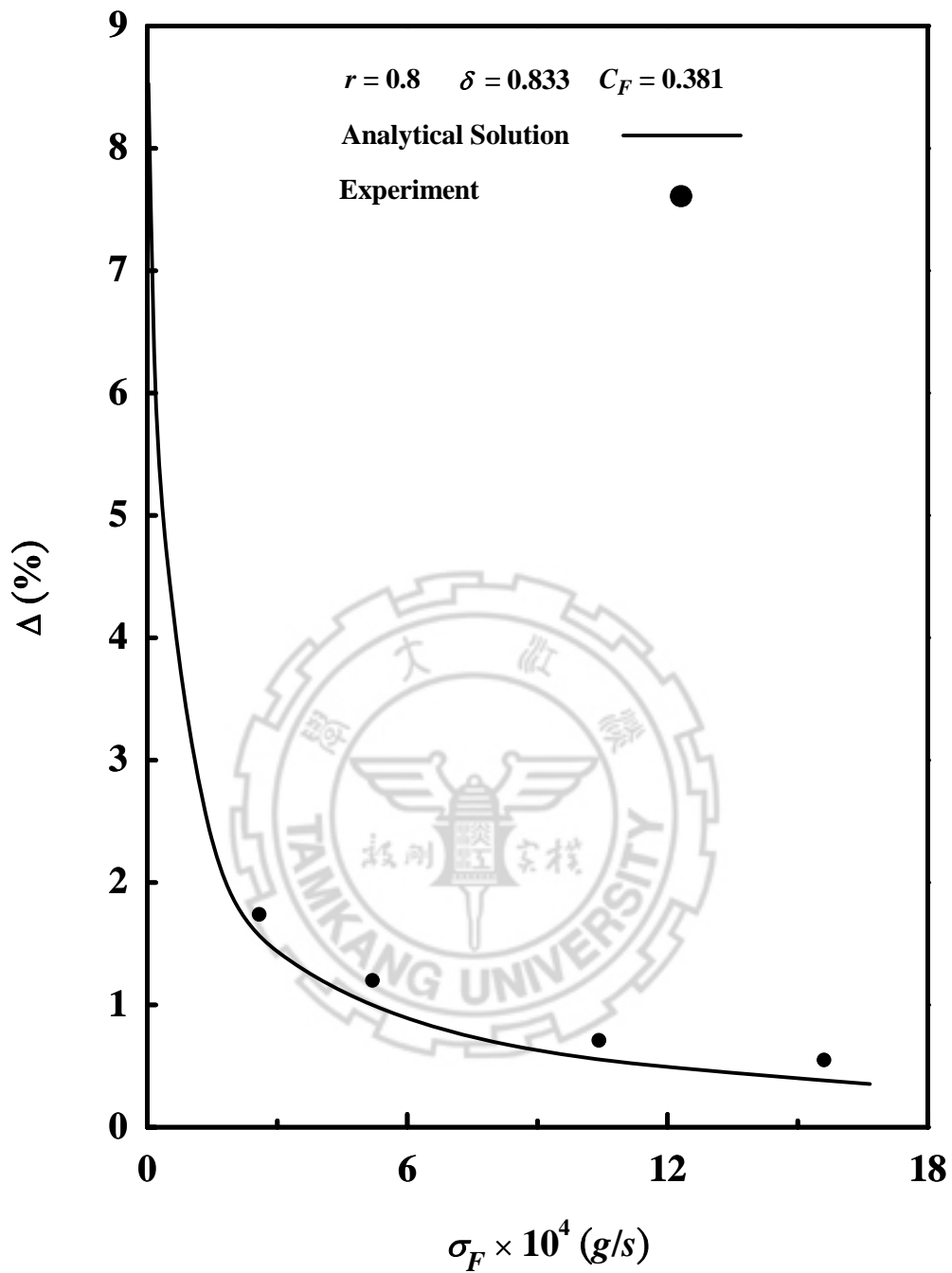
圖(4.1-32) 固定出料質量分率 $r=0.5$ 與進料濃度分率 $C_F=0.381$ 下，解析解、近似解^[90]與實驗值^[90]求得進料質量流率與分離度之關係比較圖



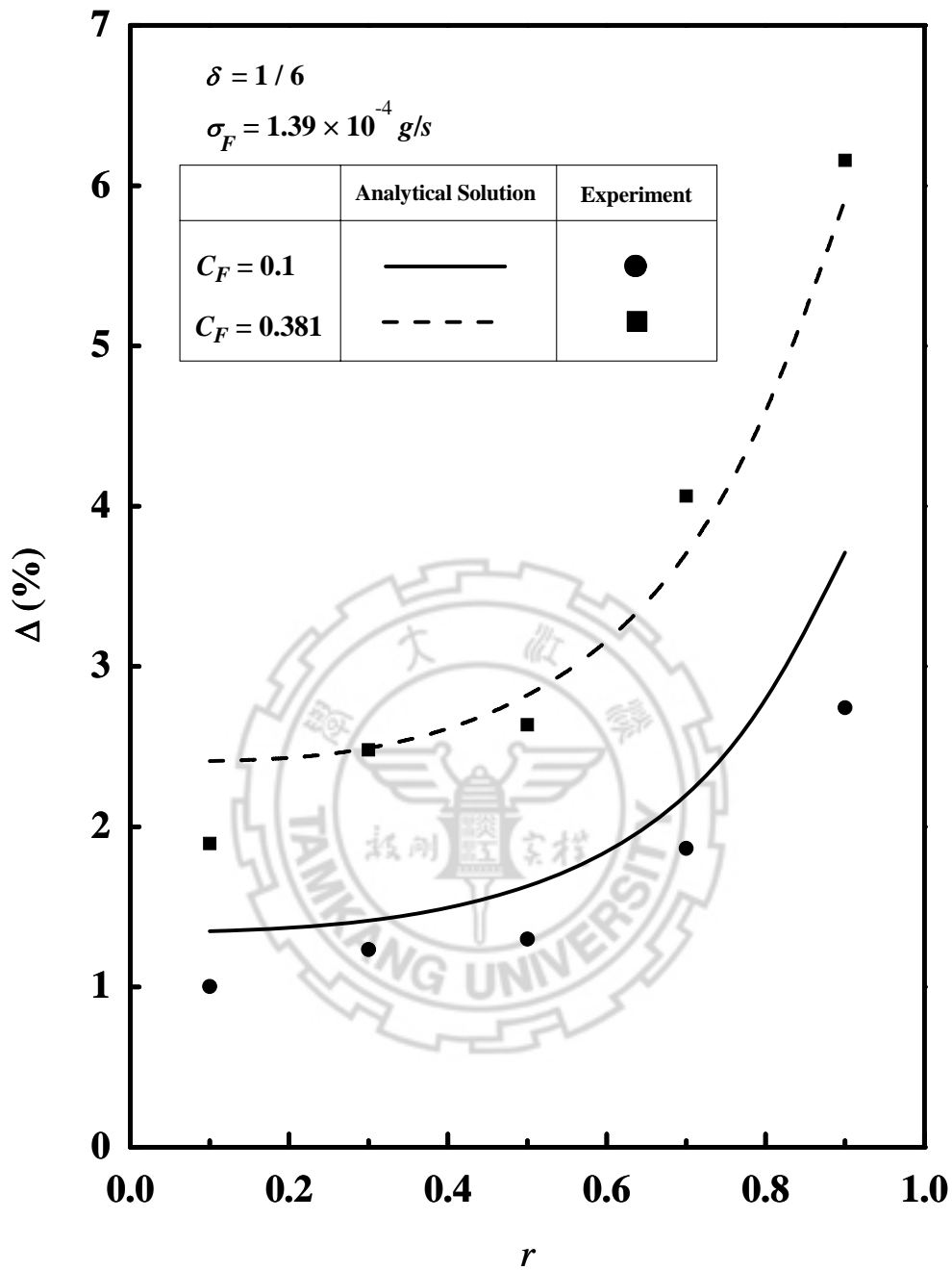
圖(4.1-33) 固定出料質量分率 $r=0.5$ 、進料位置 $\delta=0.167$ 與進料濃度分率 $C_F=0.381$ 下，解析解與實驗值^[8]求得進料質量流率與分離度之關係比較圖



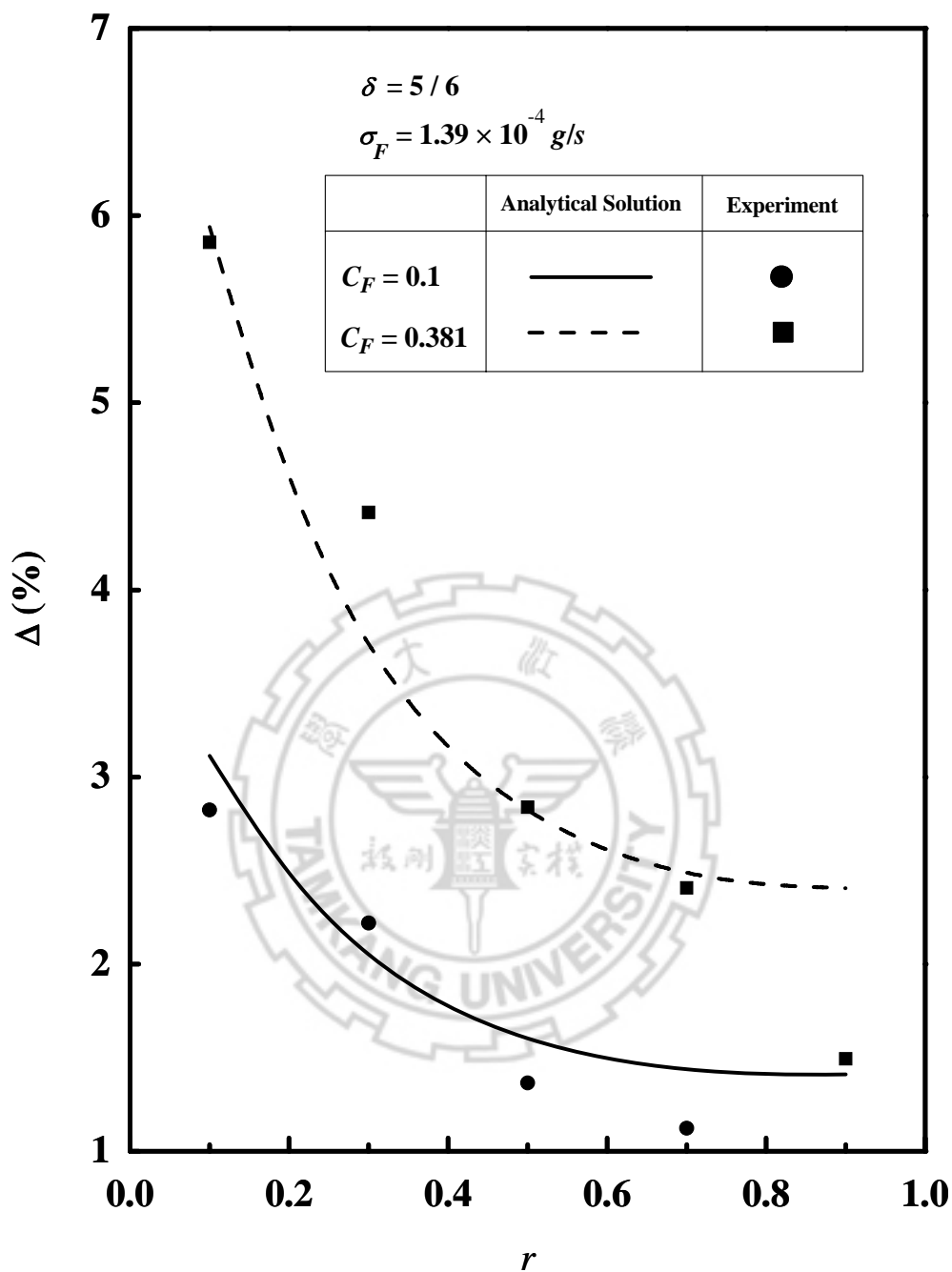
圖(4.1-34) 固定出料質量分率 $r=0.5$ 、進料位置 $\delta=0.5$ 與進料濃度分率 $C_F=0.381$ 下，解析解與實驗值^[8]求得進料質量流率與分離度之關係比較圖



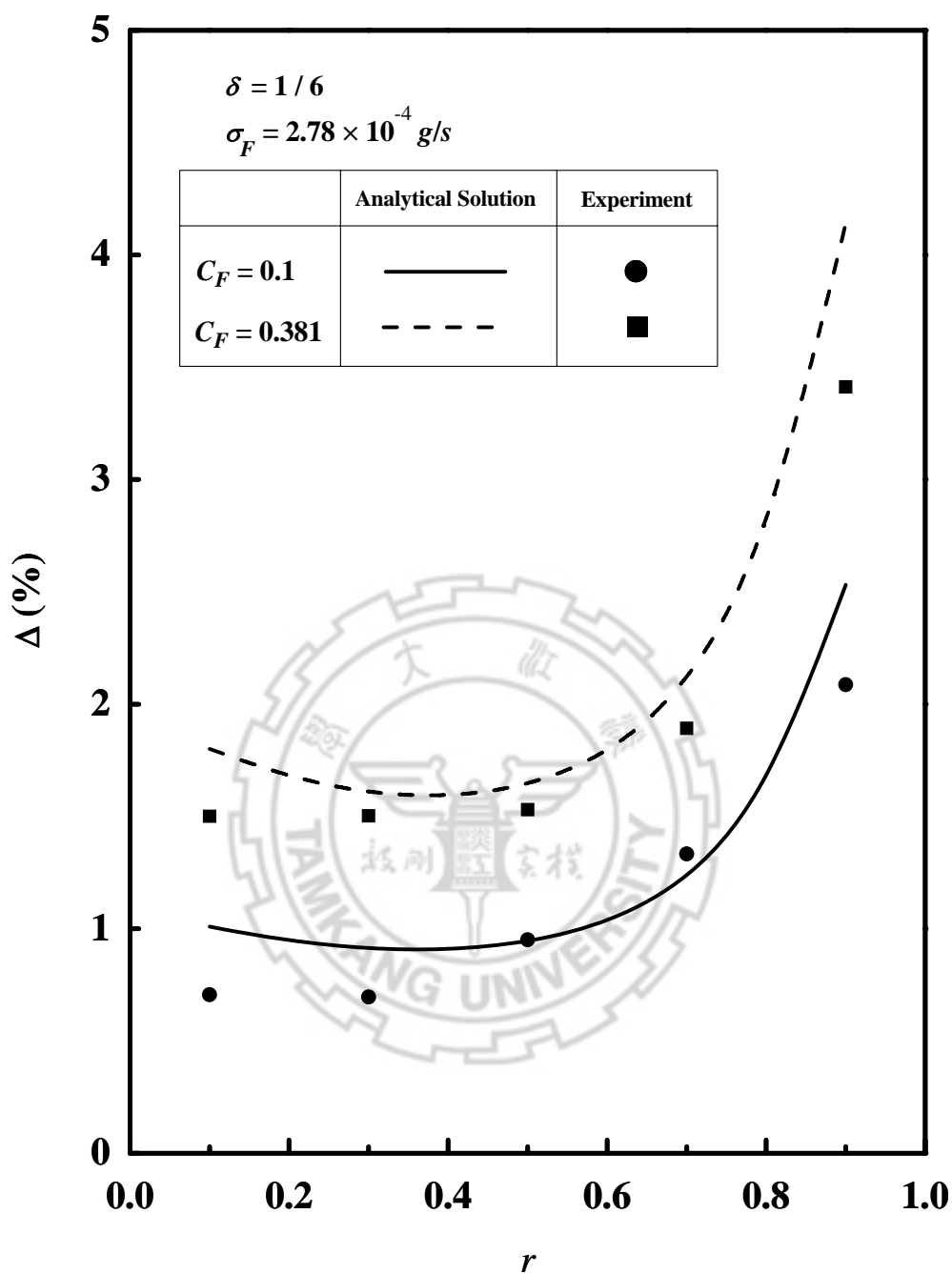
圖(4.1-35) 固定出料質量分率 $r = 0.5$ 、進料位置 $\delta = 0.833$ 與進料濃度分率 $C_F = 0.381$ 下，解析解與實驗值^[8]求得進料質量流率與分離度之關係比較圖



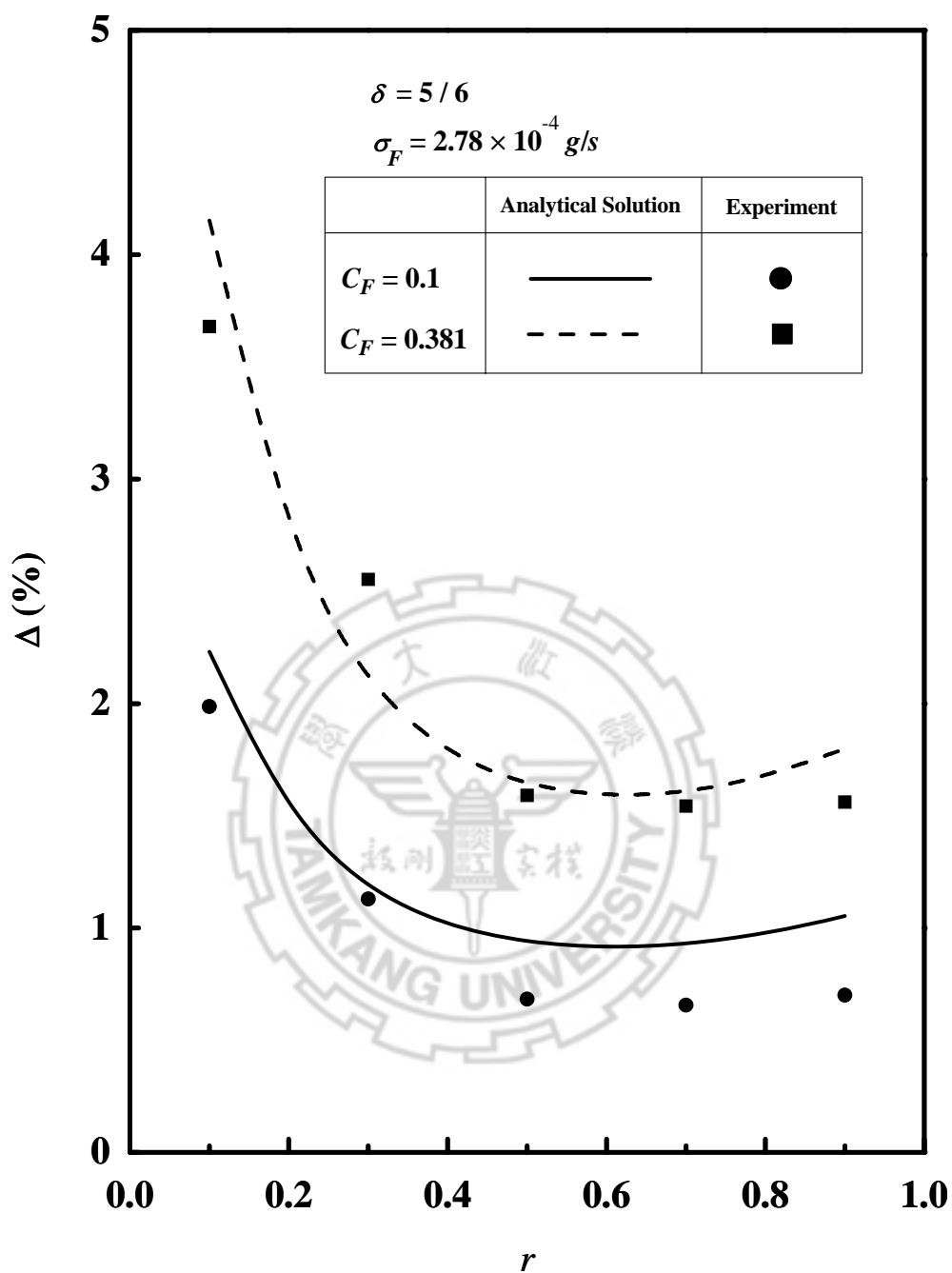
圖(4.1-36) 固定進料位置 $\delta = 1/6$ 與 $\sigma_F = 1.39 \times 10^{-4} \text{ g/s}$ ，在不同進料濃度分率下，解析解與實驗值^[90]求得出料質量分率與分離度之關係比較圖



圖(4.1-37) 固定進料位置 $\delta = 5/6$ 與 $\sigma_F = 1.39 \times 10^{-4} \text{ g/s}$ ，在不同進料
 濃度分率下，解析解與實驗值^[90]求得出料質量分率與分
 離度之關係比較圖



圖(4.1-38) 固定進料位置 $\delta = 1/6$ 與 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-4} \text{ g/s}$ ，在不同進料濃度分率下，解析解與實驗值^[90]求得出料質量分率與分離度之關係比較圖



圖(4.1-39) 固定進料位置 $\delta = 5/6$ 與 $\sigma_F = 2.78 \times 10^{-4} \text{ g/s}$ ，在不同進料濃度分率下，解析解與實驗值^[90]求得出料質量分率與分離度之關係比較圖

4.2 出料質量分率、固定操作面積下之長寬比及傾斜角之結果與討論

本節引入了三變數分別為出料質量分率、固定操作面積下之長寬比及傾斜角。將本節分為二個部份來作討論：

(I) 出料質量分率、固定操作面積下之長寬比及傾斜角對特徵值之影響

(II) 出料質量分率、固定操作面積下之長寬比及傾斜角對分離度之影響

(I) 出料質量分率、固定操作面積下之長寬比及傾斜角對特徵值之影響

由圖(4.2-1)及圖(4.2-6)可看出，增濃段及提取段特徵值皆隨著出料質量分率的增加而遞增；其中，還可從圖中發現，提取段特徵值隨著傾斜角度及長寬比增大而增加；反之，在增濃段特徵值則與傾斜角度及長寬比呈遞減之關係。

(II) 出料質量分率、固定操作面積下之長寬比及傾斜角對分離度之影響

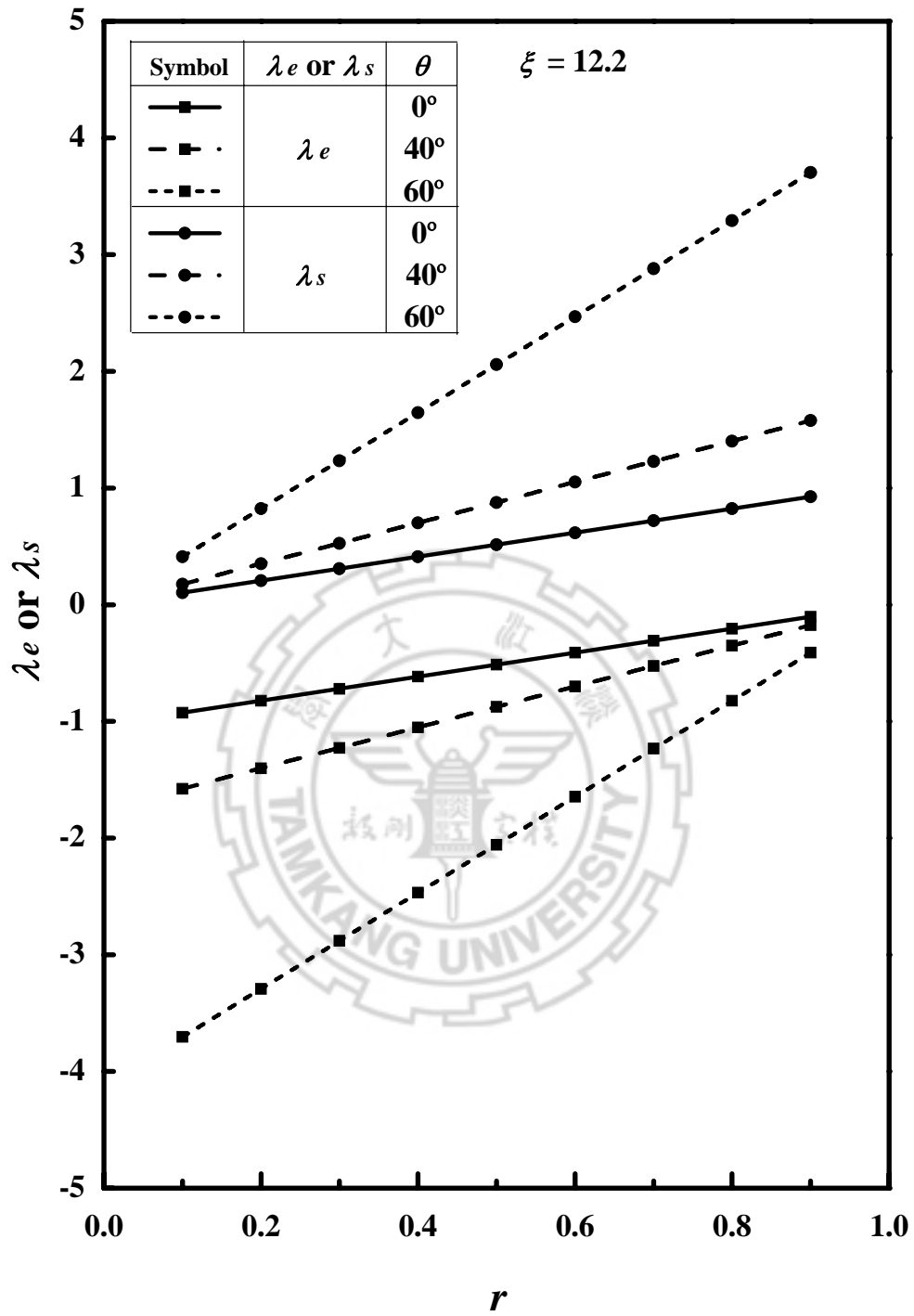
如圖(4.2-7)至圖(4.2-10)所示，在任何的傾斜角度及固定操作面

積之長寬比下，當出料質量分率愈偏離 0.5 時，其熱擴散塔分離效果愈好，而當出料質量分率 $r=0.5$ ，也就是塔頂與塔底之出料質量分率相等時，其分離度最小，這是因為再混合(remixing)效應所造成之結果。而從圖(4.2-7)及圖(4.2-8)中可知道，將長寬比固定在 12.2 時，當傾斜角度小於 50 度時，則分離度會隨著傾斜角度愈大而會有較佳的分離效果，但當傾斜角大於 50 度時，剛好相反，分離度會隨著傾斜角度愈大而遞減，由此發現，傾斜角對分離度的影響會有其最佳之傾斜角度。而在長寬比的部分也會有和傾斜角相同的情形出現，由圖(4.2-9)及圖(4.2-10)可看到，在傾斜角度固定為 0° 時，當長寬比小於 30 時，分離度會隨著長寬比的增加而遞增，反之，長寬比大於 30 時，長寬比愈大其分離效果愈差，因此，在連續式操作分離時，只要適時的調整其傾斜角度及長寬比，便可提升熱擴散塔之分離效果。最後，由圖(4.2-11)可再次驗證圖(4.2-7)至圖(4.2-10)之結果。

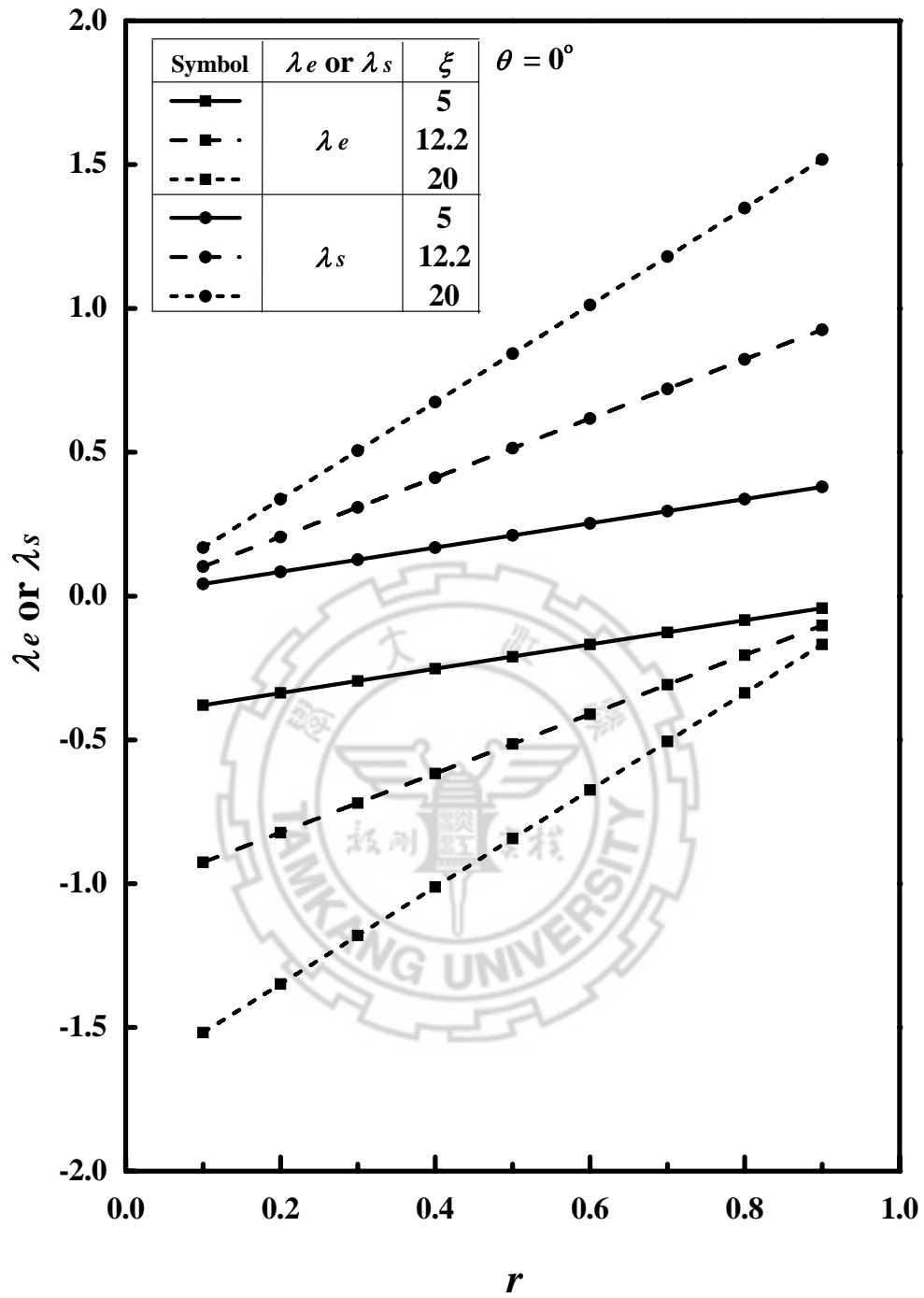
從圖(4.2-12)中可發現，固定出料質量分率 $r=0.5$ 時，不同之傾斜角度下，會有其最佳之長寬比，且在固定表面積下，當熱擴散塔之長寬比變大時，即代表塔長會變長，而塔寬則會變小，當塔長變長時會使得流體在塔內之滯留時間增長，可提升熱擴散塔之分離效率，但是，若將長寬比持續增長，除了會使塔長繼續增長外，亦會使塔寬變小，而造成流體在塔內的流速變快，而降低流體在塔內之

停滯時間，也因此抑制了熱擴散塔之分離效率。由此可知，在連續式操作分離時，只要適時的調整其長寬比，便可提升熱擴散塔之分離效果。對於不同之出料質量分率亦會有其最佳之長寬比，此點可由圖(4.2-13)得知；同時，亦可從圖(4.2-13)發現，當出料質量分率愈偏離 0.5 時其分離效果愈好，且當出料質量分率 $r=0.5$ 時會有最差之分離度。最後，圖(4.2-14)可再一次驗證圖(4.2-12)及圖(4.2-13)之結果。

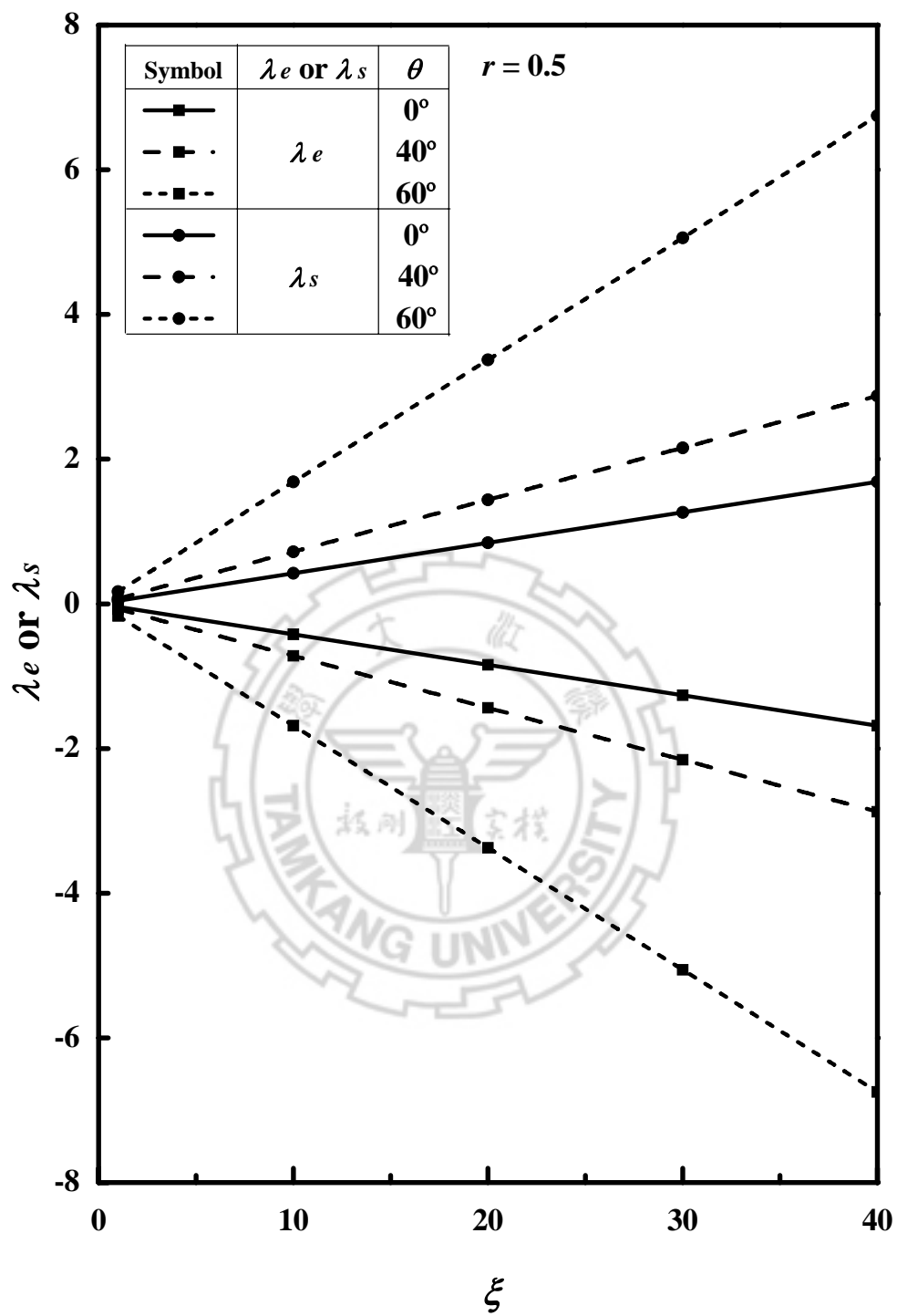
如圖(4.2-15)所示，固定出料質量分率 $r=0.5$ 時，不同之長寬比下，會有其最佳之傾斜角度，由此發現，傾斜角對分離度的影響會有其最佳之傾斜角度，這是因為我們將直立垂直塔傾斜一個角度，可以同時促進分離效果之續流效應及抑制再混合效應的產生，由此可見，在連續式熱擴散塔分離操作時，適時地傾斜至最佳角度，將大幅改善熱擴散塔之分離效果；而圖(4.2-16)亦有相同之趨勢，當長寬比固定於 12.2 時，不同之出料質量分率下也可找出其最佳傾斜角度。最後，由圖(4.2-17)可讓我們再一次驗證圖(4.2-15)及圖(4.2-16)之結果。



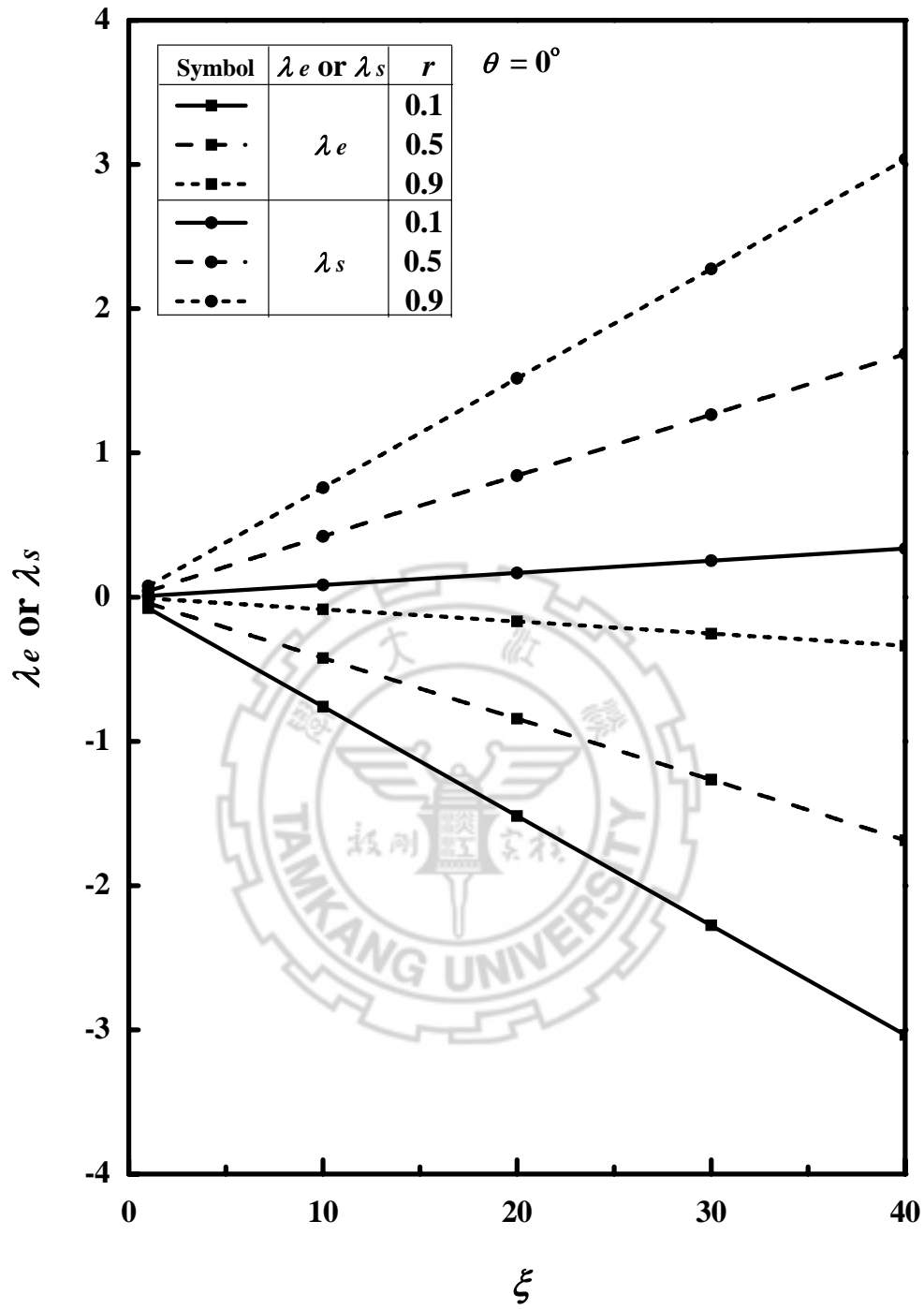
圖(4.2-1) 固定長寬比 $\xi=12.2$ ，在不同傾斜角下，出料質量分率與特徵值之關係圖



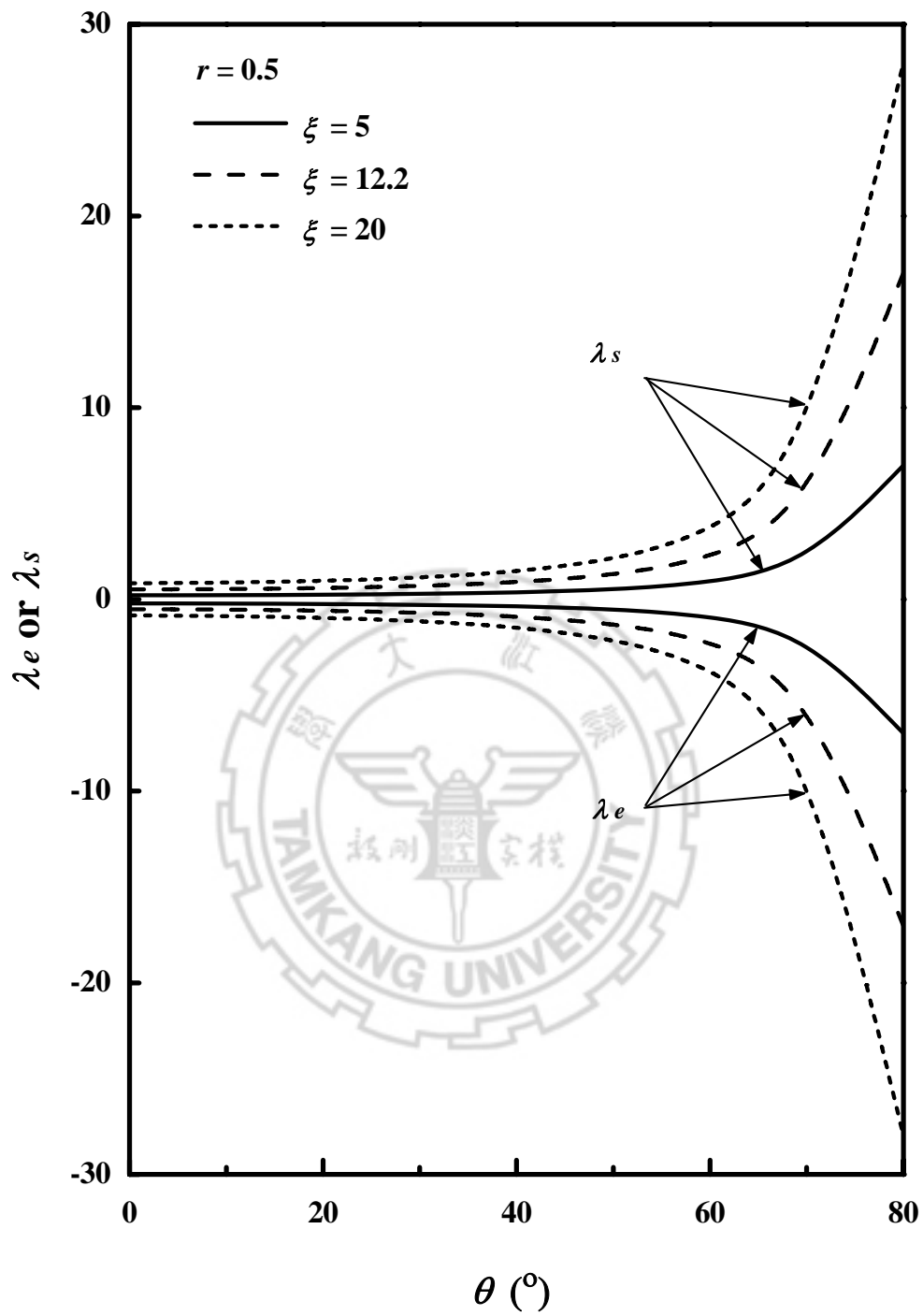
圖(4.2-2) 固定於直立塔($\theta = 0^\circ$)，在不同長寬比下，出料質量分率與特徵值之關係圖



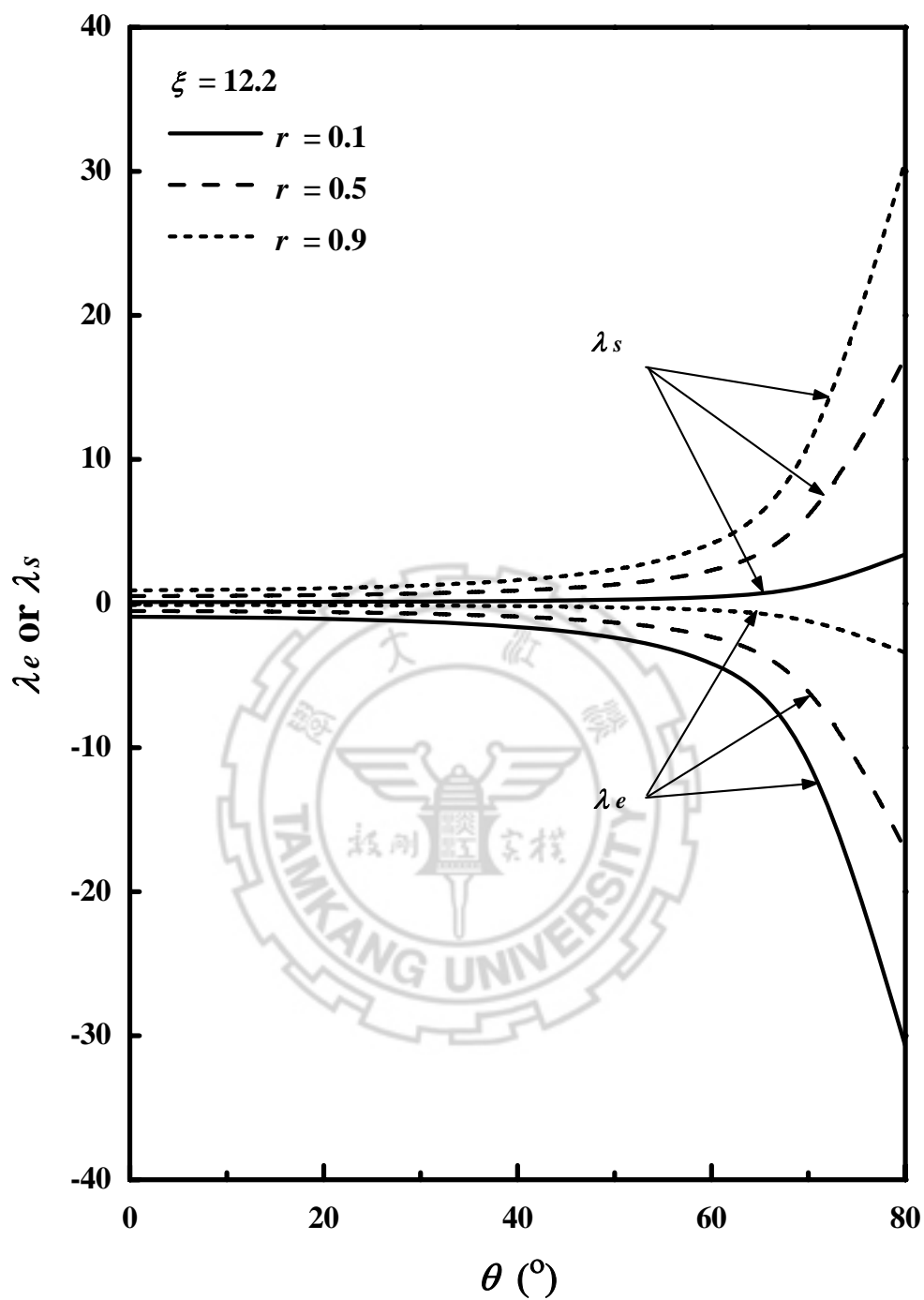
圖(4.2-3) 固定出料質量分率 $r=0.5$ ，在不同傾斜角下，長寬比與特徵值之關係圖



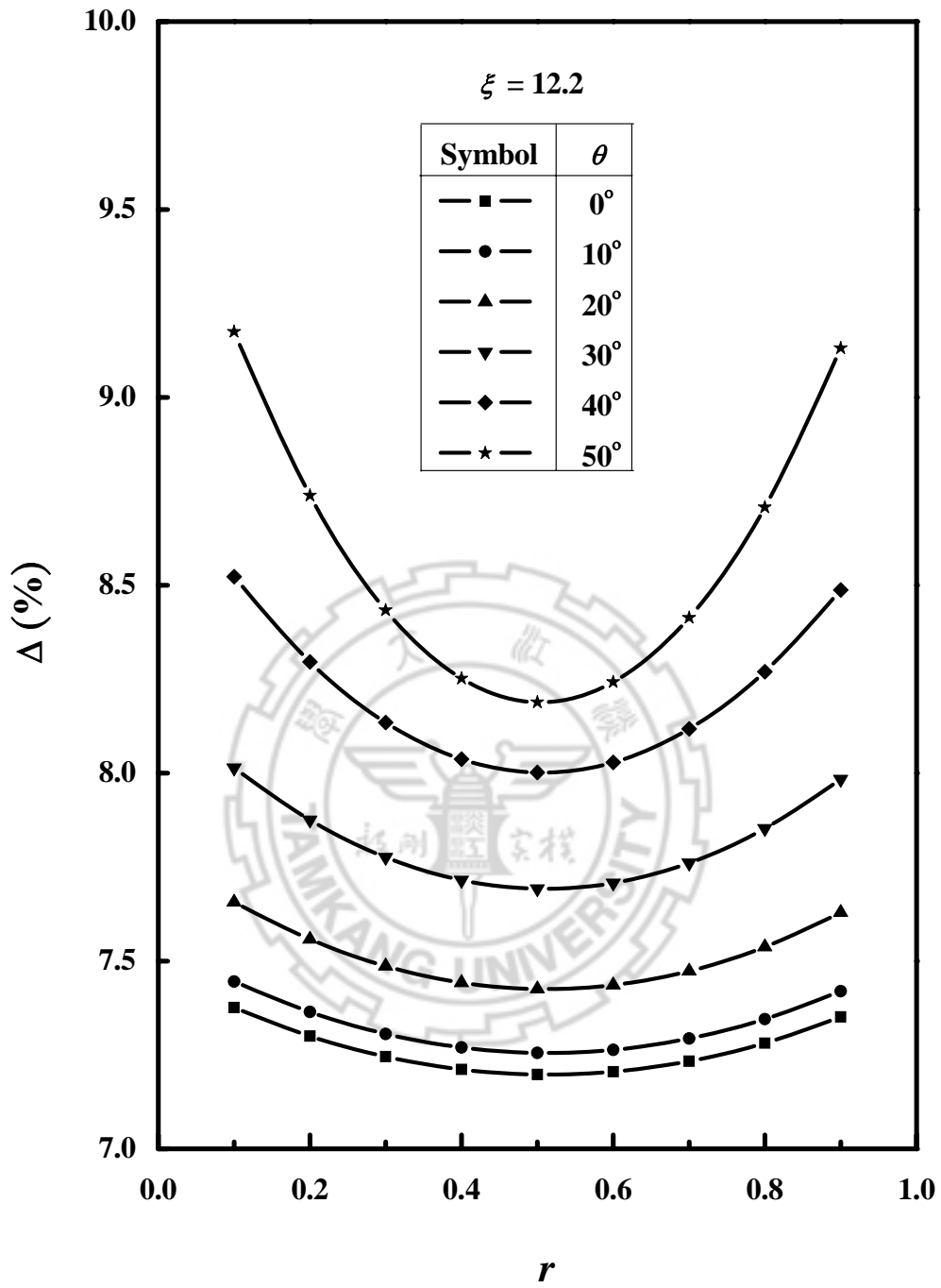
圖(4.2-4) 固定於直立塔($\theta = 0^\circ$)，在不同出料質量分率下，長寬比與特徵值之關係圖



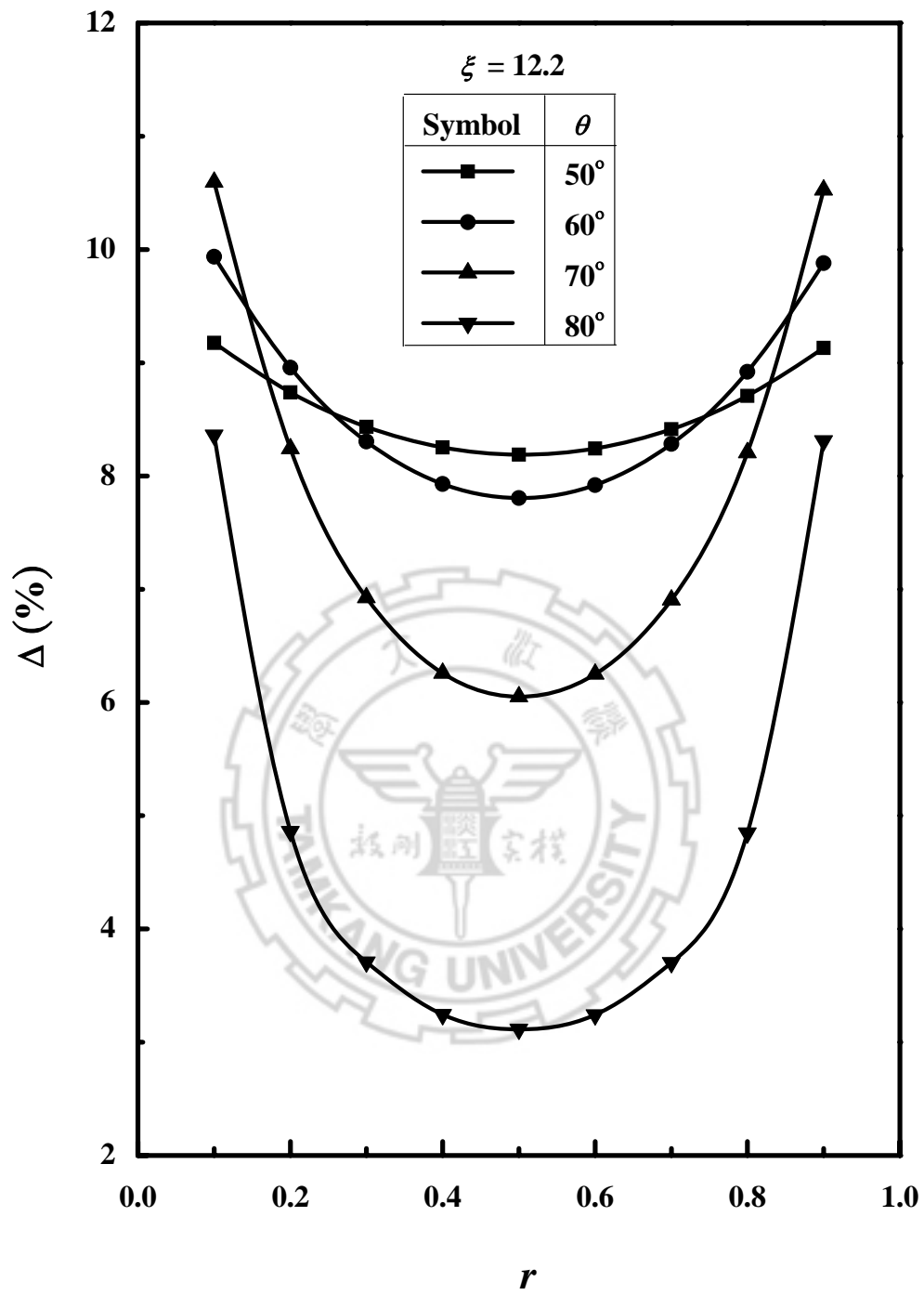
圖(4.2-5) 固定出料質量分率 $r=0.5$ ，在不同長寬比下，傾斜角與特徵值之關係圖



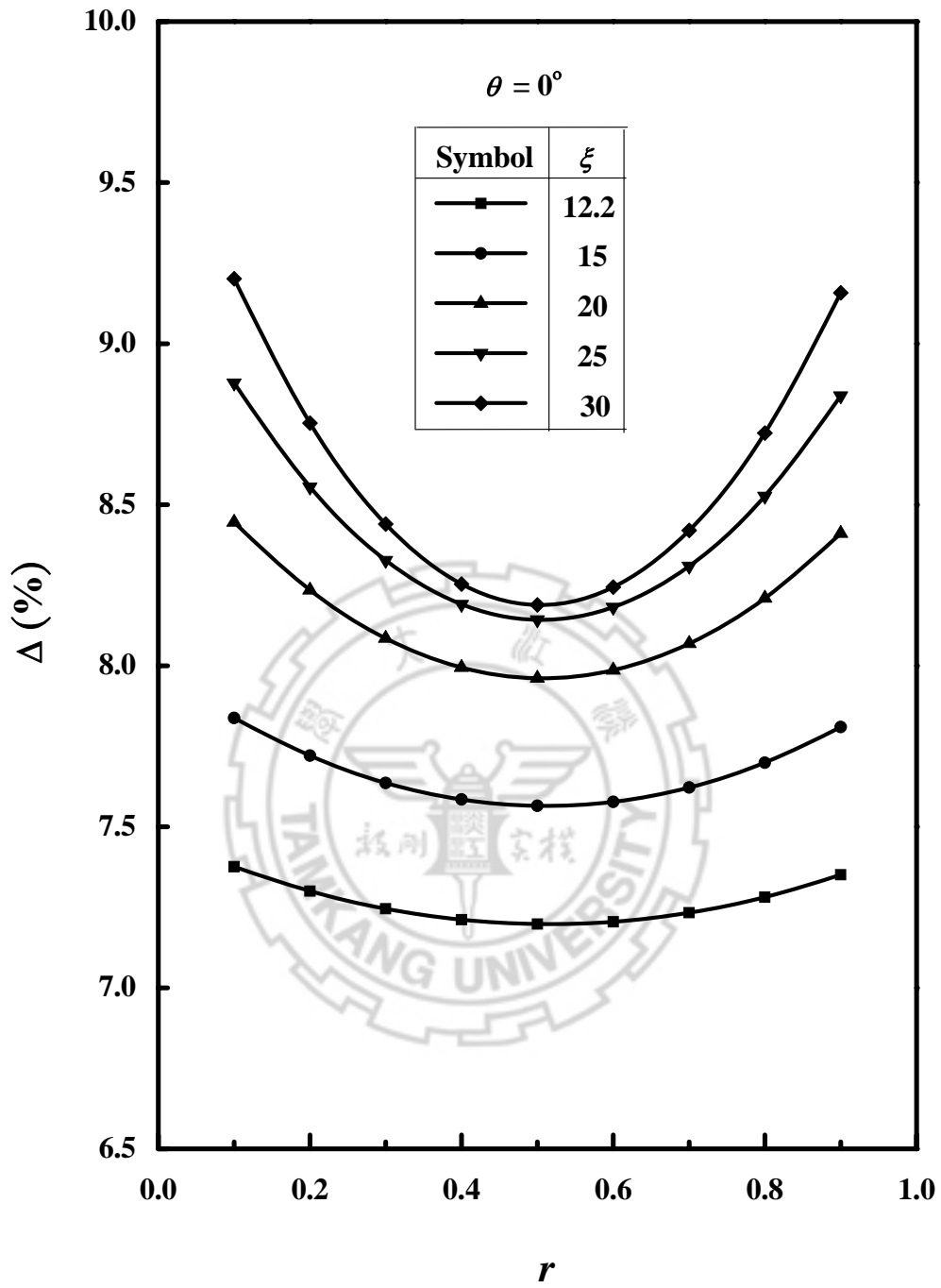
圖(4.2-6) 固定長寬比 $\xi=12.2$ ，在不同出料質量分率下，傾斜角與特徵值之關係圖



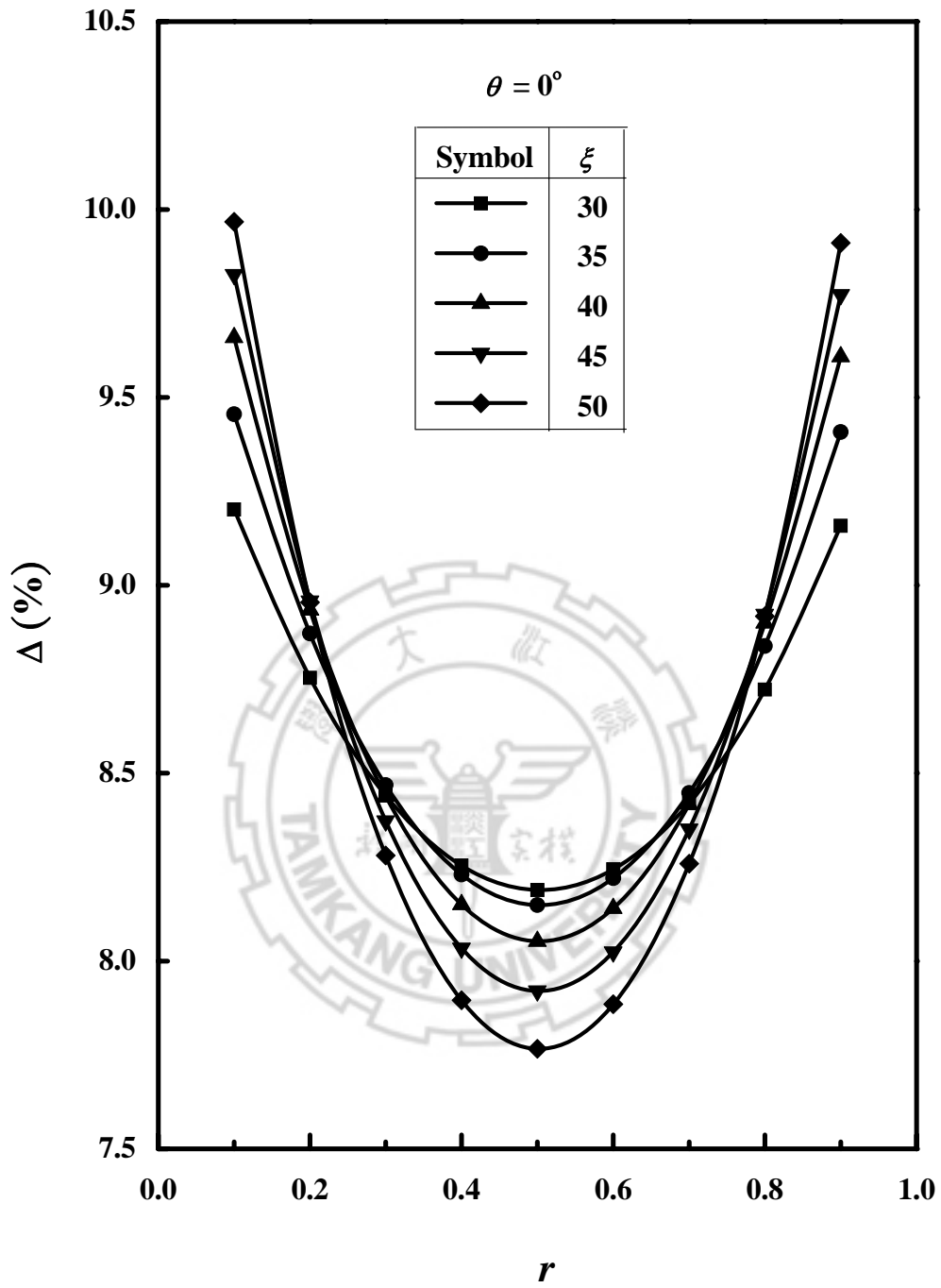
圖(4.2-7) 固定長寬比 $\xi=12.2$ ，在不同傾斜角下，出料質量分率與分離度之關係圖



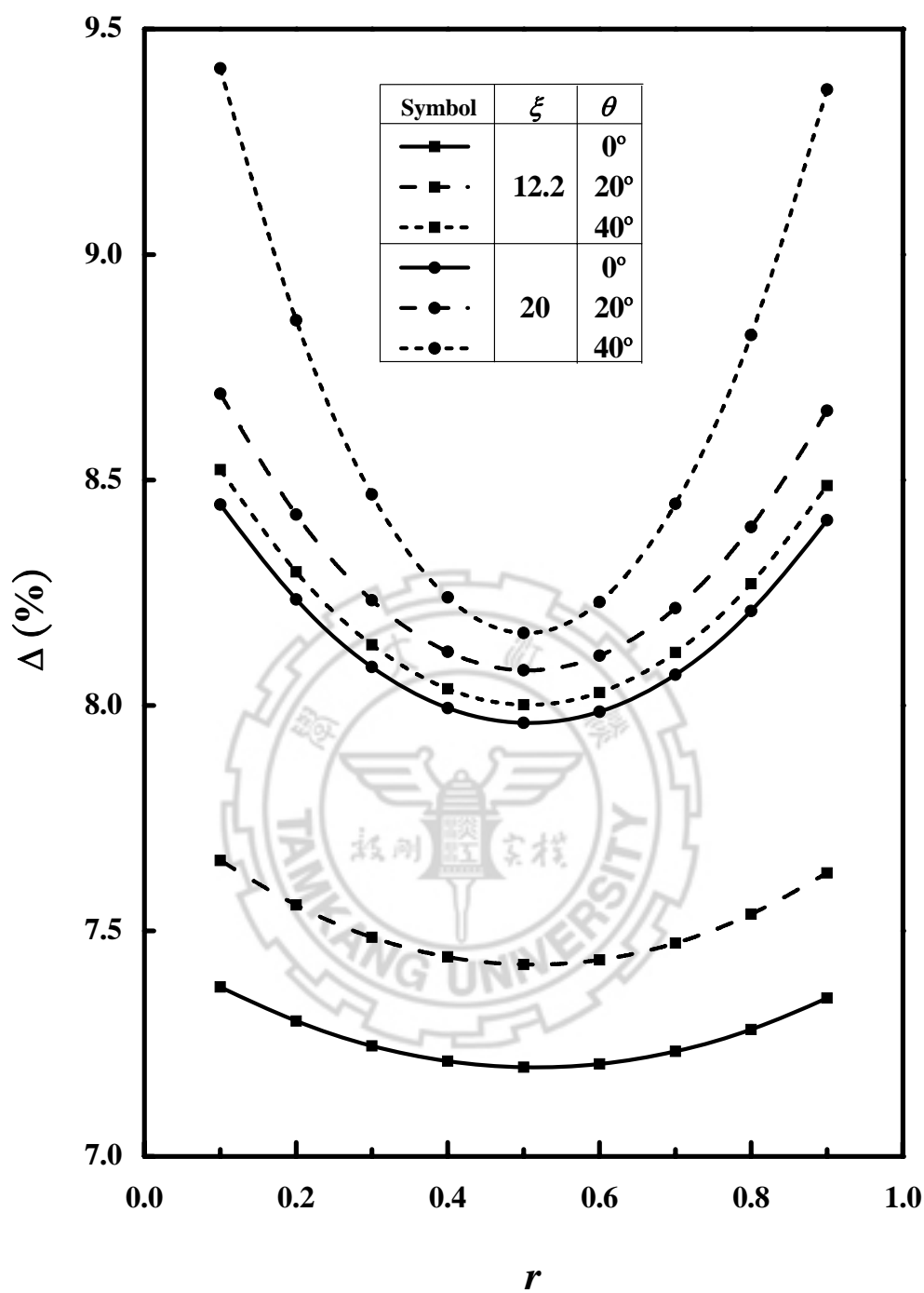
圖(4.2-8) 固定長寬比 $\xi=12.2$ ，在不同傾斜角下，出料質量分率與分離度之關係圖



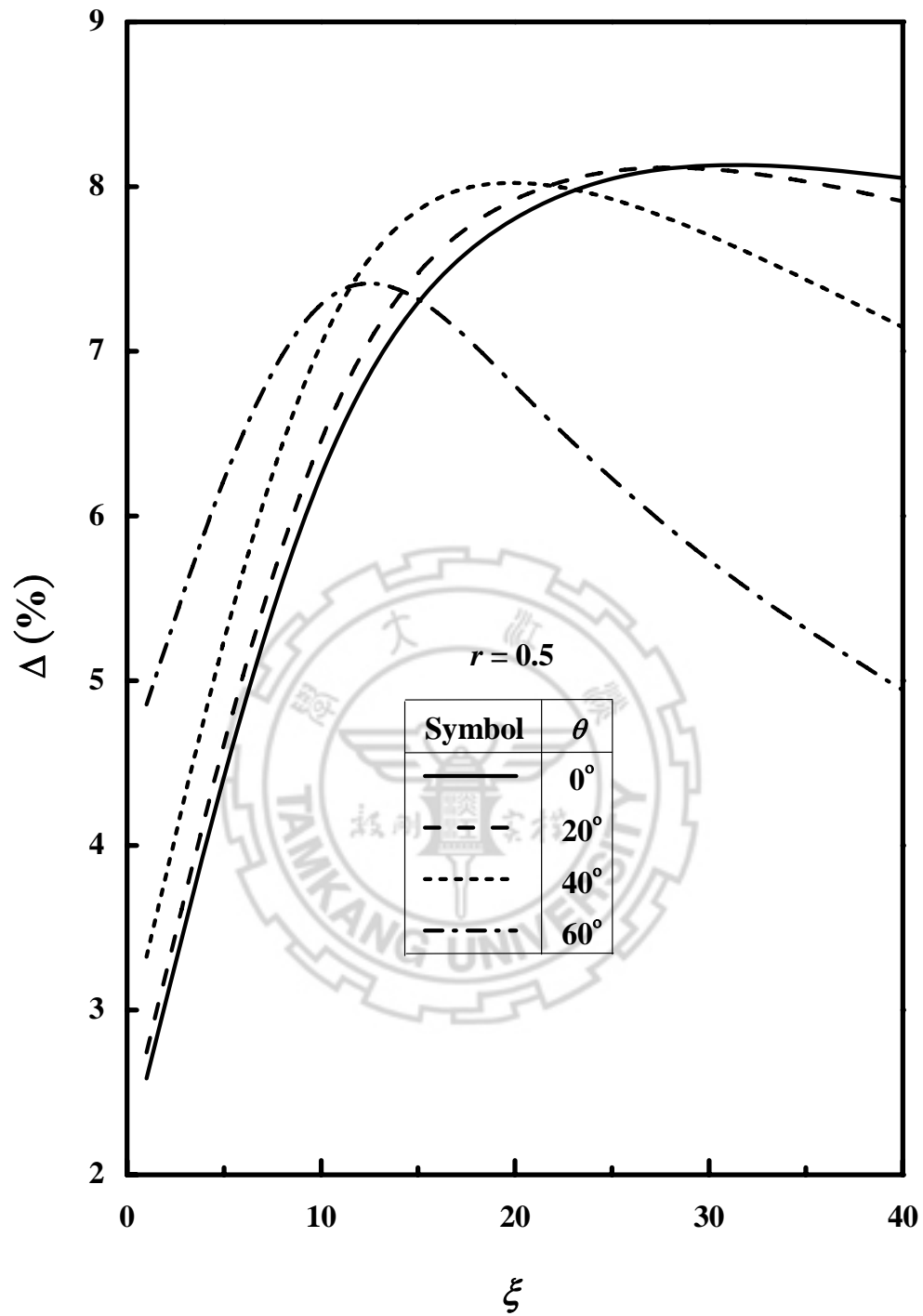
圖(4.2-9) 固定於直立塔($\theta = 0^\circ$)，在不同長寬比下，出料質量分率與分離度之關係圖



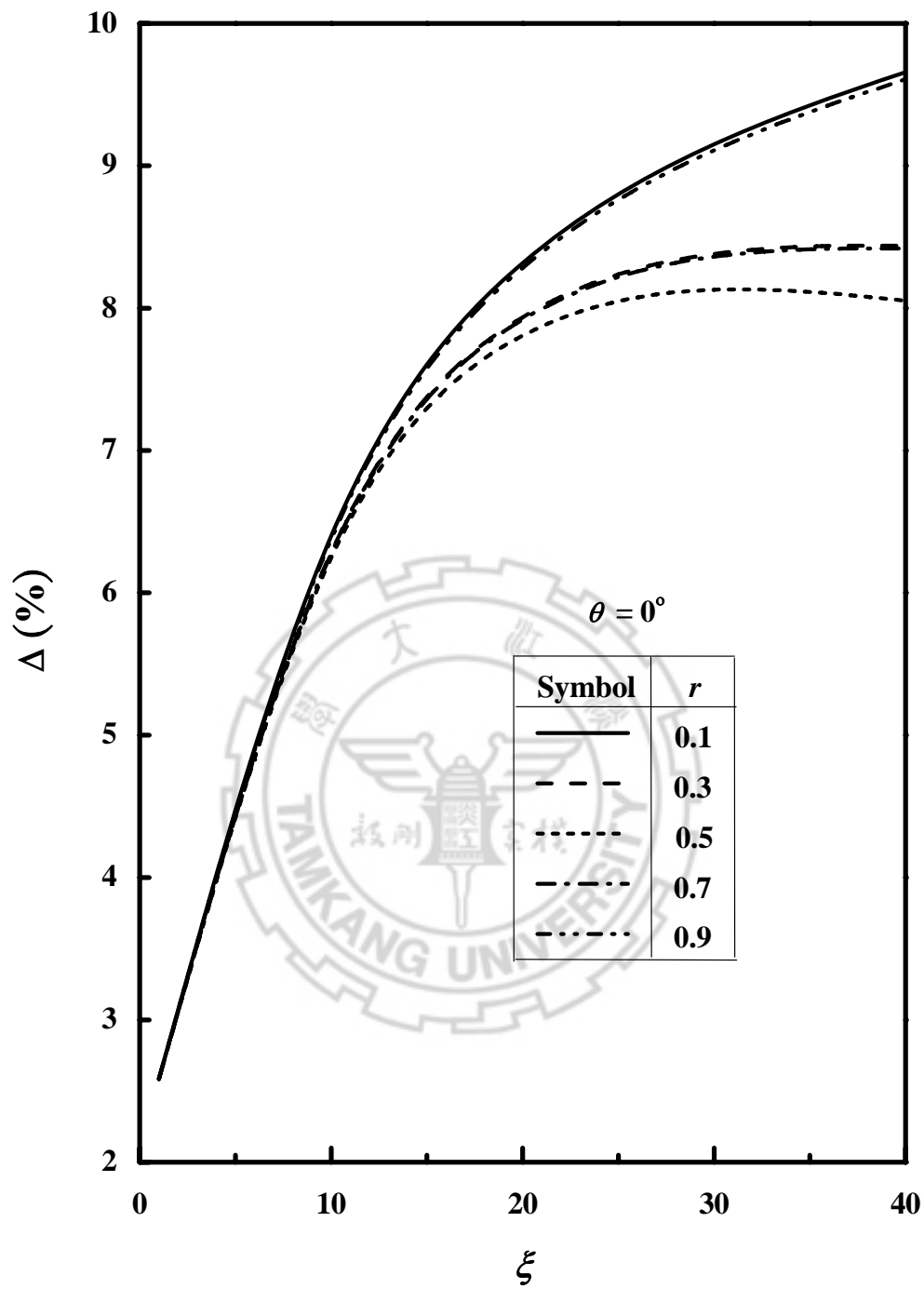
圖(4.2-10) 固定於直立塔($\theta = 0^\circ$)，在不同長寬比下，出料質量分率與分離度之關係圖



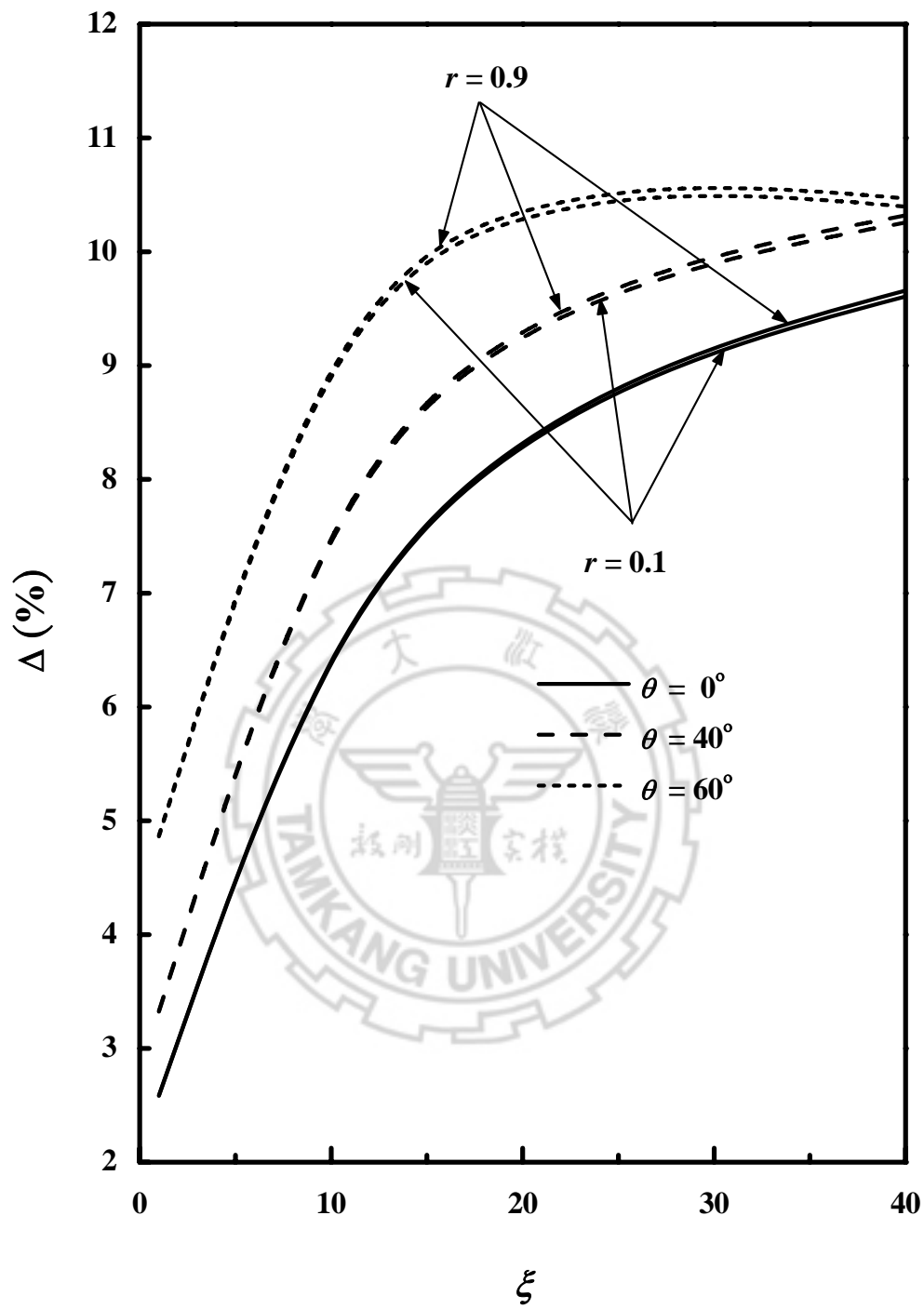
圖(4.2-11) 在不同長寬比與傾斜角下，出料質量分率與分離度之關係圖



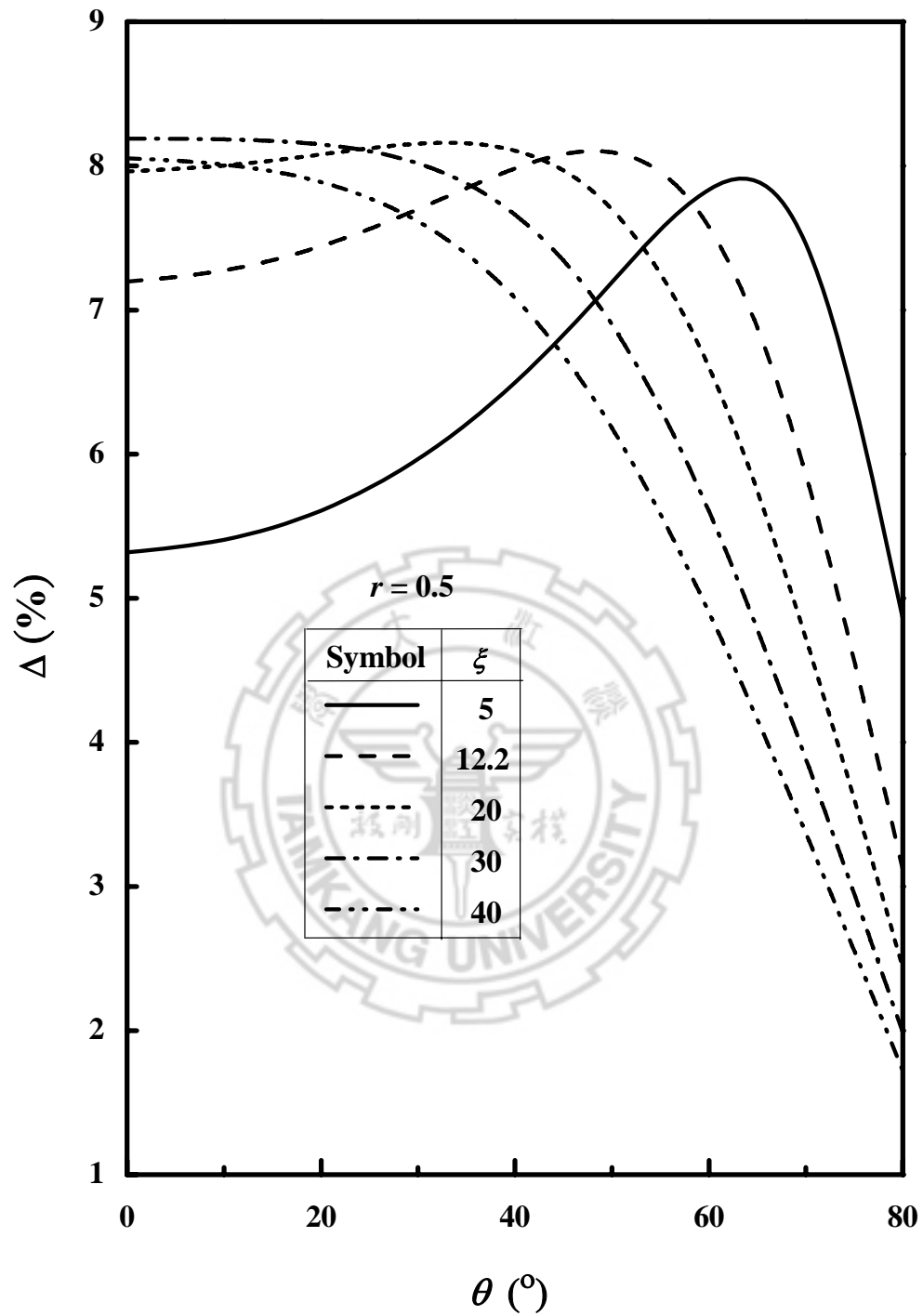
圖(4.2-12) 固定出料質量分率 $r=0.5$ ，在不同傾斜角下，長寬比與分離度之關係圖



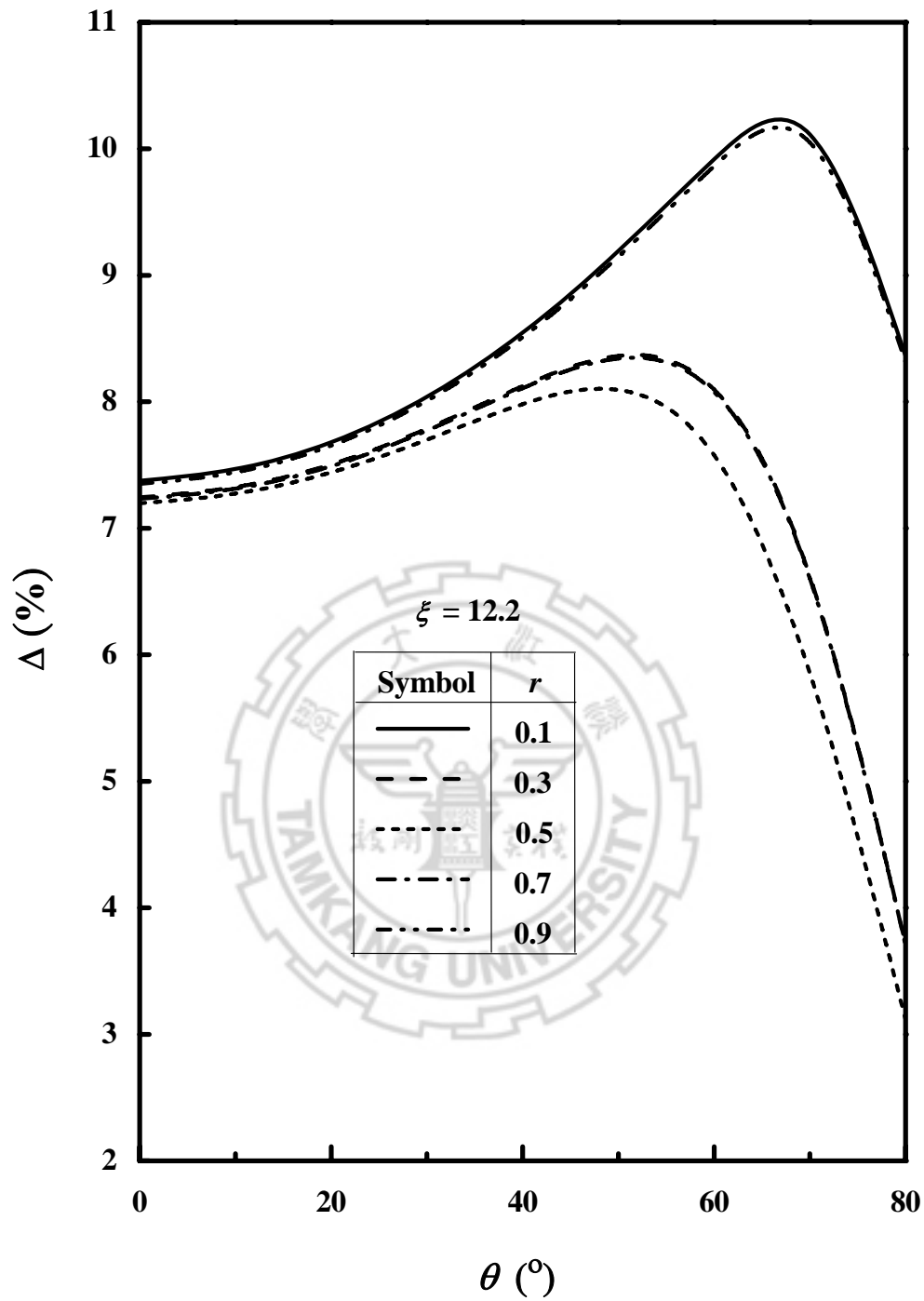
圖(4.2-13) 固定於直立塔($\theta = 0^\circ$)，在不同出料質量分率下，長寬比與分離度之關係圖



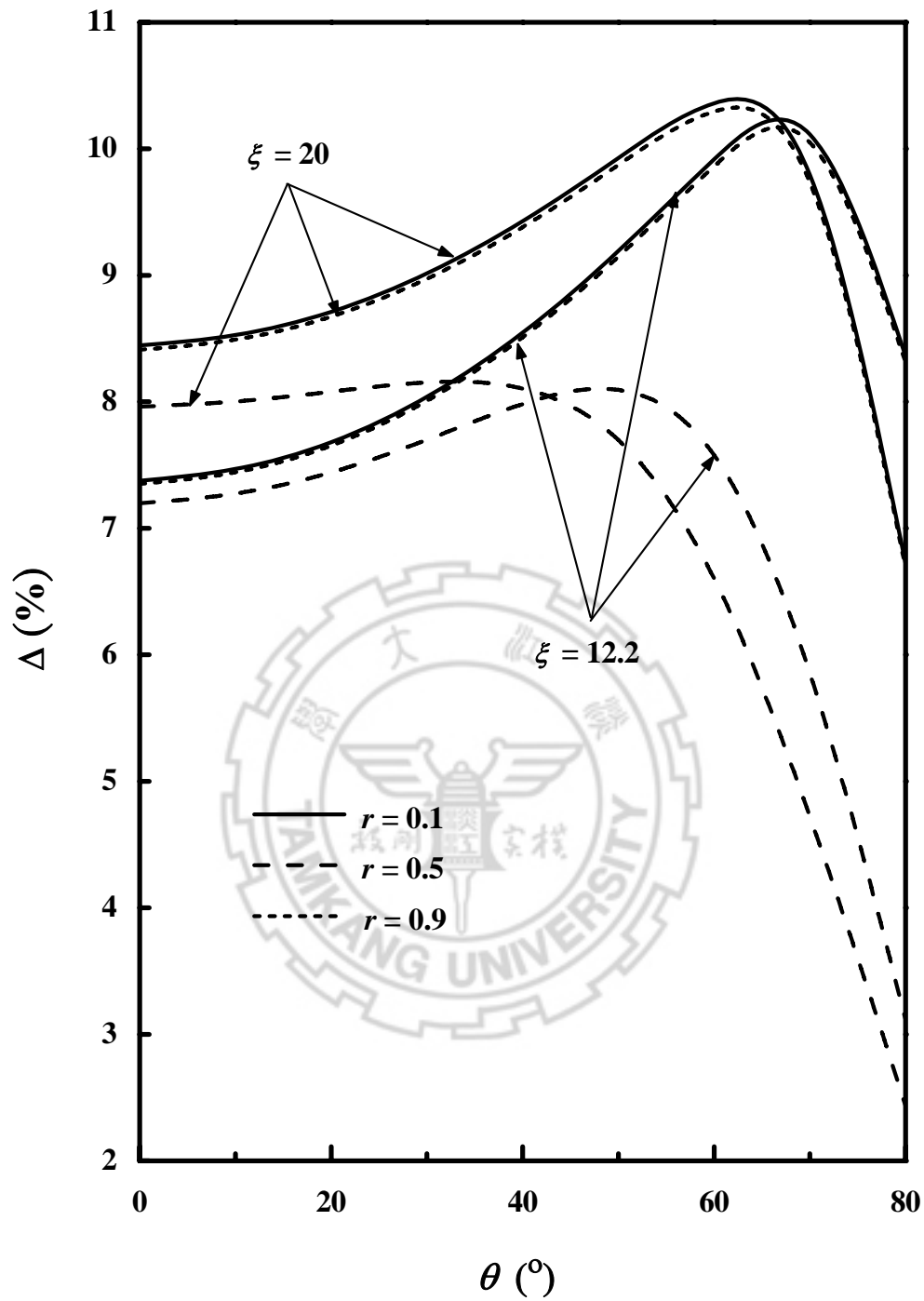
圖(4.2-14) 在不同出料質量分率與傾斜角下，長寬比與分離度之關係圖



圖(4.2-15) 固定出料質量分率 $r=0.5$ ，在不同長寬比下，傾斜角與分離度之關係圖



圖(4.2-16) 固定長寬比 $\xi=12.2$ ，在不同出料質量分率下，傾斜角與分離度之關係圖



圖(4.2-17) 在不同出料質量分率與長寬比下，傾斜角與分離度之關係圖

4.3 變出料質量分率、板距及固定操作成本下板距之結果與討論

本節引入了三變數分別為出料質量分率、板距及固定操作成本下之板距。將本節分為二個部份來作討論。

(I) 出料質量分率、板距及固定操作成本下之板距對特徵值之影響

(II) 出料質量分率、板距及固定操作成本下之板距對分離度之影響

(I) 出料質量分率、板距及固定操作成本下之板距對特徵值之影響

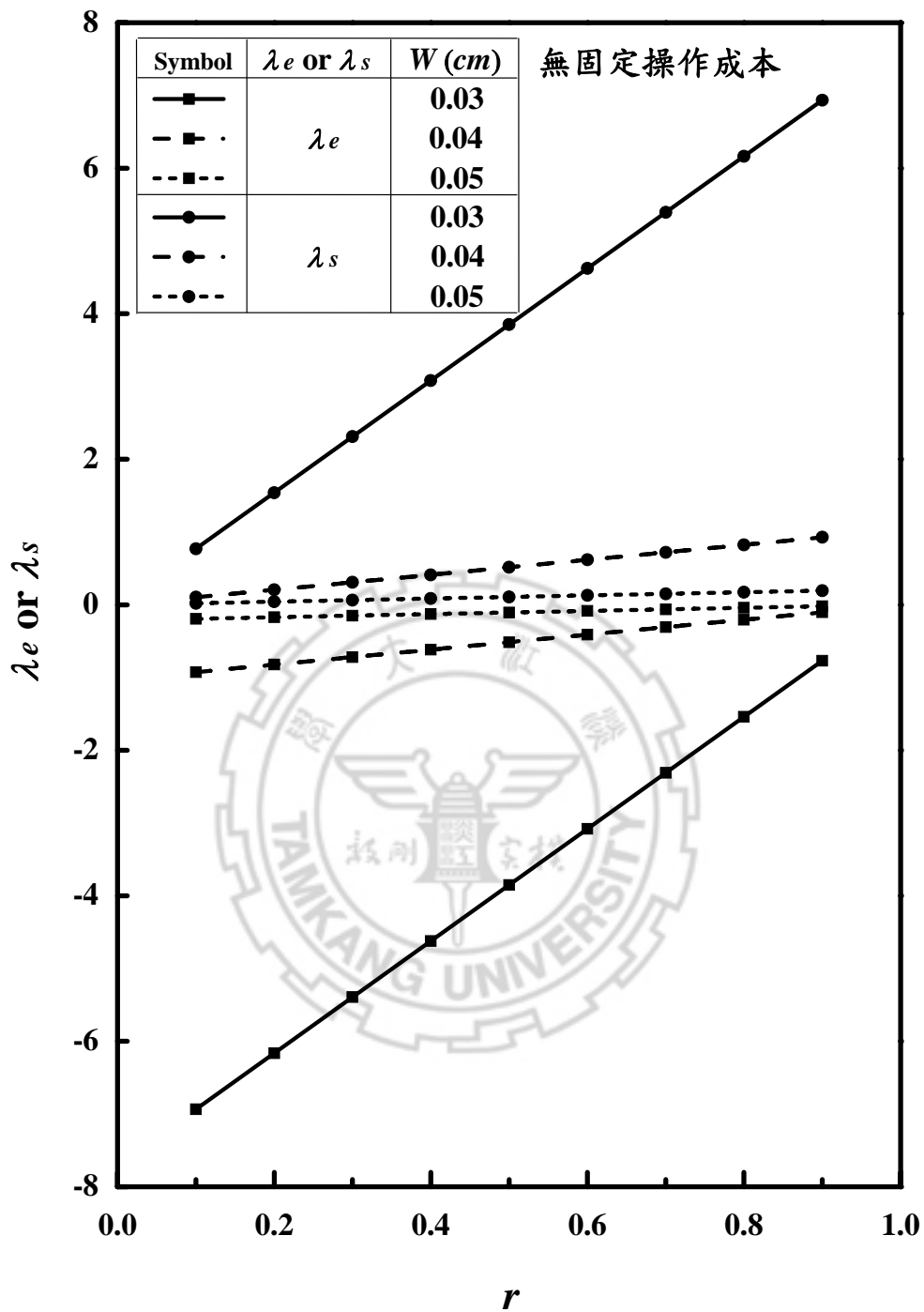
由圖(4.3-1)及圖(4.3-4)可發現，增濃段及提取段特徵值皆隨著出料質量分率增大而呈線性遞增；且不論在有無固定操作成本下，提取段特徵值皆隨著板距增大而減小，反之，增濃段特徵值則隨板距增大而增加。

(II) 出料質量分率、板距及固定操作成本下之板距對分離度之影響

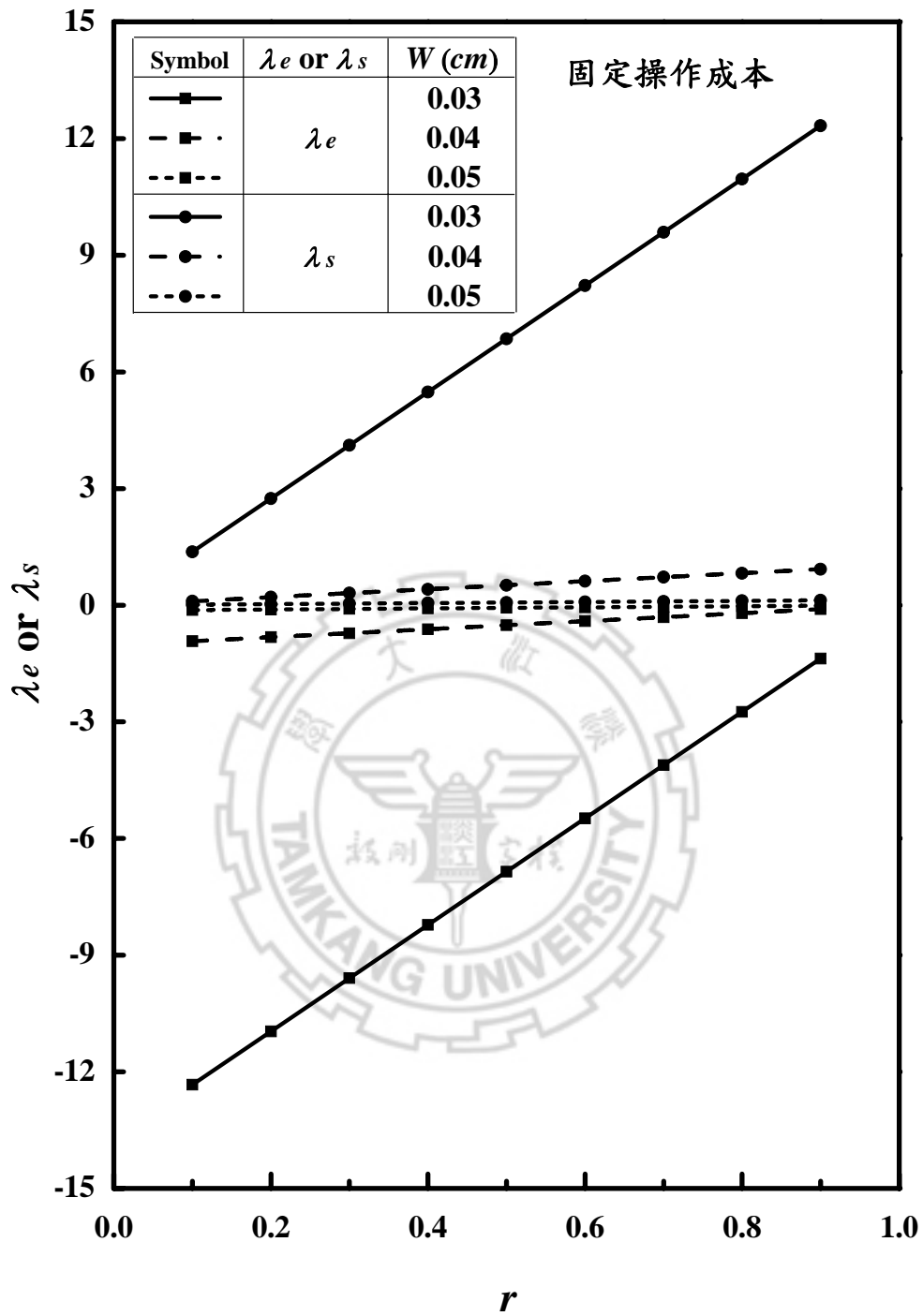
從圖(4.3-5)及圖(4.3-6)可以看出，當出料質量分率在 0.5 時其分離度最小，因此，在操作分離塔時應設定出料質量分率愈偏離 0.5 愈好，才會有較佳之分離效果；而從圖中亦可得知，當板距愈接近 0.04 cm 時，其分離度幾乎保持不變，代表若將板距拉大，對分離度

並沒有幫助，且當板距愈小時，其分離效果愈好，故在連續式熱擴散塔分離操作時，應適時地調整板距，便可將大幅改善熱擴散塔之分離效果。最後，由圖(4.3-7)驗證圖(4.3-5)及圖(4.3-6)之結果。

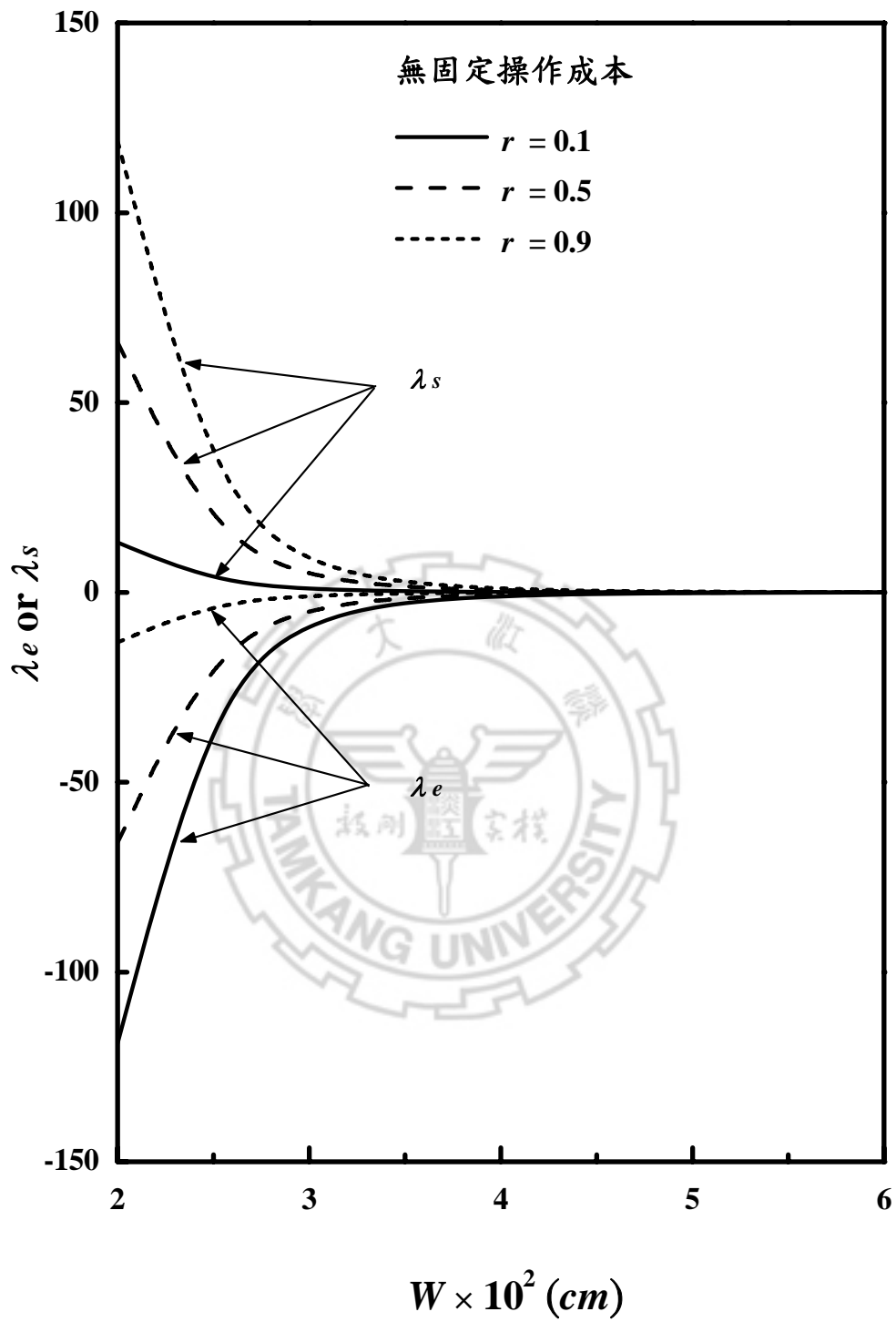
從圖(4.3-8)及圖(4.3-9)中可發現，出料質量分率愈偏離 0.5 時，其分離度愈高，且不同之出料質量分率下會有不同之最佳板距 W ，這是因為當冷、熱兩板距離拉近時，會增加熱擴散塔之熱傳量，因此，當板距愈小其分離度也會相對提高，但若將板距持續拉近，則塔中會造成普通擴散作用而抑制了熱擴散塔之分離度的提昇，故在連續式熱擴散塔分離操作時，須適時地調整板距，才能改善熱擴散塔之分離效果。最後，從圖(4.3-10)中可比較無固定操作成本及固定操作成本下之板距對分離度之影響，由圖中發現，在無固定操作成本下之分離度會比固定操作成本下之分離度還來的高，這是因為在無固定操作成本下即兩板間之溫度差不變，在溫度差不變之前提下將兩板間的距離拉近，會使得熱傳量不斷的增加，而使分離效果不斷提升，但此需花費很多的操作成本來控制兩板間的溫差，而我們除了想要提升熱擴散塔之分離度外，還需考慮其經濟效應，此章節主要目的是想要在最低的操作成本下達到最佳的分離效果，因此，還模擬在固定操作成本下改變板距對分離度之影響，並與無固定操作成本下改變板距之分離度做比較。



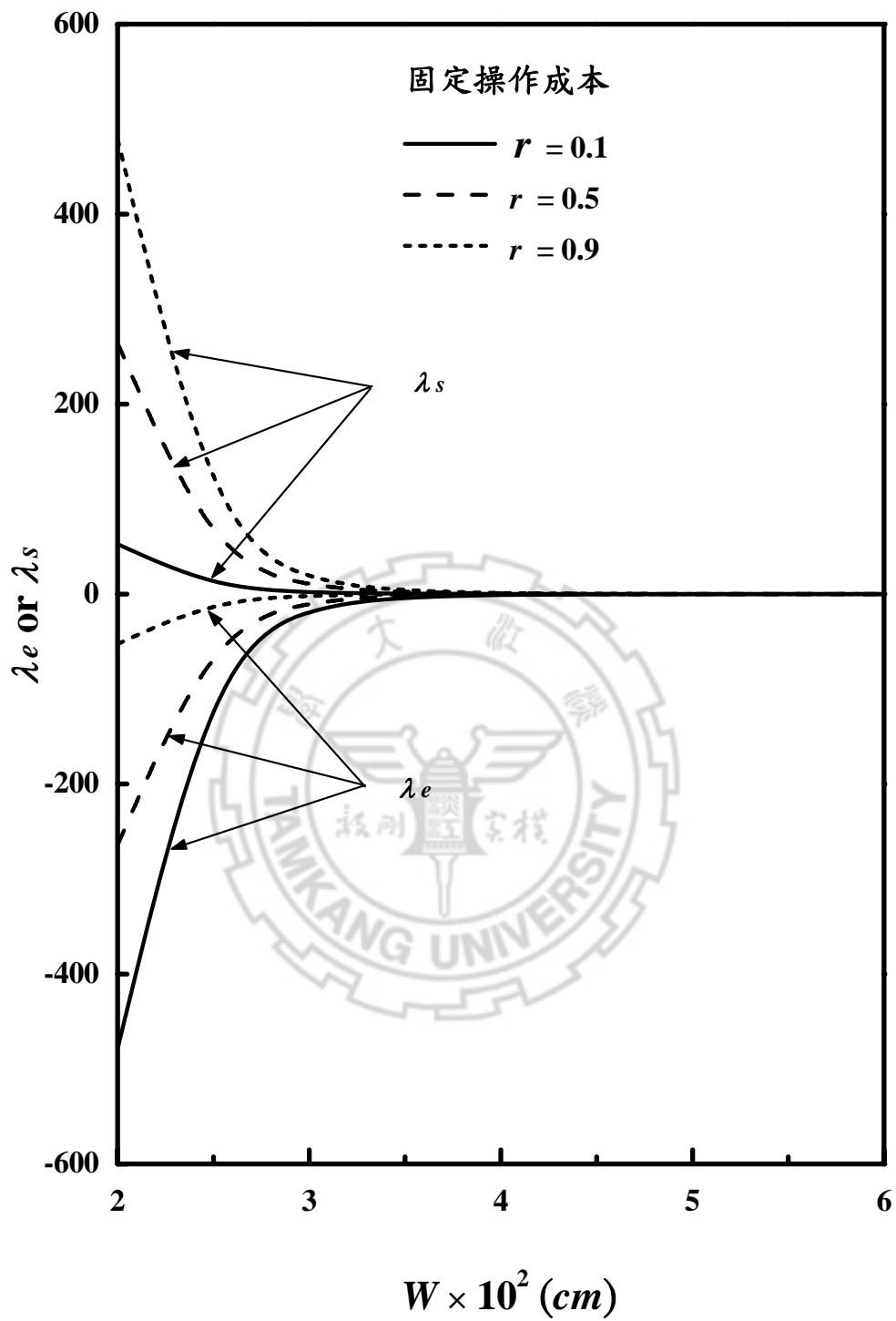
圖(4.3-1) 在無固定操作成本，不同板距下，出料質量分率與特徵值之關係圖



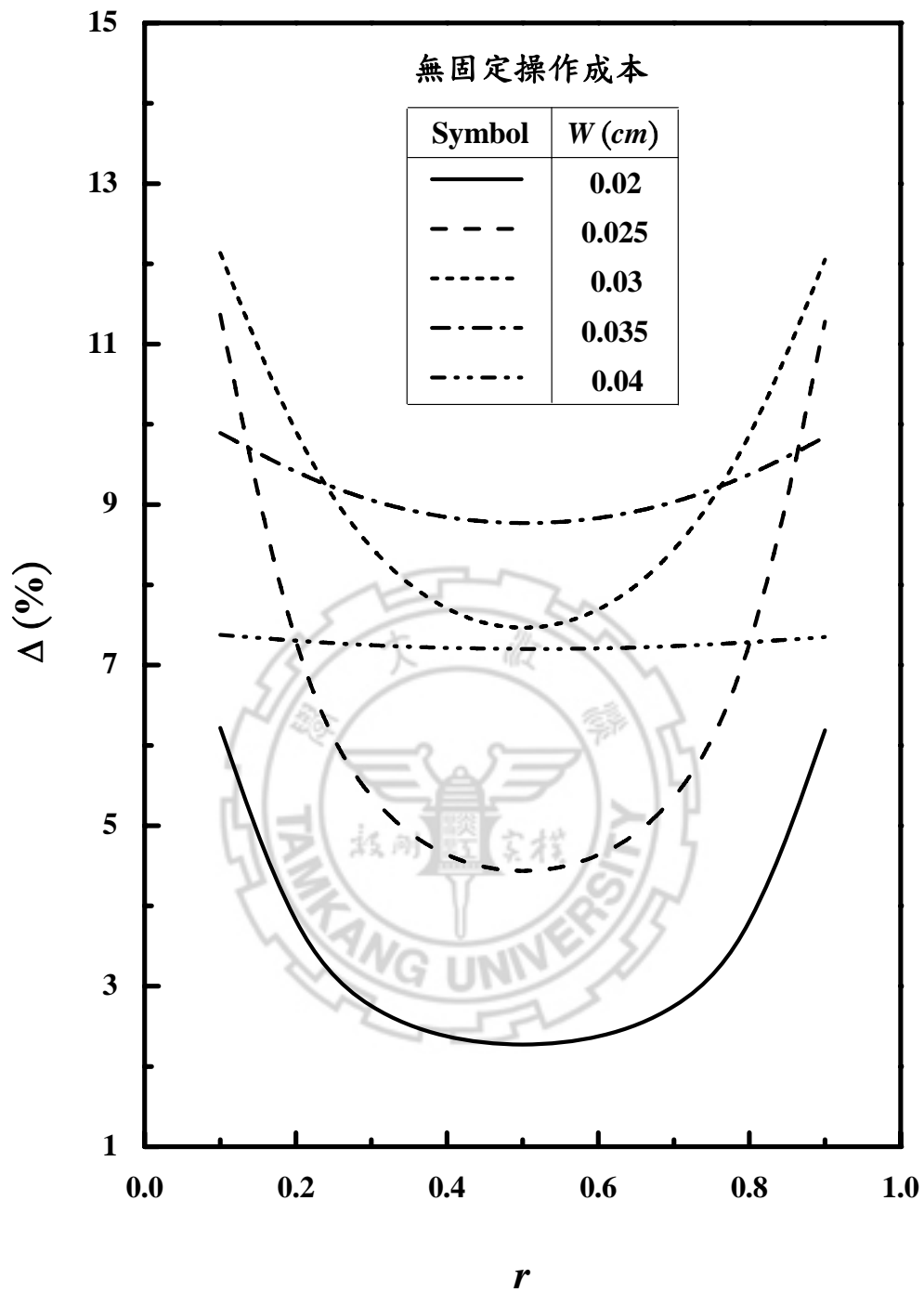
圖(4.3-2) 在固定操作成本，不同板距下，出料質量分率與特徵值之關係圖



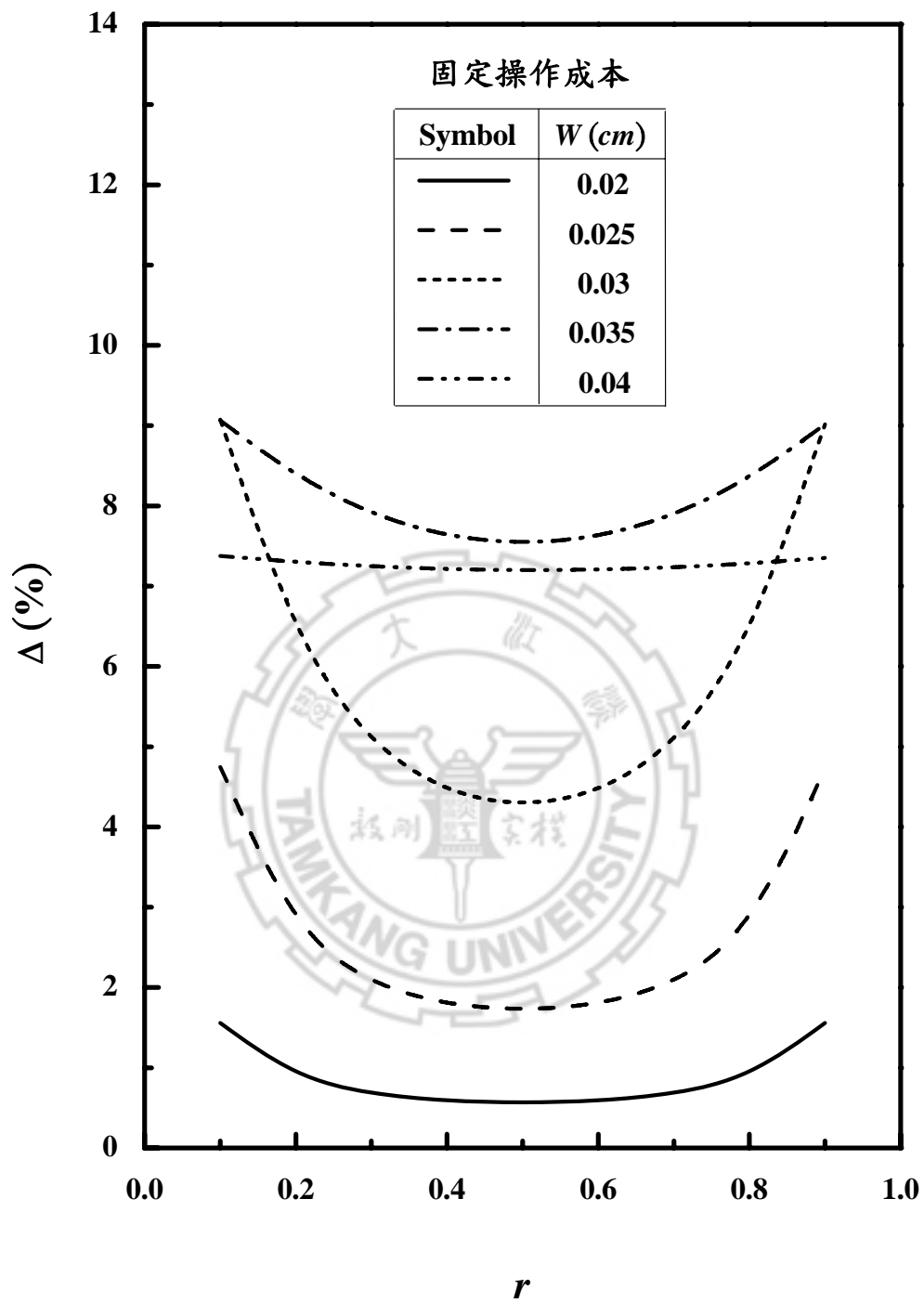
圖(4.3-3) 在無固定操作成本，不同出料質量分率下，板距與特徵值之關係圖



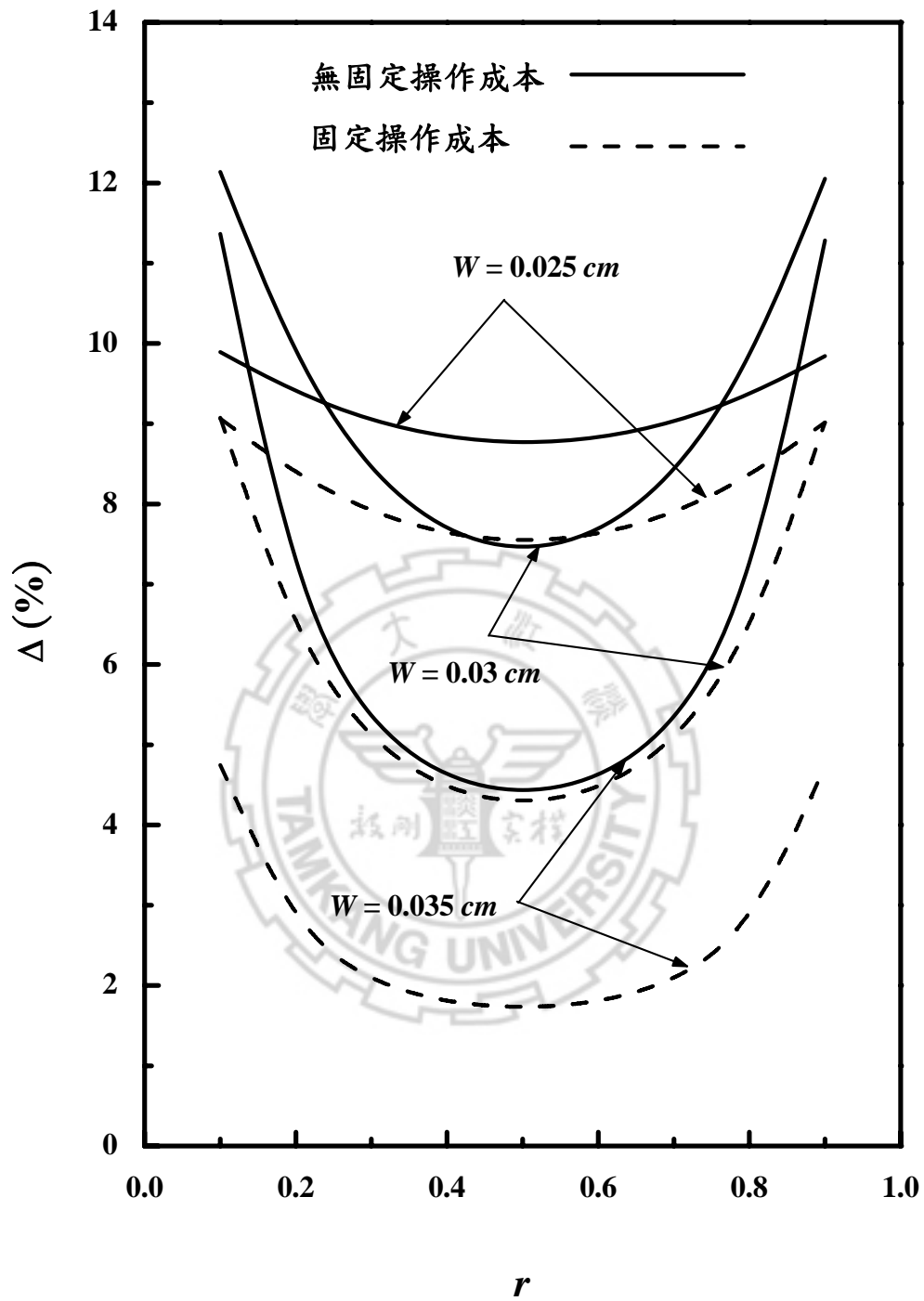
圖(4.3-4) 在固定操作成本，不同出料質量分率下，板距與特徵值之關係圖



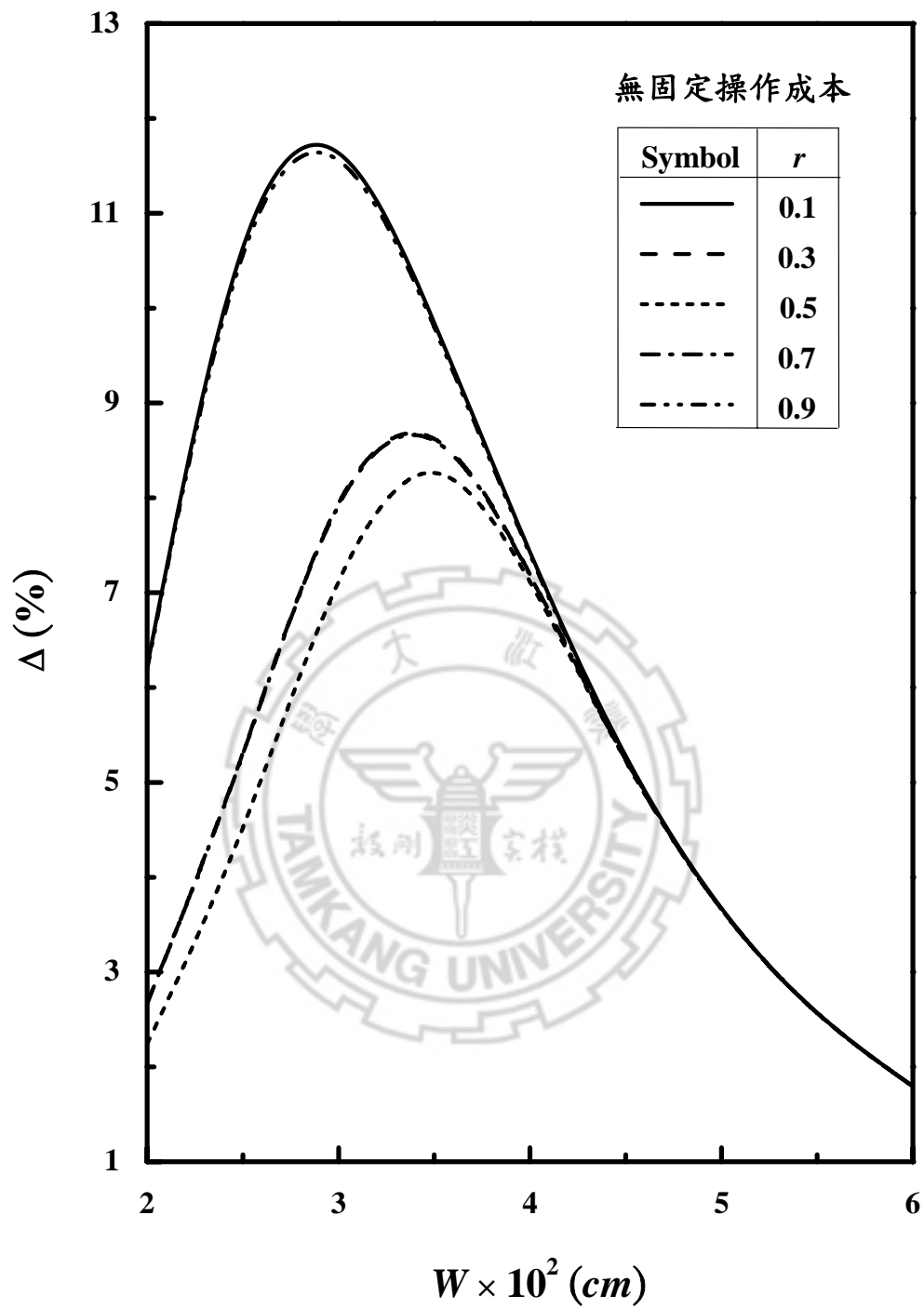
圖(4.3-5) 在無固定操作成本，不同板距下，出料質量分率與分離度之關係圖



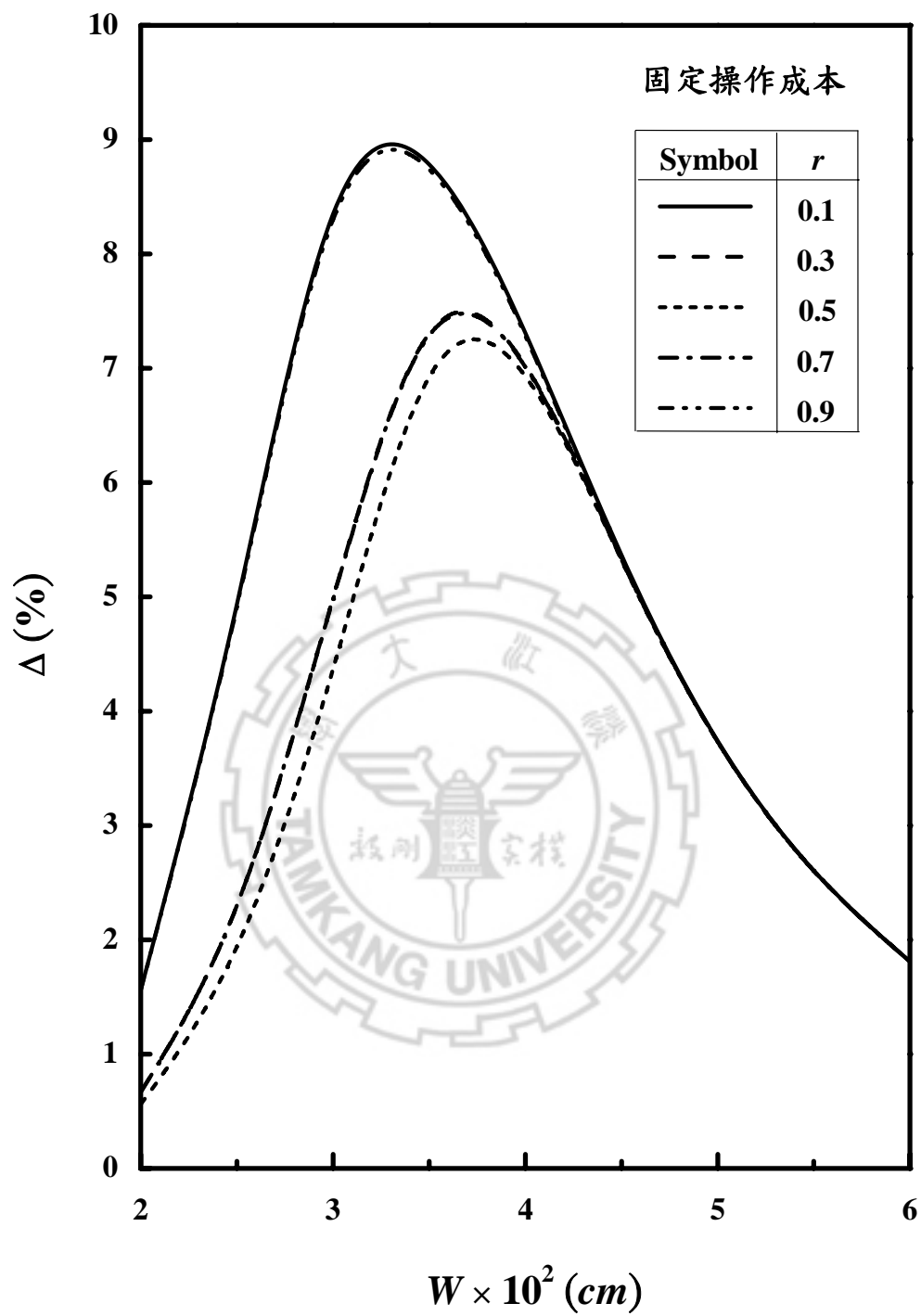
圖(4.3-6) 在固定操作成本，不同板距下，出料質量分率與分離度之關係圖



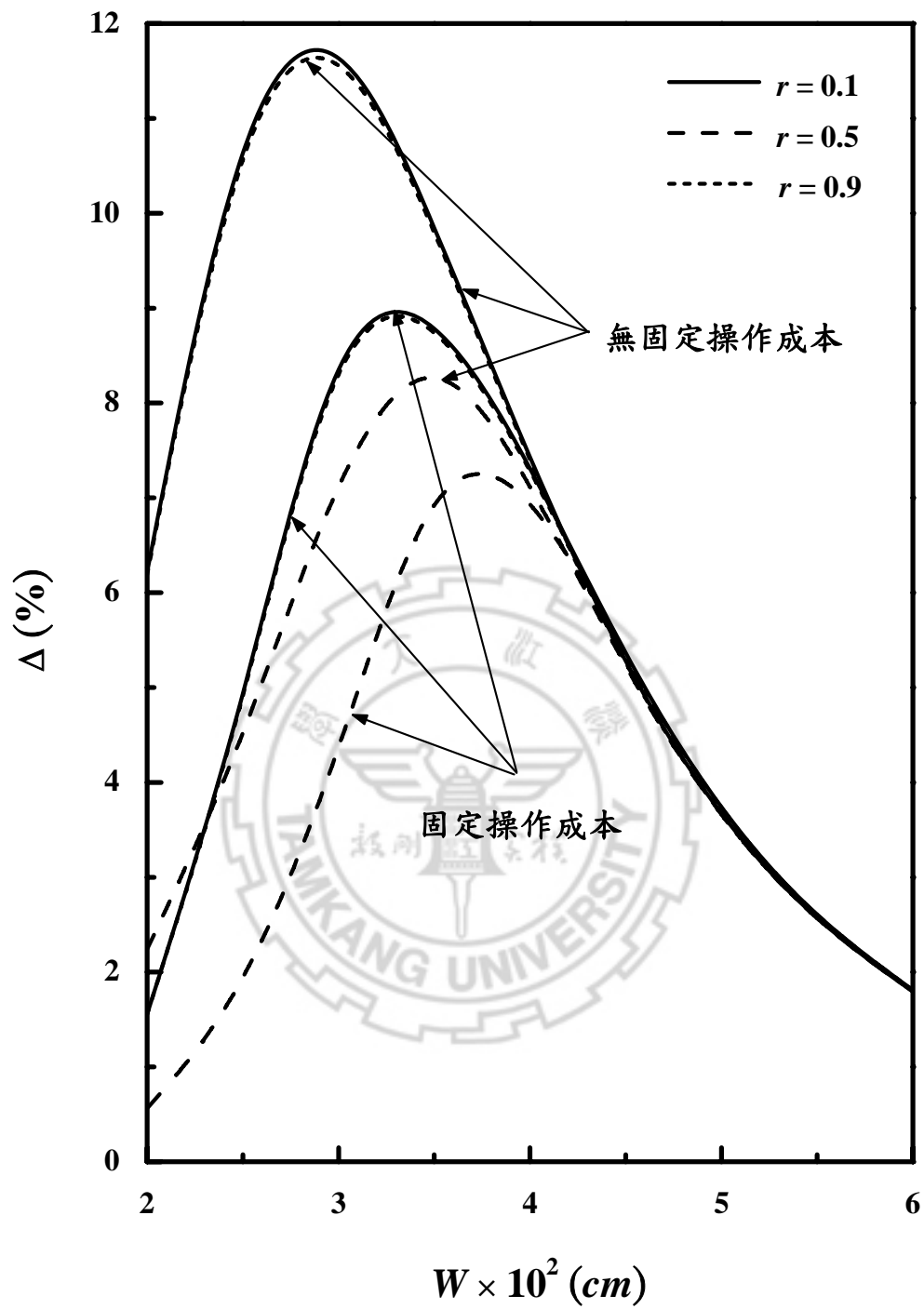
圖(4.3-7) 在無固定操作成本與固定操作成本，不同板距下，出料質量分率與分離度之關係圖



圖(4.3-8) 在無固定操作成本，不同出料質量分率下，板距與分離度之關係圖



圖(4.3-9) 在固定操作成本，不同出料質量分率下，板距與分離度之關係圖



圖(4.3-10) 在無固定操作成本與固定操作成本，不同出料質量分率下，板距與分離度之關係圖

第五章

結論

本研究以平板型熱擴散塔之解析解為主題，針對具變出料質量分率對熱擴散塔提煉重水效率改善之研究。此研究是導入了八個設計與操作參數來控制對流強度，進而加強續流效應與降低再混合效應，以達到提高分離度之目的。

綜合以上各章節之討論，我們得到以下幾點結論：

1. 本文之理論模式主要探討利用分離變數法配合正交展開方法，求得平板型熱擴散塔之解析解研究。雖然解析解的計算過程比傳送公式較為繁複，但其理論數學之模擬結果與實驗結果比較卻更為精確。
2. 在重水系統中，擬似濃度積隨濃度的變化量不大，可將它視為常數，以利於分析與模擬，其型態與二成份熱擴散分離系統之型態相類似，並將此擬似濃度積以常數近似，可簡化原本複雜的分離度公式，且本文所用之簡化方法適用於全濃度的範圍，不受限於低濃度範圍。
3. 本文提供了具有平衡反應的三成份重水系統，於連續式熱擴散塔在不同的出料質量分率、進料質量流率、進料濃度分率、進料位置、固定操作面積下之長寬比、傾斜角、板距及固定操作成本下之板距

的理論公式。

4. 本文提出了三成份系統重水之熱膨脹係數、減數熱擴散係數及普通擴散係數等熱物性質之估算，可將這些熱物性質運用到其他改良型之熱擴散塔。
5. 當進料質量流率愈小時，其分離效果愈佳。
6. 在固定進料濃度分率 $C_F = 0.37$ 及中間位置進料 $\delta = 0.5$ 下，出料質量分率愈偏離 0.5，其分離效果愈好。而出料質量分率等於 0.5 時，進料濃度分率設定在 0.37 且選擇從塔中間進料會有最佳之分離效果；出料質量分率小於 0.5 時，進料濃度分率設定大於 0.37 且選擇靠近塔底進料會有較佳之分離效果；出料質量分率大於 0.5 時，進料濃度分率設定小於 0.37 且選擇靠近塔頂進料會有較佳之分離效果。
7. 適當的調整不同之參數，會有其最佳長寬比、傾斜角度及板距，有助於分離度的提升。

綜合以上所述，本研究主要目的是建立一平板型熱擴散塔之解析解數學模型，並增加不同之操作及設計參數，將這些參數做適時的控制便可得到最佳之操作及設計參數，而提升熱擴散塔提煉重水之分離效果，並能配合實際使用之情況。

符號說明

$a_0, a_1 \cdots a_n$	定義於式(2.2-55)~式(2.2-59)	-
$\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$	定義於式(2.2-50)~式(2.2-52)	-
B	熱擴散塔之塔寬	<i>cm</i>
C	重水之質量濃度分率	-
C_0	在 $x=0$ 處重水之質量分率濃度	-
C_1	H ₂ O 之質量濃度分率	-
C_2	HDO 之質量濃度分率	-
C_3	D ₂ O 之質量濃度分率	-
C_B	塔底重水之出料濃度分率	-
C_e	增濃段重水之質量濃度分率	-
C_F	重水之進料濃度分率	-
C_i	多成份系統中成份 i 之質量濃度分率	-
C_k	多成份系統中成份 k 之質量濃度分率	-
C_p	定壓下之比熱	$\frac{cal}{g \cdot K}$
C_s	提取段重水之質量濃度分率	-
C_T	塔頂重水之出料濃度分率	-
$C\hat{C}$	重水之擬似濃度積	-

$C_3 \hat{C}_3$	D ₂ O之擬似濃度積	-
$C_e \hat{C}_e$	增濃段之重水擬似濃度積	-
$C_s \hat{C}_s$	提取段之重水擬似濃度積	-
d_{mne}	增濃段特徵函數中之展開係數	-
d_{ms}	提取段特徵函數中之展開係數	-
D_1	H ₂ O之普通擴散係數	cm^2/s
D_2	HDO之普通擴散係數	cm^2/s
D_3	D ₂ O之普通擴散係數	cm^2/s
D_b	二成份系統之普通擴散係數	cm^2/s
D_i	多成份系統中成份 <i>i</i> 之普通擴散係數	cm^2/s
f_{ik}	$(m_i - m_k)/(m_i + m_k)$ ，定義於式(2.1-21)	-
F_e	定義於式(2.1-59)	-
$F_{e,m}$	增濃段伴隨特徵值 $\lambda_{e,m}$ 之特徵函數	-
F_s	定義於式(2.1-60)	-
$F_{s,m}$	提取段伴隨特徵值 $\lambda_{s,m}$ 之特徵函數	-
g	重力加速度	cm/s^2
$G_{e,m}$	增濃段伴隨特徵值 $\lambda_{e,m}$ 之特徵函數	-
$G_{s,m}$	提取段伴隨特徵值 $\lambda_{s,m}$ 之特徵函數	-
h	位能高度	cm

h_w	塔內重水之液位高	cm
$h(x)$	溫度差引起徑向質量通量之函數關係	$1/cm$
H_b	二成份系統之傳送係數，定義於式(2.1-18)	g/s
H_{ik}^i	多成份系統中成份 <i>i</i> 及 <i>k</i> 之傳送係數	g/s
H_{32}^{bin}	二成份系統中D ₂ O及HDO之傳送係數	g/s
H_{ik}^{bin}	二成份系統中成份 <i>i</i> 及 <i>k</i> 之傳送係數	g/s
H_{12}^{tern}	三成份系統中H ₂ O及HDO之傳送係數	g/s
H_{13}^{tern}	三成份系統中H ₂ O及D ₂ O之傳送係數	g/s
H_{21}^{tern}	三成份系統中HDO及H ₂ O之傳送係數	g/s
H_{23}^{tern}	三成份系統中HDO及D ₂ O之傳送係數	g/s
H_{31}^{tern}	三成份系統中D ₂ O及H ₂ O之傳送係數	g/s
H_{32}^{tern}	三成份系統中D ₂ O及HDO之傳送係數	g/s
H_{ik}^{tern}	三成份系統中成份 <i>i</i> 及 <i>k</i> 之傳送係數	g/s
$H(\eta)$	定義於(2.2-30)式	-
J_x	在 <i>x</i> 方向之淨質量流通量	g/s
J_{x-OD}	在 <i>x</i> 方向由普通擴散所引起的質量流通量	g/s
J_{x-TD}	在 <i>x</i> 方向由熱擴散所引起的質量流通量	g/s
J_{z-OD}	在 <i>z</i> 方向由普通擴散所引起的質量流通量	g/s
k	熱傳導係數	$cal/s \cdot cm \cdot K$

K_1	H ₂ O之傳送係數，定義於式(2.1-30)	$g \cdot cm / s$
K_2	HDO之傳送係數，定義於式(2.1-31)	$g \cdot cm / s$
K_3	D ₂ O之傳送係數，定義於式(2.1-32)	$g \cdot cm / s$
K_b	二成份系統之傳送係數，定義於式(2.1-19)	$g \cdot cm / s$
$K_{3,d}$	擴散項之傳送係數	$g \cdot cm / s$
K_{eq}	重水系統之質量分率平衡常數	-
K'_{eq}	重水系統之莫耳分率	-
K_i	多成份系統中之傳送係數，定義於式(2.1-23)	$g \cdot cm / s$
$K_{3,c}$	對流項之傳送係數	$g \cdot cm / s$
L	熱擴散塔之全長	cm
L_e	熱擴散塔增濃段之長度	cm
L_s	熱擴散塔提取段之長度	cm
m_1	H ₂ O之質量	g
m_2	HDO之質量	g
m_3	D ₂ O之質量	g
m_i	同位素系統中，成份 <i>i</i> 之質量	g
m_k	同位素系統中，成份 <i>k</i> 之質量	g
P	壓力	atm
P_f	強制對流下之壓力	atm

P_n	自然對流下之壓力	<i>atm</i>
\dot{q}	熱源或電源	—
r	出料質量分率，定義於式(2.3-1)	—
R_e	定義於式(2.1-55)	—
R_s	定義於式(2.1-56)	—
S	熱擴散塔之表面積，定義於式(2.3-29)	<i>cm</i> ²
$S_{e,m}$	增濃段之特徵係數	—
$S_{s,m}$	提取段之特徵係數	—
t	時間	<i>s</i>
T	某狀態下之溫度	<i>K</i>
\bar{T}	熱擴散塔系統之參考溫度	<i>K</i>
T_C	冷壁之溫度	<i>K</i>
T_H	熱壁之溫度	<i>K</i>
ΔT	冷熱壁之溫度差	<i>K</i>
U_e	增濃段之無因次速度分佈	—
U_s	提取段之無因次速度分佈	—
V	某狀態下之體積	<i>cm</i> ³
\vec{V}	向量速度	<i>cm/s</i>
V_e	增濃段之速度分佈	<i>cm/s</i>

$V_{e,f}$	強制對流下之增濃段速度分佈	cm/s
$V_{e,n}$	自然對流下之增濃段速度分佈	cm/s
V_s	提取段之速度分佈	cm/s
$V_{s,f}$	強制對流下之提取段速度分佈	cm/s
$V_{s,n}$	自然對流下之提取段速度分佈	cm/s
V_x	x 方向之速度分佈	cm/s
V_y	y 方向之速度分佈	cm/s
V_z	z 方向之速度分佈	cm/s
W	冷熱壁之板距	cm
x	垂直於傳送方向之座標	-
$Y(\eta)$	定義於式(2.2-43)	-
z	平行於傳送方向之座標	-

希臘文字

α	熱擴散係數，等於 $k / \rho C_p$	cm^2/s
α_b	二成份系統之減數熱擴散係數	-
α_{ik}^i	多成份系統中成份 i 之減數熱擴散係數	-
α_{31}^{bin}	二成份系統中 D_2O 及 H_2O 之減數熱擴散係數	-
α_{32}^{bin}	二成份系統中 D_2O 及 HDO 之減數熱擴散係數	-
α_{ik}^{bin}	二成份系統中成份 i 及 k 之減數熱擴散係數	-
α_{12}^{tern}	三成份系統中 H_2O 及 HDO 之減數熱擴散係數	-
α_{13}^{tern}	三成份系統中 H_2O 及 D_2O 之減數熱擴散係數	-
α_{21}^{tern}	三成份系統中 HDO 及 H_2O 之減數熱擴散係數	-
α_{23}^{tern}	三成份系統中 HDO 及 D_2O 之減數熱擴散係數	-
α_{31}^{tern}	三成份系統中 D_2O 及 H_2O 之減數熱擴散係數	-
α_{32}^{tern}	三成份系統中 D_2O 及 HDO 之減數熱擴散係數	-
α_{ik}^{tern}	三成份系統中成份 i 及 k 之減數熱擴散係數	-
β_T	固定壓力之下 $-(\partial\rho/\partial T)_P$ 在 T 之熱膨脹係數	$g/cm^3 \cdot K$
γ	定義於式(A-13)	-
γ_e	增濃段速度轉換的地方，定義於式(A-38)	-
γ_s	提取段速度轉換的地方，定義於式(A-40)	-
δ	進料位置，定義於式(2.3-8)	-

Δ	熱擴散塔之總分離度	-
Δ_e	增濃段之分離度	-
Δ_s	提取段之分離度	-
ζ	z 方向之無因次座標	-
η	x 方向之無因次座標	-
θ	傾斜角度	°
$\lambda_{e,m}$	增濃段之特徵值	-
$\lambda_{s,m}$	提取段之特徵值	-
μ	黏度	$g/cm \cdot s$
ξ	長寬比，定義於式(2.3-28)	-
ρ	密度	g/cm^3
ρ_1	$T = T_1$ 時之之密度	g/cm^3
ρ_2	$T = T_2$ 時之之密度	g/cm^3
$\bar{\rho}$	溶液在溫度 \bar{T} 時之密度	g/cm^3
σ_B	塔底之質量流率	g/s
σ_e	增濃段之質量流率	g/s
$\sigma_{e,f}$	強制對流下之增濃段質量流率	g/s
$\sigma_{e,n}$	自然對流下之增濃段質量流率	g/s
σ_F	重水之進料質量流率	g/s

σ_s	提取段之質量流率	$\frac{g}{s}$
$\sigma_{s,f}$	強制對流下之提取段質量流率	$\frac{g}{s}$
$\sigma_{s,n}$	自然對流下之提取段質量流率	$\frac{g}{s}$
σ_T	塔頂之質量流率	$\frac{g}{s}$
τ	二成份系統之傳送量	$\frac{g}{s}$
τ_e	增濃段之傳送量	$\frac{g}{s}$
τ_s	提取段之傳送量	$\frac{g}{s}$
τ_i	多成份系統中成份 <i>i</i> 之傳送量	$\frac{g}{s}$
τ_1	H ₂ O之傳送量	$\frac{g}{s}$
τ_2	HDO之傳送量	$\frac{g}{s}$
τ_3	D ₂ O之傳送量	$\frac{g}{s}$
$\Phi(z)$	$x=0$ 處 <i>z</i> 方向之濃度梯度函數，定義於式(2.1-13)	-
ϖ	定義於式(2.1-42)	$\frac{g}{s}$

參考文獻

- [1] Luwding, C., *Wien. Akad. Ber.*, **20**, 539 (1856).
- [2] Dufour, L., “The Diffusion Thermoeffect,” *Arch. Sci. (Geneva)*, **45**, 9 (1872).
- [3] Enskog, D., “A Generalization of Maxwell’s Second Kinetic Gas Theory,” *Physik. Z.*, **12**, 56 (1911).
- [4] Chapman, S. and Dootson, F. W., “Thermal Diffusion,” *Phil. Mag.*, **33**, 248 (1917).
- [5] Chapman, S., “Thermal Diffusion of Rare Constituents in Gas Mixtures And Isotopes,” *Phil. Mag.*, **7**, 1 (1929).
- [6] Clusius, K. and Dickel, G., “New Process for Separation of Gas Mixtures and Isotopes,” *Naturwiss.*, **26**, 546 (1938).
- [7] Clusius, K. and Dickel, G., “The Separation-Tube Process for Liquids,” *Naturwiss.*, **27**, 148 (1939).
- [8] 黃慰國，“熱擴散塔中提煉重水之最佳進料位置”，淡江大學碩士論文(1998)。
- [9] 潘家寅譯“核燃料”，徐氏基金會出版，p.95(1967)。
- [10] Taleyarkhan, R. P. et al, “Evidence for Nuclear Emissions During Acoustic Cavitations,” *Science*, **295**, 1868 (2002)
- [11] Powers, J. E. and Wilke, C. R., “Separation in Liquids by Thermal Diffusion,” *AIChE J.*, **3**, 213 (1957).
- [12] Cheuh, P. L. and Yeh, H. M., “Thermal Diffusion in a Flat-Plate Column Inclined for Improved Performance,” *AIChE J.*, **13**, 37

- (1967).
- [13] Yeh, H. M., "The Effect of Plate Spacing on the Degree of Separation in Inclined Thermal Diffusion Columns With Fixed Operating Expense," *Sep. Sci. Technol.*, **18**, 585 (1983).
- [14] Yeh, H. M., "Enrichment of Heavy Water in a Continuous-Type Inclined Thermal Diffusion Column," *Sep. Sci. Technol.*, **20**, 101 (1985).
- [15] Yeh, H. M., Yang, F. T. and Yang, S. C., "Optimal Design of Flat-Plate Thermal Diffusion with Fixed Plates Surfaces," *The Chem. Eng. J.*, **31**, 45 (1985).
- [16] Yeh, H. M. and Yang, S. C., "Thermal Diffusion of the Frazier Scheme with Columns Inclined for Improved Performance," *J. Chin. Inst. Chem. Engrs.*, **18**, 249 (1987).
- [17] Yeh, H. M., Yang, F. T. and Yang, S. C., "The Effect of Varied Cross-Section Area on The Separation Efficiency of A Flat-Plate Thermal Diffusion Column with Fixed Plate-surface Area," *Chin. I. Ch. E. J.*, **19**, 241 (1988).
- [18] Yeh, H. M., "Separation Theory of An Inclined Thermal Diffusion Column with Fixed Operating Expense," *Chin. I. Ch. E. J.*, **20**, 263 (1989).
- [19] Yeh, H. M., "Thermal Diffusion in a Flat-Plate Column Inclined for Improved Performance with Transverse Sampling Streams," *J. Chin. Inst. Chem. Engrs.*, **23**, 127 (1992).
- [20] Yeh, H. M., "The Best Performance of Inclined Flat-Plate Thermal Diffusion Columns," *Sep. Tech.*, **5**, 115 (1995).
- [21] Yeh, H. M., "Enrichment of Heavy Water in Flat-Plate Thermal

- Diffusion Columns of the Frazier Scheme Inclined for Improved Performance,” *Sep. Sci. Technol.*, **30**, 1025 (1995).
- [22] Yeh, H. M., “Best Performance of Inclined Thermal Diffusion Columns of the Frazier Scheme,” *The Canadian J. of Chem. Eng.*, **74**, 152 (1996).
- [23] Yeh, H. M., “Optimum Design of Inclined Frazier-Scheme Thermal Diffusion Columns for Enriching Heavy Water,” *Separation and Puri. Tech.*, **17**, 243 (1999).
- [24] Yeh, H. M., “The Combined Effect of Inclined Angle and Plate Spacing on The Performances of Flat-Plate Thermal-Diffusion Columns,” *Chem. Eng. Comm.*, **179**, 179 (2000).
- [25] Yeh, H. M., “Effect of Inclined Angle and Plate Spacing on the Enrichment of Heavy Water in Batch-Type Flat-plate Thermal Diffusion Columns,” *Separation and Puri. Tech.*, **24**, 147 (2001).
- [26] Yeh, H. M., “Enrichment of Heavy Water in Flat-Plate Thermal Diffusion Columns Inclined for Improved Performance,” *Separation and Puri. Tech.*, **26**, 227 (2002).
- [27] Washall, T. A. and Melpolder, F.W., “Improving The Separation Efficiency of Liquid Thermal Diffusion Columns,” *Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev.*, **1**, 26 (1962).
- [28] Yeh, H. M. and Ward, H. C., “The Improvement In Separation of Concentric Tube Thermal Diffusion Columns,” *Chem. Eng. Sci.*, **26**, 937 (1970).
- [29] Rabinovich, G. D., Ivakhnik, V. P., Zimina, K. I. and Sorokina, N. G., “Use of Spiral Inserts In Thermal-Diffusion Columns,” *Inzh. Fiz. Zh.*, **35**, 278 (1978).

- [30] Yeh, H. M. and Yang, S. C., "The Enrichment of Heavy Water in A Concentric-Tube Wired Thermal Diffusion Column," *Nat'l Cheng Kung Univ. J.*, **20**, 179 (1985).
- [31] Yeh, H. M., "Thermal Diffusion in a Wired Concentric-Tube Column with Transverse Streams," *J. Chin. Inst. Chem. Engrs.*, **24**, 343 (1993).
- [32] Yeh, H. M., "Enrichment of Heavy Water by Thermal Diffusion, Chem. Eng. Comm," **167**, 167 (1998)
- [33] Yeh, H. M., "Heavy Water Enrichment in Wired Concentric-Tube Thermal-Diffusion Columns with Transverse Sampling Streams," *J. Chin. Inst. Chem. Engrs.*, **32**, 453 (2001).
- [34] Yeh, H. M. and Cheng, S. M., "Theory in Rotary Thermal Diffusion Columns," *National Ceng Kung Univ. Journal*, **7**, 73 (1972).
- [35] Yeh, H. M. and Cheng, S. M., "A Study of The Separation Efficiency of Rotary Thermal Diffusion Columns," *Chem. Eng. Sci.*, **28**, 1803 (1973).
- [36] Yeh, H. M. and Ho, F. K., "A Study of the Separation Efficiency of Wired Thermal Diffusion Columns with Tubes Rotating in Opposite Directions," *Chem. Eng. Sci.*, **30**, 1381 (1975).
- [37] Yeh, H. M. and Tsai, S. W., "Improvement in Separation of Concentric-Tube Thermal Diffusion Columns with Viscous Heat Generation under Consideration of the Curvature Effect," *Sep. Sci. Technol.*, **16**, 63 (1981).
- [38] Yeh, H. M. and Tsai, S. W., "A Study of the Separation Efficiency of Rotated Concentric-Tube Thermal Diffusion Columns with

- Helical Plane inserted as a Spacer in the Annulus,” *J. Chem. Engrs. Japan*, **14**, 90 (1981).
- [39] Yeh, H. M. and Tsai, S. W., “Separation Efficiency of Rotary Thermal Diffusion Columns with Inner Tube Cooled and Outer Tube Heated,” *Separation Sci. & Tech.*, **17**, 1075 (1982).
- [40] Yeh, H. M. and Hsieh, S. J., “A study on the Separation Efficiencies of Rotating-Tube Wired Thermal-Diffusion Columns under Higher Flow-Rate Operations,” *Sep. Sci. Technol.*, **18**, 1065 (1983).
- [41] Yeh, H. M. and Yang, S. C., “Enrichment of Heavy Water in a Wired Thermal Diffusion Column with Tube Rotated,” *J. Chin. Inst. Chem. Engrs.*, **17**, 1 (1986).
- [42] Sullivan, L. J., Ruppel, T. C. and Willingham, C. B., “Rotary and Packed Thermal Diffusion Fractionating Columns for Liquids,” *Ind. Eng. Chem.*, **47**, 208 (1955).
- [43] Lorenz, M. and Emery, A. H., “The Packed Thermal Diffusion Column,” *Chem. Eng. Sci.*, **11**, 16 (1959).
- [44] Emery, A. E. and Lorenz, M., “Thermal Diffusion in a Packed Column,” *AIChE*, **9**, 660 (1963).
- [45] Yeh, H. M., Chu, T. Y. and Hong, C. H., “Theory in Continuous-Type Packed Thermal Diffusion Columns,” *Chin. I. Ch. E. Journal*, **2**, 135 (1971).
- [46] Yeh, H. M. and Chu, T. Y., “Study of the Separation Efficiency of Continuous-Type Packed Thermal Diffusion Columns,” *Chem. Eng. Sci.*, **29**, 1421 (1974).
- [47] Dorozush, V. M. and Rabinovich, G. D., “Thermal Diffusion in a

- Packed Column,” *J. Eng. Phys.*, **30**, 600 (1976).
- [48] Yeh, H. M., “Theory of Isotope Separation by Improved Thermal Diffusion Columns,” *Chin I. Ch. E. Journal*, **10**, 89 (1979).
- [49] Dorozush, V. M. and Rabinovich, G. D., “Use of Packed Thermal Diffusion Columns to Determine the Soret Coefficient in a Benzene-Carbon Tetrachloride Mixture,” *J. Eng. Phys.*, **41**, 1007 (1981).
- [50] Jamet, Ph. and Fargue, D. and Costeseque, P., “Determine of the effective transport Coefficients for the Separation of Binary Mixtures of Organic Compounds into Packed Thermal Diffusion Columns,” *Chem. Eng. Sci.*, **51**, 4463 (1996).
- [51] Tsai, S. W. and Yeh, H. M., “A Study of the Separation Efficiency of Horizontal Thermal Diffusion Columns with External Reflexes,” *Canadian J. of Chem. Eng.*, **63**, 406 (1985).
- [52] Tsai, S. W. and Yeh, H. M., “A Study of The Separation Efficiency of The Concentric-Type Thermal Diffusion Column with An Impermeable Barrier between The Plates,” *J. of Ch. E. of Japan*, **19**, 548 (1986).
- [53] Yeh, H. M., Tsai, S. W. and Lin, C. S., “A Study of Separation Efficiency in Thermal Diffusion Columns with A Permeable Vertical Barrier,” *AIChE J.*, **32**, 971 (1986).
- [54] Tsai, S. W. and Yeh, H. M., “A Study of The Separation Efficiency of Ther Batch-Type Thermal Diffusion Column with An Impermeable Barrier Inserted Between The Plates,” *I & EC Fundamentals*, **25**, 367 (1986).
- [55] Yeh, H. M., Tsai, S. W. and Chen, W. H., “Improvement of

- Separation Efficiency in The Continuous-Type Horizontal Thermal Diffusion Column with Permeable Barrier between The Plates,” *Canadian J. of Chem. Eng.*, **64**, 687 (1986).
- [56] Tsai, S. W. and Yeh, H. M., “Improvement in Separation of The Batch-Type Thermal Diffusion Column with Impermeable Barriers Inserted between The Plates,” *Can. J. Ch. E.*, **67**, 589 (1989).
- [57] Yeh, H. M., “A Study of The Separation Efficiency in Horizontal Permeable-Barrier Thermal Diffusion Columns with Walls Set in Parallel Opposite Motion,” *Ch. I. Ch. E. J.*, **25**, 317 (1991).
- [58] Frazier, D., “Analysis of Transverse-Flow Thermal Diffusion,” *Ind. Eng. Chem. Proc. Dev.*, **1**, 237 (1962).
- [59] Grasselli, R. and Frazier, D., “A Comparative Study of Continuous Liquid Thermal Diffusion Systems,” *Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev.*, **1**, 241 (1962).
- [60] Yeh, H. M. and Yang, S. C., “Thermal Diffusion of The Frazier Scheme with Columns Inclined for Improved Performance,” *Chin. I. Ch. E. J.*, **18**, 249 (1987).
- [61] Yeh, H. M., “Thermal Diffusion in A Flat-Plate Column Inclined for Improved Performance with Transverse Sampling Streams,” *Ch. I. Ch. E. J.*, **23**, 127 (1992).
- [62] Yeh, H. M. and Wang, Y. T., “The Modified Frazier-Scheme Thermal-Diffusion Columns with Column Length Varied at A Constant Ratio,” *Separations Tech.*, **2**, 192 (1992).
- [63] Yeh, H. M., “The Effect of Plate Spacing on The Degree of Separation in Inclined Thermal Diffusion Columns with

- Transverse Sampling Streams,” *J. Chin. Inst. Chem. Engrs.*, 25, 71 (1994).
- [64] Yeh, H. M., “Further Work on the Modification of the Frazier Thermal Diffusion System,” *Separation Tech.*, 4, 1 (1994).
- [65] Yeh, H. M., “The Optimum Plate-Spacing in Flat-Plate Thermal Diffusion Columns with Transverse Sampling Streams,” *J. Chin. Inst. Chem. Engrs.*, 25, 329 (1994).
- [66] Yeh, H. M., “Thermal Diffusion in Inclined Flat-Plate Columns of The Frazier Scheme,” *The Canadian J. of Chem. Eng.*, 72, 815 (1994).
- [67] Yeh, H. M., “Enrichment of Heavy Water in Flat-Plate Thermal Diffusion columns of the Frazier Scheme Inclined for Improved Performance,” *Separation Sci. and Tech.*, 30, 1025 (1995).
- [68] Yeh, H. M., “Thermal Diffusion in A Flat-Plate Column with Transverse Sampling Streams,” *Chem. Eng. Comm.*, 138, 225 (1995).
- [69] Yeh, H. M., “Optimum Plate-Spacing for the Best Performance of the Enrichment of Heavy Water in Flat-Plate Thermal Diffusion Columns of the Frazier Scheme,” *Separation Sci. and Tech.*, 31, 2543 (1996).
- [70] Yeh, H. M., “The Optimum Plat-Spacing for the Best Performance in A Flat-Plate Thermal Diffusion Column with Transverse Sampling Streams,” *Chem. Eng. Comm.*, 157, 135 (1997).
- [71] Yeh, H. M., “The Optimum Plate Aspect Ratio for The Best Performance in a Flat-Plate Thermal Diffusion Column of The Frazier Scheme,” *The Canadian J. of Chem. Eng.*, 75, 605 (1997).

- [72] Yeh, H. M., "The Optimum Plate-Spacing for The Best Performance in Flat-Plate Thermal Diffusion Columns of The Frazier Scheme," *Chem. Eng. Comm.*, 165, 227 (1998).
- [73] Yeh, H. M., "The Optimum Plate Aspect Ratio for The Best Performance in a Flat-Plate Thermal Diffusion Column with Transverse Sampling Streams," *Separation Sci. & Tech.*, 33, 227 (1998).
- [74] Yeh, H. M., "Optimum Design of Inclined Frazier Scheme Thermal Diffusion Columns for Enriching Heavy Water," *Separation and Puri. Tech.*, 17, 243 (1999).
- [75] Yeh, H. M., "Enrichment of Heavy Water in Flat-Plate Thermal Diffusion Columns of the Frazier Scheme with the Optimal Plate Aspect Ratio for Best Performance," *Canadian J. of Chem. Eng.*, 78, 596 (2000).
- [76] Yeh, H. M., "Enrichment of Heavy Water in and Inclined Flat-Plate Thermal-Diffusion Column with Transverse Sampling Streams," *J. Chin. Inst. Chem. Engrs.*, 32, 63 (2001).
- [77] Yeh, H. M., "Thermal Diffusion in a Countercurrent-Flow Frazier Scheme Inclined for Improved Performance," *Chem. Eng. Sci.*, 56, 2889 (2001).
- [78] Yeh, H. M., "Heavy Water Enrichment in Wired Concentric-Tube Thermal-Diffusion Columns with Transverse Sampling Streams," *J. Chin. Inst. Chem. Engrs.*, 32, 453 (2001).
- [79] Yeh, H. M., "Enrichment of Heavy Water by Thermal Diffusion in Countercurrent-Flow Frazier Scheme Inclined for Improved Performance," *Separation Sci. and Tech.*, 36, 3015 (2001).

- [80] Furry, W. H., Jones, R. C., and Onsager, L., "On the Theory of Isotope Separation by Thermal Diffusion," *Phys. Rev.*, **55**, 1083 (1939).
- [81] Jones, R. C. and Furry, W. H., "The Separation of Isotopes by Thermal Diffusion," *Rev. Mod. Phys.*, **18**, 151 (1946).
- [82] Jones, R. C., "The Theory of Thermal Diffusion Coefficient for Isotopes II," *Phys. Rev.*, **59**, 1019 (1941).
- [83] Saviron, J. M., Gonzalez, D., Brun, J. L. and Madariaga, J. A., "Non-Steady Separation of Multicomponent Isotopic Mixtures in Cluisus-Dickel Columns," *J. Phys. Soc. Japan*, **39**, 1417(1975).
- [84] Rutherford, W. M., "Separation of Isotopes in the Thermal Diffusion Column," *Sep. Pur. Meth.*, **4**, 305 (1975).
- [85] Yeh, H. M. and Yang, S. C., "The Enrichment of Heavy Water in a Batch-Type Thermal Diffusion Column," *Chem. Eng. Sci.*, **39**, 1277 (1984).
- [86] Standen, A., "Encyclopedia of Chemical Technology," 3rd edn., **7**, p.549, Wiley, N. Y. (1978).
- [87] Rutherford, W. M. and Lindsay, C. N., "Separation of hydrogen isotopes by thermal diffusion," *Fusion Technology*, **8**, 2278 (1985).
- [88] 顏尤龍, "流率比對 Frazier 式熱擴散塔中提煉重水效率之影

- 響”，淡江大學碩士論文(1998)。
- [89] Kirkpatrick, P. C. “Perry’s Chemical Engineers Handbook,” *Fourth Edition*, p.3-277.
- [90] 張光榮，“圓管型熱擴散塔提煉重水之解析解研究”，淡江大學碩士論文(2004)。
- [91] Miao, Y. B., Liu, C. L., Cao, Q. X. and Lee, Jay “Inverse perturbation method for inverse eigenvalue problem based on finite element analysis,” *Journal of Dong Hua University (English Edition)*, **21**, 78 (2004).
- [92] Street, R. L., “The Analysis and Solution of Partial Differential Equation,” Wadsworth Publishing Company, Inc., Belmont, California (1973).
- [93] Yeh, H. M. and Tsai, S. W., “The Improvement of Separation Theoy in A Continuous Thermal Diffusion Column,” *Separation Sci. & Tech.*, **19**, 497 (1984).
- [94] Yeh, H. M. and Tsai, S. W., “A Study of The Separation Efficiency of Thermal Diffusion Columns with Best Feed Location,” *The Chem. Eng. J.*, **29**, 141 (1985).
- [95] Yeh, H. M., “The Optimum Plate Aspect-Ratio for The Best Performance in Flat-Plate Thermal Diffusion Column,” *J. of Chem.*

- Eng., Japan*, **28**, 609 (1995).
- [96] Yeh, H. M., “Optimal Plate-Spacing in Flat-Plate Thermal Diffusion Columns,” *Bulletin of The College of Eng, Nate Taiwan Univ.*, **46**, 107 (1989).
- [97] Yeh, H. M., “The Optimum Plate-Spacing for The Best Performance in Flat-Plate Thermal Diffusion Columns,” *Chem. Eng. Sci.*, **49**, 2027 (1994).
- [98] George, S. K., “Thermal Expansivity and Compressibility of Liquid Water from 0 to 150C ...,” *Journal of Chemical and Engineering Data*, **20**, 97 (1975).
- [99] Yamamoto, I., Kobayashi, N. and Kanagawa, A., “State of the art of separative analysis of cryogenic-wall thermal diffusion column for hydrogen isotope separation,” *Fusion Technology*, **28**, 785 (1995).
- [100] Kobayashi, N., Yamakawa, H. and Yamamoto, I., “Explicit approximation to thermal diffusion factor in isotopic 3-component mixture,” *Journal of Nuclear Science and Technology*, **34**, 167 (1997).
- [101] Kobayashi, N., Enokida, Y. and Yamamoto, I., “Isotopic Approximations to thermal diffusion Factor and Ordinary

Diffusion Coefficient in a Mixture of More than 4 components,”

Journal of Nuclear Science and Technology, **38**, 682 (2001).

- [102] Yeh, H. M. and Yang, S. C. , “Experimental Studies on The Separation of Deuterium Oxide in Continuous Thermal Diffusion Column for Low Concentration Range,” *Separation Sci. & Tech.*, **20**, 687 (1985).



附錄 A

增濃段與提取段之速度分佈

由 Navier-Stokes 方程式

$$\rho \frac{D\bar{V}}{Dt} = \rho g - \nabla P + \mu \nabla^2 \bar{V} \quad (\text{A-1})$$

平板型重力熱擴散塔為兩直立平行板，因此速度分佈主要考慮徑向流動，故可得

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A-2})$$

當流體之密度為定值(不隨時間及位置而變)，亦即流體為不可壓縮流體時，則直角座標之連續方程式為

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{A-3})$$

由於流體只考慮徑向流動(z 方向)，故令

$$V_x = 0 \quad (\text{A-4})$$

$$V_y = 0 \quad (\text{A-5})$$

因此，可得

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{A-6})$$

$$\Rightarrow V_z = f(x) \quad (\text{A-7})$$

且在連續穩態操作下，可將 Navier-Stokes 方程式簡化為

$$\mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} = \rho g + \frac{\partial P}{\partial z} \quad (\text{A-8})$$

除了自然對流中的壓力外還包含強制對流之壓力，因此可將壓力寫為

$$P = P_n + P_f \quad (\text{A-9})$$

可將熱擴散塔分為增濃段(enriching section)與提取段(stripping section)

來做討論。

增濃段：

可將式(A-8)改寫為

$$\mu \frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} = \rho g + \frac{\partial P_n}{\partial z} + \frac{\partial P_f}{\partial z} \quad (\text{A-10})$$

其中

$$\frac{\partial P_f}{\partial z} = \frac{\rho g h}{L} - P(1\text{atm}) = \frac{\rho g h_w}{L} \quad (\text{A-11})$$

P ：外界壓力

因此，式(A-10)可改寫為

$$\mu \frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} = \rho g + \frac{\partial P_n}{\partial z} + \frac{\rho g h_w}{L} \quad (\text{A-12})$$

為簡化速度分佈公式推導，令

$$\gamma = \frac{\rho g h_w}{L} \quad (\text{A-13})$$

改寫式(A-12)為

$$\mu \frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} = \rho g + \frac{\partial P_n}{\partial z} + \gamma \quad (\text{A-14})$$

假設式(A-14)中的 ρ 假定為 T 的函數，做泰勒級數展開至第二項可得：

$$\rho(T) = \rho|_{\bar{T}} + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{\bar{T}} (T - \bar{T}) = \bar{\rho} - \beta_T (T - \bar{T}) \quad (\text{A-15})$$

其中， $\bar{\rho}$ 為參考溫度 \bar{T} (即平均溫度) 下之密度。

假設壓力梯度是由流體本身重量所造成，所以可以得到

$$0 = \bar{\rho} g + \frac{\partial P_n}{\partial z} \quad (\text{A-16})$$

$$\Rightarrow \bar{\rho} = -\frac{\partial P_n}{g \partial z} \quad (\text{A-17})$$

將式(A-17)代入式(A-15)得：

$$\rho = -\frac{\partial P_n}{g \partial z} - \beta_T (T - \bar{T}) \quad (\text{A-18})$$

再將式(A-18)代回式(A-14)可得：

$$\mu \frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} = -\beta_T g (T - \bar{T}) + \gamma \quad (\text{A-19})$$

無因次化式(A-19)後如下所示：

$$\mu \frac{\partial^2 V_e}{\partial \eta^2} = -\beta_T g W^2 (T - \bar{T}) + W^2 \gamma \quad (\text{A-20})$$

由前面所求得式(2.2-9)之溫度分佈 T 代入式(A-20)並經整理後可得：

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial \eta^2} = -\frac{\beta_T g W^2}{\mu} [(T_C - \bar{T}) + \eta \Delta T] + \frac{W^2 \gamma}{\mu} \quad (\text{A-21})$$

將式(A-21)對 η 積分二次得：

$$V_e = -\frac{\beta_T g W^2}{6\mu} [3(T_C - \bar{T})\eta^2 + \eta^3 \Delta T] + \frac{W^2 \gamma}{2\mu} \eta^2 + C_1 \eta + C_2 \quad (\text{A-22})$$

假設流體在管壁端位置的速度為零，則邊界條件可以寫成

$$V_e = 0, \quad \eta = 0 \quad (\text{A-23})$$

$$V_e = 0, \quad \eta = 1 \quad (\text{A-24})$$

利用式(A-23)及式(A-24)之邊界條件代入式(A-22)可分別求得 C_1 及 C_2

為：

$$C_1 = \frac{\beta_T g W^2}{6\mu} [3(T_C - \bar{T}) + \Delta T] - \frac{W^2 \gamma}{2\mu} \quad (\text{A-25})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{A-26})$$

將求得之 C_1 及 C_2 代回式(A-22)並做整理，則可解出其速度分佈為：

$$V_e = -\frac{\beta_T g W^2}{6\mu} [3(T_C - \bar{T})(\eta^2 - \eta) + \Delta T(\eta^3 - \eta)] + \frac{W^2 \gamma}{2\mu} (\eta^2 - \eta) \quad (\text{A-27})$$

其中，在連續式操作中，速度分佈包含自由對流和壓力所引起的強制

對流，因此速度分佈可寫為：

$$V_e = V_{e,n} + V_{e,f} \quad (\text{A-28})$$

由對增濃段的質量平衡可得：

$$-\sigma_e = \int_0^W B \rho V_e dx \quad (\text{A-29})$$

無因次化後如下所示：

$$-\sigma_e = \int_0^1 BW\rho V_e d\eta \quad (\text{A-30})$$

將式(A-27)代入式(A-30)可得：

$$-\sigma_e = \int_0^1 \left\{ -\frac{BW^3\rho\beta_T g}{6\mu} [3(T_C - \bar{T})(\eta^2 - \eta) + \Delta T(\eta^3 - \eta)] + \frac{BW^3\rho\gamma}{2\mu} (\eta^2 - \eta)d\eta \right\} \quad (\text{A-31})$$

此處亦可將進料質量流率表示為

$$-\sigma_e = (-\sigma_{e,n}) + (-\sigma_{e,f}) \quad (\text{A-32})$$

由於系統只有在強制對流的影響下才会有續流效應產生，故當自然對流時，系統之質量流率為零，則

$$-\sigma_{e,n} = -\frac{BW^3\rho\beta_T g}{6\mu} \int_0^1 [3(T_C - \bar{T})(\eta^2 - \eta) + \Delta T(\eta^3 - \eta)] d\eta = 0 \quad (\text{A-33})$$

對式(A-33)積分並做整理可求得：

$$\bar{T} = T_C + \frac{1}{2}\Delta T \quad (\text{A-34})$$

在自然對流時，系統之淨流量為零，故式(A-31)可改寫為：

$$-\sigma_e = -\sigma_{e,f} = \frac{BW^3\rho\gamma}{2\mu} \int_0^1 (\eta^2 - \eta)d\eta \quad (\text{A-35})$$

對式(A-35)積分，整理後可得：

$$\gamma = \frac{12\mu\sigma_{e,f}}{BW^3\rho} \quad (\text{A-36})$$

將式(A-34)及式(A-36)代回式(A-27)重新整理可得到速度分佈為：

$$V_e = -\frac{\beta_T g W^2 \Delta T}{6\mu} [\eta(\eta-1)(\eta-\gamma_e)] \quad (\text{A-37})$$

其中

$$\gamma_e = 0.5 - \frac{36\mu(-\sigma_e)}{BW^3 \rho \beta_T g \Delta T} \quad (\text{A-38})$$

提取段：

同理，只要上面所前推導之公式，將式中腳碼'e'改寫成's'，即可以

利用，則

$$V_s = -\frac{\beta_T g W^2 \Delta T}{6\mu} [\eta(\eta-1)(\eta-\gamma_s)] \quad (\text{A-39})$$

其中

$$\gamma_s = 0.5 - \frac{36\mu\sigma_s}{BW^3 \rho \beta_T g \Delta T} \quad (\text{A-40})$$

附錄 B

正交性質證明

由式(2.2-38)

$$S_{e,m}F_{e,m}''(\eta) - \lambda_{e,m}U_e(\eta)S_{e,m}F_{e,m}(\eta) = 0 \quad (\text{B-1})$$

$$S_{e,n}F_{e,n}''(\eta) - \lambda_{e,n}U_e(\eta)S_{e,n}F_{e,n}(\eta) = 0 \quad (\text{B-2})$$

將式(B-1)× $S_{e,n}F_{e,n}$

$$S_{e,m}S_{e,n}F_{e,m}''F_{e,n} - \lambda_{e,m}U_eS_{e,m}S_{e,n}F_{e,m}F_{e,n} = 0 \quad (\text{B-3})$$

將式(B-2)× $S_{e,m}F_{e,m}$

$$S_{e,m}S_{e,n}F_{e,m}F_{e,n}'' - \lambda_{e,n}U_eS_{e,m}S_{e,n}F_{e,m}F_{e,n} = 0 \quad (\text{B-4})$$

將式(B-3)-式(B-4)，可得

$$\begin{aligned} S_{e,m}S_{e,n}[F_{e,m}''F_{e,n} - F_{e,m}F_{e,n}''] \\ + (\lambda_{e,n} - \lambda_{e,m})U_eS_{e,m}S_{e,n}F_{e,m}F_{e,n} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B-5})$$

將等式兩邊同時由 0 積分到 1 可得：

$$\begin{aligned} S_{e,m}S_{e,n} \int_0^1 [F_{e,m}''F_{e,n} - F_{e,m}F_{e,n}''] d\eta \\ + (\lambda_{e,n} - \lambda_{e,m}) \int_0^1 U_e S_{e,m} S_{e,n} F_{e,m} F_{e,n} d\eta = 0 \end{aligned} \quad (\text{B-6})$$

其中 $[F_{e,m}''F_{e,n} - F_{e,m}F_{e,n}''] = [F_{e,m}'F_{e,n} - F_{e,m}F_{e,n}']$

因此，可將式(B-6)改寫為

$$S_{e,m}S_{e,n} \int_0^1 [F'_{e,m}F_{e,n} - F_{e,m}F'_{e,n}] d\eta + (\lambda_{e,n} - \lambda_{e,m}) \int_0^1 U_e S_{e,m}S_{e,n} F_{e,m}F_{e,n} d\eta = 0 \quad (\text{B-7})$$

將式(B-7)積分可得

$$S_{e,m}S_{e,n} \{ [F'_{e,m}(1)F_{e,n}(1) - F_{e,m}(1)F'_{e,n}(1)] - [F'_{e,m}(0)F_{e,n}(0) - F_{e,m}(0)F'_{e,n}(0)] \} + (\lambda_{e,n} - \lambda_{e,m}) \int_0^1 U_e S_{e,m}S_{e,n} F_{e,m}F_{e,n} d\eta = 0 \quad (\text{B-8})$$

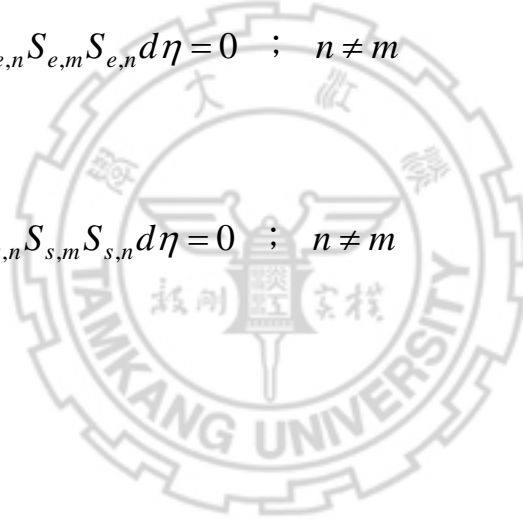
將邊界條件式(2.2-42)及式(2.2-43)代入式(B-8)又 $\lambda_{e,n} \neq \lambda_{e,m}$

故可得其正交性質為：

$$\int_0^1 U_e F_{e,m}F_{e,n} S_{e,m}S_{e,n} d\eta = 0 \quad ; \quad n \neq m \quad (\text{B-9})$$

同理

$$\int_0^1 U_s F_{s,m}F_{s,n} S_{s,m}S_{s,n} d\eta = 0 \quad ; \quad n \neq m \quad (\text{B-10})$$



附錄 C

特徵係數

對於增濃段而言：

$$S_{e,m} = \frac{C_B \int_0^1 U_e(\eta) F_{e,m}(\eta) d\eta - \int_0^1 Y(\eta) U_e(\eta) F_{e,m}(\eta) d\eta}{\int_0^1 U_e(\eta) F_{e,m}^2(\eta) d\eta} \quad (2.2-84)$$

其中，將特徵係數 $S_{e,m}$ 分為三部份

$$(1) C_B \int_0^1 U_e(\eta) F_{e,m}(\eta) d\eta$$

$$(2) \int_0^1 Y(\eta) U_e(\eta) F_{e,m}(\eta) d\eta$$

$$(3) \int_0^1 U_e(\eta) F_{e,m}^2(\eta) d\eta$$

其求解過程分別如下：

$$(1) \text{ 求 } \int_0^1 U_e(\eta) F_{e,m}(\eta) d\eta \quad (C-1)$$

由於 $\lambda_{e,m} \neq 0$ ，利用式(2.2-38)，可將式(2.2-38)改寫為

$$U_e(\eta) F_{e,m}(\eta) = \frac{1}{\lambda_{e,m}} F_{e,m}''(\eta) \quad (C-2)$$

將式(C-2)代入式(C-1)得：

$$\int_0^1 U_e(\eta) F_{e,m}(\eta) d\eta = \frac{1}{\lambda_{e,m}} \int_0^1 F_{e,m}''(\eta) d\eta \quad (C-3)$$

利用式(2.2-42)及式(2.2-43)之邊界條件便可求得：

$$\int_0^1 U_e(\eta) F_{e,m}(\eta) d\eta = 0 \quad (C-4)$$

$$(2) \text{ 求 } \int_0^1 Y(\eta)U_e(\eta)F_{e,m}(\eta)d\eta \quad (\text{C-5})$$

將式(C-2)代入式(C-5)得：

$$\int_0^1 Y(\eta)U_e(\eta)F_{e,m}(\eta)d\eta = \frac{1}{\lambda_{e,m}} \int_0^1 Y(\eta)F_{e,m}''(\eta)d\eta \quad (\text{C-6})$$

使用分部積分法

$$\int_0^1 Y(\eta)U_e(\eta)F_{e,m}(\eta)d\eta = \frac{1}{\lambda_{e,m}} \left\{ [Y(\eta)F_{e,m}'(\eta)] \Big|_0^1 - \int_0^1 Y'(\eta)F_{e,m}'(\eta)d\eta \right\} \quad (\text{C-7})$$

利用式(2.2-42)及式(2.2-43)之邊界條件便可求得：

$$\int_0^1 Y(\eta)U_e(\eta)F_{e,m}(\eta)d\eta = -\frac{1}{\lambda_{e,m}} \int_0^1 Y'(\eta)F_{e,m}'(\eta)d\eta \quad (\text{C-8})$$

將式(2.2-36)代入式(C-8)得：

$$\int_0^1 Y(\eta)U_e(\eta)F_{e,m}(\eta)d\eta = -\frac{1}{\lambda_{e,m}} \int_0^1 H(\eta)F_{e,m}'(\eta)d\eta \quad (\text{C-9})$$

$$(3) \text{ 求 } \int_0^1 U_e(\eta)F_{e,m}^2(\eta)d\eta \quad (\text{C-10})$$

由於 $\lambda_{e,m} \neq 0$ ，利用式(2.2-38)，將式(2.2-38)對 $\lambda_{e,m}$ 微分並整理得

$$U_e(\eta)F_{e,m}(\eta) = \frac{\partial F_{e,m}''(\eta)}{\partial \lambda_{e,m}} - \lambda_{e,m}U_e(\eta)\frac{\partial F_{e,m}(\eta)}{\partial \lambda_{e,m}} \quad (\text{C-11})$$

可改寫式(C-10)為

$$\int_0^1 U_e(\eta)F_{e,m}^2(\eta)d\eta = \int_0^1 F_{e,m}(\eta)U_e(\eta)F_{e,m}(\eta)d\eta \quad (\text{C-12})$$

將式(C-11)代入式(C-12)得：

$$\int_0^1 U_e(\eta) F_{e,m}^2(\eta) d\eta = \int_0^1 \left\{ F_{e,m}(\eta) \frac{\partial F_{e,m}''(\eta)}{\partial \lambda_{e,m}} - \lambda_{e,m} U_e(\eta) F_{e,m}(\eta) \frac{\partial F_{e,m}(\eta)}{\partial \lambda_{e,m}} \right\} d\eta \quad (\text{C-13})$$

又可將式(2.2-38)改寫為

$$\lambda_{e,m} U_e(\eta) F_{e,m}(\eta) = F_{e,m}''(\eta) \quad (\text{C-14})$$

將式(C-14)代入式(C-13)得：

$$\int_0^1 U_e(\eta) F_{e,m}^2(\eta) d\eta = \int_0^1 \left[F_{e,m}(\eta) \frac{\partial F_{e,m}''(\eta)}{\partial \lambda_{e,m}} - F_{e,m}''(\eta) \frac{\partial F_{e,m}(\eta)}{\partial \lambda_{e,m}} \right] d\eta \quad (\text{C-15})$$

其中

$$\left[F_{e,m}(\eta) \frac{\partial F_{e,m}''(\eta)}{\partial \lambda_{e,m}} - F_{e,m}''(\eta) \frac{\partial F_{e,m}(\eta)}{\partial \lambda_{e,m}} \right] = \left[F_{e,m}(\eta) \frac{\partial F_{e,m}'(\eta)}{\partial \lambda_{e,m}} - F_{e,m}'(\eta) \frac{\partial F_{e,m}(\eta)}{\partial \lambda_{e,m}} \right]' \quad (\text{C-16})$$

因此，可將式(C-15)改寫為

$$\int_0^1 U_e(\eta) F_{e,m}^2(\eta) d\eta = \int_0^1 \left[F_{e,m}(\eta) \frac{\partial F_{e,m}'(\eta)}{\partial \lambda_{e,m}} - F_{e,m}'(\eta) \frac{\partial F_{e,m}(\eta)}{\partial \lambda_{e,m}} \right]' d\eta \quad (\text{C-17})$$

將式(C-17)積分並利用式(2.2-42)及式(2.2-43)之邊界條件便可求得：

$$\int_0^1 U_e(\eta) F_{e,m}^2(\eta) d\eta = \left[F_{e,m}(1) \frac{\partial F_{e,m}'(1)}{\partial \lambda_{e,m}} - F_{e,m}'(0) \frac{\partial F_{e,m}(0)}{\partial \lambda_{e,m}} \right] \quad (\text{C-18})$$

將式(2.2-58)展開如下：

$$F_{e,m}'(\eta) = 1d_{m1e}\eta^0 + 2d_{m2e}\eta^1 + 3d_{m3e}\eta^2 + 4d_{m4e}\eta^3 + \dots \quad (\text{C-19})$$

將式(2.2-60)至式(2.2-65)等之待定係數代入式(C-19)並整理得：

$$F'_{e,m}(\eta) = \lambda_{e,m} a_0 \eta^1 + \frac{1}{2} \lambda_{e,m} a_1 \eta^2 + \left(\frac{1}{6} \lambda_{e,m}^2 a_0^2 + \frac{1}{3} \lambda_{e,m} a_2 \right) \eta^3 + \dots \quad (\text{C-20})$$

將式(C-20)對 $\lambda_{e,m}$ 微分

$$\frac{\partial F'_{e,m}(\eta)}{\partial \lambda_{e,m}} = a_0 \eta^1 + \frac{1}{2} a_1 \eta^2 + \left(\frac{1}{3} \lambda_{e,m} a_0^2 + \frac{1}{3} a_2 \right) \eta^3 + \dots \quad (\text{C-21})$$

由式(C-21)可分別求得

$$\frac{\partial F'_{e,m}(0)}{\partial \lambda_{e,m}} = 0 \quad (\text{C-22})$$

$$\frac{\partial F'_{e,m}(1)}{\partial \lambda_{e,m}} = a_0 + \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{3} \lambda_{e,m} a_0^2 + \frac{1}{3} a_2 + \dots \neq 0 \quad (\text{C-23})$$

將式(C-22)及式(C-23)代回式(C-18)則可得到

$$\int_0^1 U_e(\eta) F_{e,m}^2(\eta) d\eta = F_{e,m}(1) \frac{\partial F'_{e,m}(1)}{\partial \lambda_{e,m}} \quad (\text{C-24})$$

最後，將式(C-4)、式(C-9)及式(C-24)代回式(2.2-84)整理得：

$$S_{e,m} = \frac{\int_0^1 H(\eta) F'_{e,m}(\eta) d\eta}{\lambda_{e,m} F_{e,m}(1) \frac{\partial F'_{e,m}(1)}{\partial \lambda_{e,m}}} \quad (\text{C-25})$$

將式(2.2-30)代入式(C-25)整理得：

$$S_{e,m} = \frac{\alpha_{32}^{bin} C_e \hat{C}_e \Delta T \int_0^1 F'_{e,m}(\eta) d\eta}{\bar{T} \lambda_{e,m} F_{e,m}(1) \frac{\partial F'_{e,m}(1)}{\partial \lambda_{e,m}}} \quad (\text{C-26})$$

積分式(C-26)，並利用式(2.2-46)可整理得特徵係數 $S_{e,m}$ 為：

$$S_{e,m} = \frac{\alpha_{32}^{bin} C_e \hat{C}_e \Delta T [F_{e,m}(1) - 1]}{\bar{T} \lambda_{e,m} F_{e,m}(1) \frac{\partial F'_{e,m}(1)}{\partial \lambda_{e,m}}} \quad (C-27)$$

應用常數近似 $C\hat{C} = F$ ，則可簡化特徵係數 $S_{e,m}$ 為：

$$S_{e,m} = \frac{\alpha_{32}^{bin} F_e \Delta T [F_{e,m}(1) - 1]}{\bar{T} \lambda_{e,m} F_{e,m}(1) \frac{\partial F'_{e,m}(1)}{\partial \lambda_{e,m}}} \quad (C-28)$$

同理，對於提取段而言亦可得特徵係數 $S_{s,m}$ 為：

$$S_{s,m} = \frac{\int_0^1 H(\eta) F'_{s,m}(\eta) d\eta}{\lambda_{s,m} F_{s,m}(1) \frac{\partial F'_{s,m}(1)}{\partial \lambda_{s,m}}} \quad (C-29)$$

$$S_{s,m} = \frac{\alpha_{32}^{bin} C_s \hat{C}_s \Delta T [F_{s,m}(1) - 1]}{\bar{T} \lambda_{s,m} F_{s,m}(1) \frac{\partial F'_{s,m}(1)}{\partial \lambda_{s,m}}} \quad (C-30)$$

$$S_{s,m} = \frac{\alpha_{32}^{bin} F_s \Delta T [F_{s,m}(1) - 1]}{\bar{T} \lambda_{s,m} F_{s,m}(1) \frac{\partial F'_{s,m}(1)}{\partial \lambda_{s,m}}} \quad (C-31)$$