

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

黑洞物理的一些探討

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC92-2112-M-032-010-

執行期間：92年08月01日至93年07月31日

執行單位：淡江大學物理系

計畫主持人：曹慶堂

計畫參與人員：高志坤博士後

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 93 年 11 月 12 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

黑洞物理的一些探討

Some Studies in Black Hole Physics

計畫編號：NSC 92-2112-M-032-010

執行期限：92年8月1日至93年7月31日

主持人：曹慶堂 淡江大學物理系

一、中文摘要

我們利用 WKB 方法，來計算在擁有電磁荷，並球對稱的 Dyonical 黑洞時空中，帶電荷的純量場的 quasinormal 頻率。最主要的結果是關於此頻率，與黑洞電磁荷大小的關係。

關鍵詞： quasinormal 頻率、dyonic 黑洞、WKB 近似

Abstract

Using the WKB approximation, we calculate the quasinormal mode frequencies of a charged scalar field in the spacetime of a spherically symmetric dyonic black hole with both electric and magnetic charges. The main results concern the variations of the frequencies with the magnitude of the charges of the black hole.

Keywords: quasinormal mode、dyonic black hole、WKB approximation

二、緣由與目的

我們考慮帶電純量場的 Klein-Gordon 方程式

$$g^{\mu\nu}(\nabla - iqA_\mu)(\nabla - iqA_\nu)\Phi = 0 \quad (1)$$

對於球對稱的度規為

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2)$$

這裡我們將針對 Reissner-Nordström dyonic 黑洞

$$f(r) = (h(r))^{-1} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q_e^2 + Q_m^2}{r^2}, \quad (3)$$

其中 M 為黑洞的質量。 Q_e 和 Q_m 分別是黑

洞的電荷和磁荷。對於 dilaton 黑洞，取而向量位能 A_μ ，可以選

$$A_t = -\frac{Q_e}{r}, \quad (4)$$

為電場。對於位能空間部分所對應單極磁場，有 Dirac 弦的奇異性。將這奇異性藉由空間兩個重疊的區間來移除[1]，

$$R_a : 0 \leq \theta < \pi/2 + \delta, \text{ 和 } R_b : \pi/2 - \delta < \theta \leq \pi, \quad (5)$$

δ 是一個微小的值並且取

$$(A_\phi)_a = \frac{Q_m}{r \sin \theta} (1 - \cos \theta) \quad R_a$$

$$(A_\phi)_b = \frac{-Q_m}{r \sin \theta} (1 + \cos \theta) \quad R_b$$

A_μ 其他的分量為零。 $(A_\phi)_a$ 和 $(A_\phi)_b$ 在他們各自的領域上是正則的，而在重疊的部分可由規範變換來處理。

隨著 Christoffel 符號對應於方程式(2)和方程式(7)的球對稱時空，方程式(1)可以改寫成，

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{f} \left[\partial_t^2 \Phi + 2i \left(\frac{qQ_e}{r} \right) \partial_t \Phi - \frac{q^2 Q_e^2}{r^2} \Phi \right] + \frac{1}{h} \left[\partial_r^2 \Phi \right. \\ & + \left(\frac{f'}{2f} - \frac{h'}{2h} + \frac{2}{r} \right) \partial_r \Phi \left. \right] + \frac{1}{r^2} \left[\partial_\theta^2 \Phi + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_\theta \Phi \right. \\ & + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \Phi - 2iq \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \right) A_\phi \partial_\phi \Phi \\ & \left. - q^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \right) A_\phi^2 \Phi \right] = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

注意在這方程式的 Φ 分別代表 Φ_a 和 Φ_b ，波函數的截面，相對於 $(A_\mu)_a$ 和 $(A_\mu)_b$ 。接著給出角動量運算子和這方程式角動量的關係。伴著磁單極的出現，系統的角動量須改為

$$\underline{L} = \underline{p} \times (\underline{p} - q\mathbf{A}) - qQ_m \frac{\underline{r}}{r}, \quad (7)$$

滿足

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k, \quad (8)$$

其中 $i = 1, 2, 3$ ，然後

$$\begin{aligned} \underline{L}^2 = & -\partial_\theta^2 - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \partial_\theta - \frac{1}{\sin^2\theta} \partial_\phi^2 \\ & + 2iq \left(\frac{1}{\sin^2\theta} \right) A_\phi \partial_\phi + q^2 \left(\frac{1}{\sin^2\theta} \right) A_\phi^2 \\ & + q^2 Q_m^2. \end{aligned} \quad (9)$$

在方程式(6)中，由此項來取代，得到

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{f} \left[\partial_t^2 \Phi + 2i \left(\frac{qQ_e}{r} \right) \partial_t \Phi - \frac{q^2 Q_e^2}{r^2} \Phi \right] + \frac{1}{h} \left[\partial_r^2 \Phi \right. \\ & \left. + \left(\frac{f'}{2f} - \frac{h'}{2h} + \frac{2}{r} \right) \partial_r \Phi \right] - \frac{1}{r^2} \underline{L}^2 \Phi + \frac{q^2 Q_m^2}{r^2} \Phi = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

這方程式是可以再簡化，如果我們用單極簡諧 $Y_{Q_m, l, m}$ [2]，角動量運算子 \underline{L}^2 和 L_z 的本徵截面，來表示

$$\underline{L}^2 Y_{Q_m, l, m} = l(l+1) Y_{Q_m, l, m}, \quad (11)$$

$$L_z Y_{Q_m, l, m} = m Y_{Q_m, l, m}, \quad (12)$$

其中 $l = |Q_m|, |Q_m| + 1, \Lambda$ 和 $m = -l, -l + 1, \Lambda, l$ ，而 $Y_{Q_m, l, m}$ 在 R_a 和 R_b 區間中包含 Jacobi 多項式，當 $Q_m \rightarrow 0$ 時，會簡化成一般的球型簡諧。然而我們不需要考慮 $Y_{Q_m, l, m}$ 的形式。

利用單極簡諧，波函數可以寫作

$$\Phi(t, \underline{r}) = \frac{\psi(r)}{r} Y_{Q_m, l, m}(\theta, \phi) e^{iEt}. \quad (13)$$

注意 $\psi(r)$ 在 R_a 和 R_b 的區域是一樣的。對於這樣的波函數，可以得到 ψ 的基本方程式

$$\begin{aligned} & \left(\frac{f}{h} \right) \frac{d^2 \psi}{dr^2} + \left(\frac{f'}{2h} - \frac{fh'}{2h^2} \right) \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{\psi}{r} \right) + E^2 \psi \\ & - \frac{l(l+1)}{r^2} f \psi + \frac{q^2 (Q_e^2 + Q_m^2 f)}{r^2} \psi - 2E \left(\frac{qQ_e}{r} \right) \psi \\ & = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

對於這球對稱的度規定義一個 tortoise 作標

$$\frac{d}{dr_*} = \left(\frac{f}{h} \right)^{1/2} \frac{d}{dr}, \quad (15)$$

可以簡化基本方程式為[3]

$$-\frac{d}{dr_*^2} \psi + V \psi = E^2 \psi \quad (16)$$

其中有效位能

$$\begin{aligned} V = & f \left[\frac{1}{f(fh)^{1/2}} \frac{d}{dr} \left(\frac{f}{h} \right)^{1/2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{(qQ_m)^2}{r^2} \right] \\ & + 2E \left(\frac{qQ_e}{r} \right) - \frac{(qQ_e)^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

三、結果和討論

接著在多種 dyonic 黑洞時空下，針對有荷和沒有荷的純量場下，我們將利用這基本方程式來找 quasinormal mode 頻率。首先，我們用 WKB 近似來求 Reissner-Nordsröm 黑洞時空下的情形。考慮方程式(20)在沒有電荷下，可以簡化為

$$V(r) = \left(1 - \frac{2}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \left[\frac{2}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right], \quad (18)$$

其中

$$Q^2 = Q_e^2 + Q_m^2. \quad (19)$$

我們視黑洞的質量 M 為一個單位來減少符號，黑洞的荷 Q 限定於 $0 \leq Q \leq 1$ 。當 $Q = 1$ 是一極端的狀況，在地平線的外面區域和裡面區域會合。

我們採用的 WKB 近似是由 Schutz, Will 和 Iyer 發展出來的。這套分析方法已經擴展到不同黑洞的情形下，和其他數值計算的結果在頻率的實部和虛部比較，發現在 low-lying 模式， $n < l$ 其中 n 是模式數目，可以準確到 1%。求複數 quasi-normal 模式頻率 E ，WKB 近似可以求到第三階，超越 eikonal 近似[4,5]

$$\begin{aligned} E^2 = & \left[V_0 + (-2V_0'')^{1/2} \Lambda \right] \\ & - i \left(n + \frac{1}{2} \right) (-2V_0'')^{1/2} (1 + \Omega) \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$\Lambda = \frac{1}{(-2V_0'')^{1/2}} \left\{ \frac{1}{8} \left(\frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right) \left(\frac{1}{4} + \alpha^2 \right) - \frac{1}{288} \left(\frac{V_0'''}{V_0''} \right)^2 (7 + 60\alpha^2) \right\} \quad (21)$$

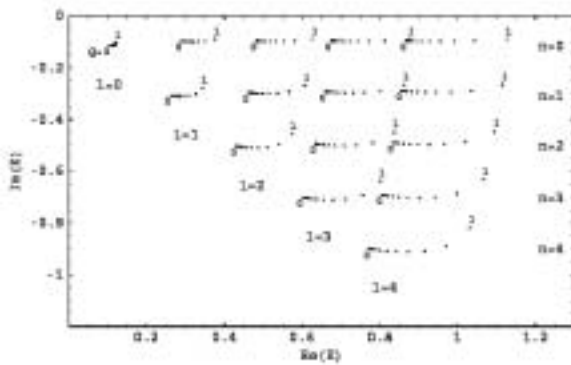
$$\begin{aligned} \Omega = \frac{1}{(-2V_0'')^{1/2}} & \left\{ \frac{5}{6912} \left(\frac{V_0'''}{V_0''} \right)^4 (77 + 188\alpha^2) - \frac{1}{384} \left(\frac{V_0'''}{V_0''} \right)^2 \left(\frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right) (51 + 100\alpha^2) \right. \\ & + \frac{1}{2304} \left(\frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right)^2 (67 + 68\alpha^2) \\ & + \frac{1}{288} \left(\frac{V_0'' V_0^{(5)}}{V_0''^2} \right) (19 + 28\alpha^2) \\ & \left. - \frac{1}{288} \left(\frac{V_0^{(6)}}{V_0''} \right) (5 + 4\alpha^2) \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

這裡

$$\alpha = n + \frac{1}{2}, n = \begin{cases} 0, 1, 2, \Lambda, & \text{Re}(E) > 0 \\ -1, -2, -3, \Lambda, & \text{Re}(E) < 0 \end{cases} \quad (23)$$

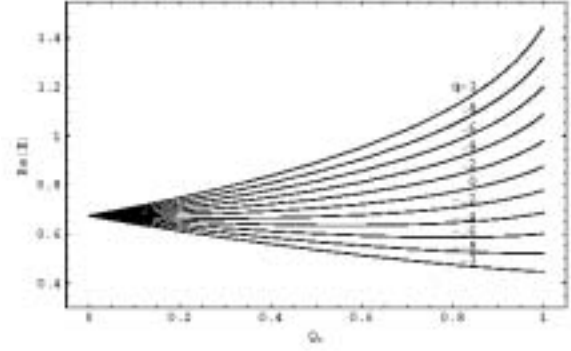
$$V_0^{(n)} = \left. \frac{d^n V}{dr_*^n} \right|_{r_* = r_* (r_{\max})} \quad (24)$$

沒有帶電的純量場的結果，可見圖一：

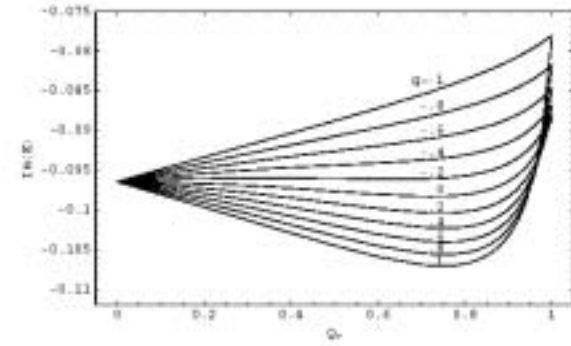


圖一：在 Dyonic Reissner-Nordström 黑洞下，未帶荷純量場的 quasinormal 模式頻率。

對於帶電的純量場，在有電荷的 RN 黑洞，結果可見圖二和三：

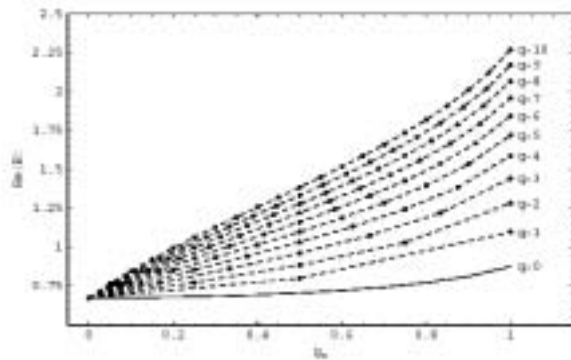


圖二：當 $l=3$ 和 $n=0$ 時，帶電荷的 Reissner-Nordström 黑洞的純量場 quasinormal 模式頻率的實部。

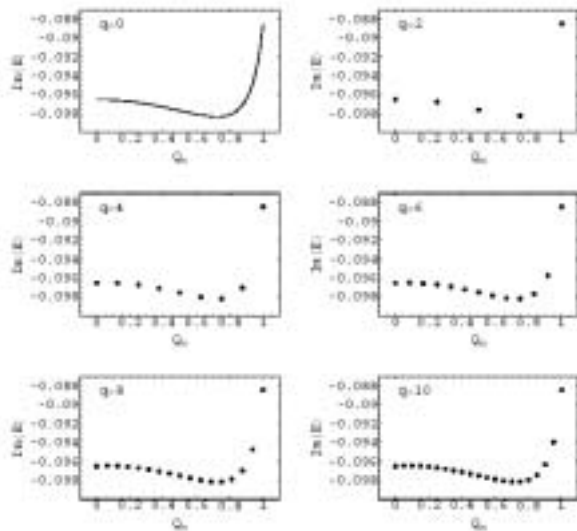


圖三：當 $l=3$ 和 $n=0$ 時，帶電荷的 Reissner-Nordström 黑洞的純量場 quasinormal 模式頻率的虛部。

對於帶有磁荷的 RN 黑洞，結果在圖四和五：



圖四：當 $l=3$ 和 $n=0$ 時，帶磁荷的 Reissner-Nordström 黑洞的純量場 quasinormal 模式頻率的實部。



圖五：當 $l=3$ 和 $n=0$ 時，帶磁荷的 Reissner-Nordström 黑洞的純量場 quasinormal 模式頻率的虛部。

四、計劃成果自評

利用 WKB 的方法，我們計算出在不同的球對稱 Dyonc 黑洞，帶電純量場的 quasinormal 頻率。然後，我們分析此頻率的實部和虛部，與各電荷和磁荷大小的關係。接下來我們希望能進一步探討，其他黑洞和量子場的情況，以加深對黑洞 quasinormal 頻率的了解。

五、參考文獻

- [1] T. T. Wu and C. N. Yang, **Phys. Rev. D.** 12 (1975) 3845
- [2] T. T. Wu and C. N. Yang, **Nucl. Phys.** B107 (1976) 365.
- [3] S. Chandrasekhar, **The Mathematical Theory of black Holes** (Clarendon Press, 1983).
- [4] B. F. Schutz and C. M. Will, **Astrophys. J. Lett.** 291 (1985) L33.
- [5] S. Iyer and C. M. Will, **Phys. Rev.** D35 (1987) 3621.