行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

重力理論的一些研究

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC91-2112-M-032-011-
執行期間：91 年 08 月 01 日至 92 年 07 月 31 日
執行單位：淡江大學物理系

計畫主持人：曹慶堂

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 92 年 12 月 9 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

重力理論的一些研究
Some Research in Gravity Theory

計畫編號：NSC 91-2112-M-032-011
執行期限：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日
主持人：曹慶堂　　淡江大學物理系

一、中文摘要

我們分析 Dirac 場在 Schwarzschild 黑洞時空下的縱向方程式。用 WKB 方法對於 $E^2 >> V_m$, $E^2 \approx V_m$, 和 $E^2 << V_m$,求各種不同縱向波函數的穿透率 T 的近似公式,其中 E 為場的能量和 V_m 為有效位能的最大值，並列出 T 在不同的 E 值,質量 m 和場的轉動動量參數 κ 的結果。

關鍵詞：穿透率、Schwarzschild 黑洞、WKB 近似

Abstract

We analysis the radial equations for massive Dirac fields in Schwarzschild black hole spacetimes. Different approximation formulae under the WKB scheme are developed for the transmission probability T of the radial wavefunction with $E^2 >> V_m$, $E^2 \approx V_m$, and $E^2 << V_m$, where E is the energy of the field and V_m is the maximum value of the effective potential. Explicit results of T in these approximations are given for various values of E, the mass m, and the angular momentum parameter κ of the fields.

Keywords: transmission probability、Schwarzschild black hole、WKB approximation

二、緣由與目的

其中一個最有用和有效來研究黑洞性質的方法就是藉由從黑洞散射物質波[1]。從較實際的觀點，波在黑洞時空的研究正是要了解未來新一代重力波偵測器將要量到的信號[2]。自從黑洞的線性微擾可以用整數的自旋場來表示,波場的散射研究就集中在這些情形，使得 Dirac 場的研究就比較少,尤其對於有質量的時候[1,3]。近來，Finster 和其合作者[4]很詳盡的探討 Dirac 場在不同黑洞時空的演變，重新開始對於有質量 Dirac 場的興趣。這裡，我們將考慮在球對稱下的 Schwarzschild 黑洞時空，有質量的 Dirac 場的縱向方程式的散射解。

分析不同黑洞散射的波方程式有數值和解析兩種方法[1]。這裡的工作，我們是用半解析的 WKB 近似[5,6]，這種方法在很多情形已經被證明是非常有用且準確的，例如在求準正常態的頻率[7,8]。我們這裡考慮的縱向 Dirac 場，其中當質量 m 或轉動動量參數 κ 變化時，有效的位能也會從一個 barrier 形式轉變到 step 形式等。WKB 方法對於不同的能量 E 都可以適用，不論 E 高於或低於位能最大值 V_m。

三、結果和討論

在 Schwarzschild 時空中，

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{\Delta}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{1}$$

其中 $\Delta = r(r-2M)$ 並且 M 是黑洞的質量。Dirac 方程式的縱向方程式[9,10]可以寫成

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_1\right)\hat{F} = E^2\hat{F}, \tag{2}$$

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_2\right)\hat{G} = E^2\hat{G}, \tag{3}$$

其中

$$V_{1,2} = \pm\frac{dW}{dx} + W^2, \tag{4}$$

$$W = \frac{\Delta^{1/2}\left(\kappa^2 + m^2 r^2\right)^{3/2}}{r^2\left(\kappa^2 + m^2 r^2\right) + m\kappa\Delta / 2E}, \tag{5}$$

而

$$x = r + 2M\ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) + \frac{1}{2E}\tan^{-1}\left(\frac{mr}{\kappa}\right). \tag{6}$$

這裡我們結合(+)和(-)兩種情況，而 κ 可以是任何正整數和負整數。

把縱向方程式看成一般的一維量子力學的問題，

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V\right)\psi = E^2\psi, \tag{7}$$

位能的漸進值為

$$V(x \to \infty) = m^2 \quad V(x \to -\infty) = 0. \tag{8}$$

假設入射波從右進入 $(x = \infty)$，對於 ψ 的邊界條件是

$$\psi(x \to \infty) = e^{-i\sqrt{E^2 - m^2}x} + \mathrm{R}e^{-i\sqrt{E^2 - m^2}x} \tag{9}$$

$$\psi(x \to -\infty) = \mathrm{T}e^{-iEx}, \tag{10}$$

其中 R 和 T 分別代表反射和穿射係數。

對於一般的位能，方程式(7)的正確解很難去找到，我們必須去求助於其他的近似方法。這裡，我們採用 WKB 近似來計算，這個方法已經被證明十分有用，並且有時比期望的還精確。我們試著去發展對於穿透率的近似表示為

$$T = \sqrt{\frac{E^2}{E^2 - m^2}}\left|\mathrm{T}\right|^2, \tag{11}$$

對於所有的能量 E 的範圍，包括這些情況 $E^2 >> V_m$，$E^2 \approx V_m$，和 $E^2 << V_m$，其中 V_m 為位能最大值。位能在 barrier 情況下，V_m 為 V 的峰值，而在 step 情況下，$V_m = m^2$。

(A) 當 $E^2 >> V_m$，我們可以得到 WKB 近似

$$T = 1 - \left|\int_{-\infty}^{\infty} dx'\left(\frac{p''(x')}{4p(x')^2} - \frac{3(p'(x'))^2}{8p(x')^3}\right) e^{-2i\int_{x_0}^{x'} dx'' p(x'')}\right|^2 \tag{12}$$

(B) 當 $E^2 \approx V_m$，

$$T = \frac{1}{1 + e^{\pi(V_m - E^2)/\sqrt{\lambda}}} \tag{13}$$

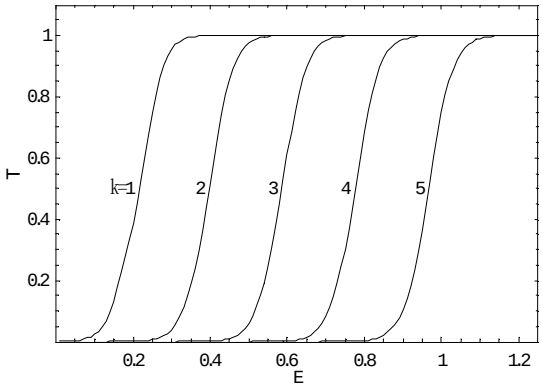
(C) 當 $E^2 << V_m$

$$T = e^{-2\int_{x_2}^{x_1} dx'\sqrt{V(x') - E^2}} \tag{14}$$

在沒有質量的情況，

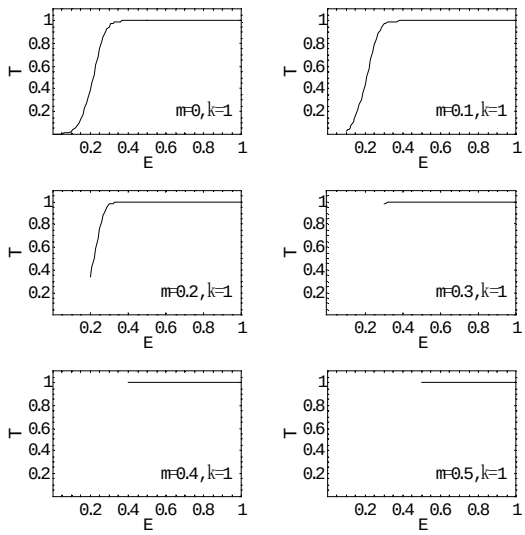
$$V(r,\kappa) = \frac{|\kappa|\Delta^{1/2}}{r^4}\left[|\kappa|\Delta^{1/2} - (r-3)\right] \tag{15}$$

利用方程式(12)，(13)和(14)，我們可以得到圖(1)的結果。



圖(1)

有質量的情況則比較複雜的，因為位能可以隨著參數 m 和 κ 變化，而從 barrier 形式變化到 step 形式。當 $\kappa = 1$ 且 $m = 0,\ 0.1$ 和 0.2，位能形式是 barrier，我們可以用如同在沒有質量的情況下，相關的近似來解不同能量 E 的情形，結果為圖(2)所示。對於 $m = 0.3,\ 0.4$



圖(2)

和 0.5，位能形式是 step。而唯一的近似的

方式是 $E >> m$，這結果也畫在圖(2)。對於這些 step 位能，所求得的穿透率和古典的結果是一致的，都幾近於 1。

四、計劃成果自評

在計算縱向波函數的穿透率後，可以求出不同的散射情況所對應的相移和截面[1]。在半古典的極限下，我們也可以探討一些有趣的現象，譬如，黑洞 glories[11]，還有藉由半古典反射函數[12]來求 orbiting 和 spiraling 散射[13]。我們希望能進一步探討這些情況。

五、參考文獻

[1] J. A. Futterman, F. A. Handler, and R. A. Matzner, **Scattering from Black Holes** (Cambridge University Press, 1988)

[2] J. Hough and S. Rowen, **Living Rev. Relativity 3** (2000) 3.

[3] W. G. Unruh, **Phys. Rev. D. 14** (1976) 3251.

[4] F. Finster, J. Smoller and S. T. Yan, **J. Math. Phys. 41** (2000) 3943.

[5] M. V. Berry nad K. E. Mount, **Rept. Prog. Phys. 35** (1972) 315.

[6] C. M. Bender and S. A. Orsazg, **Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers** (McGraw Hill, 1978)

[7] B. F. Schutz and C. M. Will, **Astrophys. J. Lett. 291** (1985) L33.

[8] S. Iyer and C. M. Will, **Phys. Rev. D35** (1987) 3621.

[9] H. T. Cho, **Phys. Rev. D. 68** (2003) 024003.

[10] S. Chandrasekhar, **The Mathematical Theory of black Holes** (Clarendon Press, 1983)

[11] R. A. Matzner, C. Dewitt-Morette, B. L. Nelson, and T.-R. Zhang, **Phys. Rev. D. 31** (1985) 1869.

[12] K. W. Ford and J. A. Wheeler, **Ann. Phys. 7** (1959) 259.

[13] P. Anninos, C. Dewitt-Morette, P. Yioutas, and T. R. Zhang, **Phys. Rev. D. 46** (1992) 4477.