行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

重力理論的一些探討
Some Studies in Gravity Theory

計畫編號：NSC 90-2112-M-032-004
執行期限：90 年 8 月 1 日至 91 年 7 月 31 日
主持人：曹慶堂　　淡江大學物理系

一、中文摘要

我們利用 WKB 的方法來計算質量為零的 Dirac 場，在 Schwarzschild 空間中準正常態的頻率。發現代表一個態衰變快慢的頻率虛數部分，在角動量量子數κ固定的情形下，會隨態量子數 n 增加而增加。

準正常態，Schwarzschild 黑洞，WKB 近似

關鍵詞：準正常態、Schwarzschild 黑洞、WKB 近似

Abstract

We evaluate the quasi-normal mode frequencies of the massless Dirac field in the Schwarzschild black hole spacetime using the WKB method. We find that the imaginary parts of the frequencies, which represent the rate of decay of the corresponding modes, increase with the mode number n for fixed angular momentum number ê.

Keywords: Quasi-normal mode、Schwarzschild black hole、WKB approximation

二、緣由與目的

對於探討自旋粒子的量子效應，最簡單應該是考慮粒子力學，在這裡我們處理在 Schwarzschild 黑洞的 Dirac 方程式[1]。有趣的是最近 Finster，Smoller 和 Yau 對黑洞時空的 Dirac 波函數作了一系列研究[2]，並發現 Dirac 方程式沒有束縛態[3]，跟一般原子不一樣，也跟古典的自旋粒子運動沒有對應。

由於 Dirac 方程式在 Schwarzschild 黑洞空間沒有束縛態，一個初始的波函數一定會衰變，一部份會掉進黑洞的 event horizon，而其他部分會跑到無限遠。要了解這個衰變的過程，我們會探討所謂準正常態[4]的現象。而準正常態的計算則利用 WKB 近似[5]來處理。

三、結果和討論

考慮在一般時空背景下的 Dirac 方程式

$$[\gamma^a e_a^\mu(\partial_\mu+\Gamma_\mu)]\psi=0$$

其中度規 $g_{\mu\nu}$ 定義出 e_a^μ

$$g_{\mu\nu}=\eta_{ab}e_\mu^a e_\nu^b$$

$\eta_{ab}=diag(-1,1,1,1)$ 是 Minkowski 度規，γ^a 是 Dirac 矩陣

$$\gamma^0=\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix},\quad \gamma^i=\begin{pmatrix} 0 & i\sigma^i\\ -i\sigma^i & 0\end{pmatrix},\quad i=1,2,3,$$

σ^i 是 Pauli 矩陣，Γ_μ 為自旋連結

$$\Gamma_\mu=\frac{1}{8}\left[\gamma^a,\gamma^b\right]e_a^\nu e_{b\nu;\mu}$$

$e_{b\nu;\mu}=\partial_\mu e_{b\nu}-\Gamma^\lambda_{\mu\nu}e_{b\lambda}$ 是 $e_{b\nu}$ 的 covariant derivative，$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 是 Christoffel 符號

在 Schwarzschild 時空中，

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

M 是黑洞的質量。這裡把四重軸寫為

$$e_\mu^a=diag\left(\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2},\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2},r,r\sin\theta\right)$$

則自旋連結可寫成

$$\gamma^a e_a^\mu \Gamma_\mu = \gamma^1\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{r}+\frac{M}{2r(r-2M)}\right) + \gamma^1\left(\frac{1}{2r}\right)\cot\theta$$

然後 Dirac 方程式變成[1]

$$\left[\begin{array}{l}\gamma^0\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial t}+\\ \gamma^1\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}+\frac{M}{2r(r-2M)}\right)\\ +\gamma^2\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\cot\theta\right)\\ +\gamma^3\left(\frac{1}{r\sin\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\phi}\end{array}\right]\Psi=0$$

因為這是一個球對稱的問題，Dirac 方程式可以簡化成

$$\left(-\frac{d^2}{dr_*^2}+V_1\right)\hat{F}=E^2\hat{F}$$

$$\left(-\frac{d}{dr_*^2}+V_2\right)\hat{G}=E^2\hat{G}$$

其中 $r_* = r+2\ln(r/2-1)$ 和

$$V_{1,2}=\pm\frac{dW}{dr_*}+W^2$$

並且

$$W=\frac{\Delta^{1/2}\kappa}{r^2}$$

令 $\Delta = r(r-2)$，其中我們取 M=1，κ 包括所有的正整數和負整數，對於正整數項

$\kappa = j+\frac{1}{2}$ 和 $j = l+\frac{1}{2}$

而對於負整數項

$\kappa = -\left(j+\frac{1}{2}\right)$ 和 $j = l-\frac{1}{2}$

我們使用 WKB 近似來計算無質量的 Dirac 場的 quasi-normal 頻率。Radial 方程式為

$$\left(-\frac{d^2}{dr_*^2}+V((\kappa,r)\right)\hat{F}=E^2\hat{F}$$

其中

$$V(\kappa,r)=\frac{\kappa\Delta^{1/2}}{r^4}\left[\kappa\Delta^{1/2}-(r-3)\right]$$

此時，E 的 WKB 形式為[6]

$$E^2=\left[V_0+(-2V_0'')^{1/2}\Lambda\right]-i\left(n+\frac{1}{2}\right)(-2V_0'')^{1/2}(1+\Omega)$$

$$\Lambda=\frac{1}{(-2V_0'')^{1/2}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{8}\left(\frac{V_0^{(4)}}{V_0''}\right)\left(\frac{1}{4}+\alpha^2\right)-\\ \frac{1}{288}\left(\frac{V_0'''}{V_0''}\right)^2\left(7+60\alpha^2\right)\end{array}\right\}$$

$$\Omega=\frac{1}{(-2V_0'')}\left\{\begin{array}{l}\frac{5}{6912}\left(\frac{V_0'''}{V_0''}\right)^4\left(77+188\alpha^2\right)-\\ \frac{1}{384}\left(\frac{V_0'''^2V_0^{(4)}}{V_0''^3}\right)\left(51+100\alpha^2\right)+\\ \frac{1}{2304}\left(\frac{V_0^{(4)}}{V_0''}\right)^2\left(67+68\alpha^2\right)+\\ \frac{1}{288}\left(\frac{V_0'''V_0^{(5)}}{V_0''^2}\right)\left(19+28\alpha^2\right)-\\ \frac{1}{288}\left(\frac{V_0^{(6)}}{V_0''}\right)\left(5+4\alpha^2\right)\end{array}\right\}$$

其中

$$\alpha = n+\frac{1}{2},\quad n=\begin{cases}0,1,2,\cdots,\mathrm{Re}(E)>0\\ -1,-2,-3,\cdots\mathrm{Re}(E)<0\end{cases}$$

$$V_0^{(n)}=\left.\frac{d^nV(\kappa,r)}{dr_*^n}\right|_{r_*=r_*(r_{\max})}$$

結果列在表 I 中。

表 I:無質量 Dirac quasi-normal 模式的頻率

$\lvert\kappa\rvert$	n	E(正 κ)	E(負 κ)
1	0	0.176-0.100i	0.182-0097i
2	0	0.379-0.097i	0.380-0.096i
	1	0.345-0.299i	0.356-0.297i
3	0	0.574-0.096i	0.574-0.096i
	1	0.556-0.293i	0.557-0.293i
	2	0.527-0.497i	0.731-0.490i
4	0	0.767-0.096i	0.767-0.096i
	1	0.754-0.291i	0.754-0.291i
	2	0.730-0.491i	0.529-0.496i
	3	0.700-0.696i	0.701-0.695i
5	0	0.960-0.960i	0.960-0.096i

1	0.950-0.290i	0.950-0.290i
2	0.930-0.488i	0.930-0.487i
3	0.904-0.689i	0.904-0.689i
4	0.872-0.894i	0.873-0.894i

我們發現在角動量量子數 κ 固定的情形下，頻率虛數部分會隨態量子數 n 增加而增加，也即代表 n 越大的態，衰變的速度越快，所以 n 小的態對於描述 Dirac 場後期的發展最為重要。

四、計劃成果自評

這裏我們使用 WKB 近似的方法，來計算質量為零的 Dirac 場，在 Schwarzschild 黑洞時空的準正常態頻率，並藉此了解 Dirac 場的演變。這方面的工作可以延伸到有質量的 Dirac 場，或是到其他的黑洞時空，如帶有電荷的 Reissner-Nordstrom 空間和帶有自旋的 Kerr 空間。

五、參考文獻

[1] D. R. Brill and J. A. Wheeler, ***Rev. Mod. Phys.*** **29** (1957) 465.

[2] F. Finster, J. Smoller and S. T. Yan, J***. Math. Phys.*** **41** (2000) 3943.

[3] F. Finster, J. Smoller and S. T. Yan, J***. Math. Phys.*** **41** (2000) 2173.

[4] K. D. Kokkotas and B. G. Shmidt, ***Living Rev. Rel.*** **2** (1999) 2.

[5] B. F. Schutz and C. M. Will, ***Astrophys. J. Lett.*** **291** (1985) 233.

[6] S. Iyer and C. M. Will, **Phys. Rev. D35** (1987) 3621.