行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告

台灣地區最小變異數避險比率與最小 LPM 避險比率之比較

計劃類別：☑個別型計劃　　　□整合型計劃

計劃編號：NSC 90-2416-H-032-003

執行期間：90 年 8 月 1 日起至 91 年 7 月 31 日

計劃主持人：　邱　忠　榮

處理方式：☑可立即對外提供參考

□一年後可對外提供參考

□兩年後可對外提供參考

(必要時，本會得展延發表時限)

執行單位：私立淡江大學金融研究所

中華民國九十一年七月三十一日

台灣地區最小變異數避險比率與最小 LPM 避險比率之比較

I. 前言

自 1970 年代浮動匯率開始採行，而利率管制亦逐漸放寬之後，金融市場變得更加複雜、金融資產價格的波動性提高，爲了歸避價格的不利波動，投資者對風險管理的需求日益殷切，財金學者對期貨避險比率的研究也蔚爲風潮。

期貨避險的主要目的是利用期貨與標的現貨資產價格之間的相關性降低損失風險，而損失風險是期貨避險理論的基石。Roy (1952)與 Markowitz (1952, 1959)奠定了損失風險的基礎，其後歷經 Quirk and Saposnik (1962)、Mao (1970)…等多位學者致力於推展損失風險的概念，Bawa (1975)提出一個一般化的損失風險衡量方法－LPM (lower partial moment)，LPM 不但對報酬率分配、投資者的風險態度、目標報酬率不作任何特定假設，且 Bawa (1975)與 Fishburn (1977)並證實其與隨機優勢之間有對等關係。

變異數或半變異數(semi-variance)與 LPM 均可爲損失風險的衡量方法，並可應用於期貨避險理論上，但兩者假設之限制條件顯然不同。最小變異數避險比率中假設報酬率分配爲常態或效用函數爲二次式，且目標報酬率爲避險投資組合的預期報酬率；由理論觀之，此一假設過於嚴苛，致使變異數是否可有效衡量損失風險，進而最小變異數避險比率又是否可以有效降低損失風險便成爲一大考驗。相對地，最小 LPM 避險比率無論對報酬率分配、投資者的風險態度、或目標報酬率均不作特定假設，故其較最小變異數避險比率相對一般化。

最小 LPM 避險比率雖具有一般化的優點，但執行上卻有其困難之處，而最小變異數避險比率雖然假設過於嚴格，但卻容易執行；在各有優缺點的情況下，投資者僅能由實證上去瞭解兩者避險的效率(hedge effectiveness)。本文主旨即爲利用歷史資料法與蒙地卡羅模擬法(Monte Carlo simulation)的技巧建構出台股指數現貨與期貨的報酬率分配，進而求出最小 LPM 避險比率(minimum LPM hedge ratio)的數值解，以與最小變異數避險比率進行比較，以爲投資者參考。

II. 研究方法

A. 最小變異數避險比率

本文設定最小變異數避險比率等於現貨與期貨報酬率的共變異數(covariance)除以期貨報酬率的變異數，如下：

$$h = \frac{\sigma_{sf}}{\sigma_f^2}$$

在計量方法上，最簡易的處理方法爲求解現貨與期貨報酬率的 OLS 迴歸係數，如下：

$$\Delta s_t = \alpha + \beta_{OLS} \cdot \Delta f_t + \varepsilon_t$$

其中，$\Delta s_t = s_t - s_{t-1}$，$\Delta f_t = f_t - f_{t-1}$，$s_t$ 與 f_t 分別表示現貨與期貨在時點 t 價格的自然對數；β_{OLS} 爲 OLS 避險比率；ε_t 則爲誤差項。

B. 最小 LPM 避險比率

LPM 最早由 Bawa (1975)與 Fishburn (1977)提出，其函數型態如下：

$$LPM_{\alpha,\tau} = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - r)^{\alpha} f(r)dr$$

其中，α 表示動差，爲一風險參數，代表投資者的風險容忍度，α 小於、等於、大於 1 分別代表風險愛好者、中立者與趨避者；τ 與 r 分別表示目標報酬率與報酬率的觀察值；f(r)則爲報酬率的機率密度函數。對風險趨避者而言，LPM 所衡量的是損失風險的變異性，而當報酬率分配非對稱時，區分損失風險與上漲潛力(upside potential)的變異性格外重要，因爲投資者或風險管理者真正想要歸避的是損失風險的變異性，而非上漲潛力。

LPM 不但放寬投資者的風險態度，而且不對報酬分配作任何假設，也不限定投資者的最小報酬水準，但也因爲其一般化，使其難以公式化，惟有仰賴電腦運算求解數值解。所謂數值解是指將不同避險比率代入現貨與期貨報酬率分配後求得整個避險投資組合的報酬率分配，並找出其對應的 LPM，則 LPM 最小的避險投資組合所對應的避險比率即爲所求。其中關鍵爲未來避險期

間內現貨與期貨的報酬率分配型態爲何？本文將分別採用歷史資料法與蒙地卡羅模擬法兩種方法建構出現貨與期貨的報酬率分配。

歷史資料法假設過去的報酬率會在未來避險期間重現，則可直接利用過去資料建構出未來報酬率的機率分配，例如：Eftekhari (1998)即以過去一年的指數現貨與期貨週報酬建構出未來不同避險期間與避險比率下的避險投資組合報酬分配；本文採同法建構出避險期間內避險投資組合的報酬分配，惟資料基礎包含日資料與週資料，並設定歷史資料的樣本期間與避險期間爲 1 年，避險比率區間由-1.2 至 1.2，最小變動幅度爲 0.01。

蒙地卡羅模擬法的技巧是將時間作極小的分割，然後以微量的時間變動爲基礎逐一向目標時間模擬出標的資產價格，並重覆以上步驟多次，則可建構出資產報酬率(價格)分配，由此可知當時間切割愈細時，模擬愈耗時耗力。本文採用幾何布朗運動(Geometric Brownian motion)模擬資產價格路徑，著名的 Black-Scholes 選擇權訂價公式亦假設資產價格行徑服從此一運動，其過程如下：

$$\Delta S_{t+1} = \mu_S S_t \Delta t + \sigma_S S_t \varepsilon_{St} \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta F_{t+1} = \mu_F F_t \Delta t + \sigma_F F_t \varepsilon_{Ft} \sqrt{\Delta t}$$

其中，S_t 與 F_t 分別表示指數現貨與期貨在時點 t 的價格，μ_S 、μ_F 、σ_S 與 σ_F 分別表示指數現貨與期貨價格變動的瞬間飄移項(drift term)與波動性(volatility)，ε 則爲服從標準常態分配的隨機變數。由於指數現貨與期貨之間存在著高度的相關性，但亦非完全正相關，因此無論是個別抽取現貨與期貨的隨機變數，或是共用同一隨機變數均有不妥之處；有鑑於此，本文由標準常態分配中隨機抽取出兩個變數 x_{St} 與 x_{Ft} 後，即利用現貨與期貨之間的相關係數加以處理如下：

$$\varepsilon_{St} = x_{St}$$

$$\varepsilon_{Ft} = x_{St}\rho_{SF} + x_{Ft}\sqrt{1-\rho_{SF}^2}$$

其中，ρ_{SF} 表示指數現貨與期貨之間的相關係數，若 $\rho_{SF} = 0$，則 $\varepsilon_{St} = x_{St}$，$\varepsilon_{Ft} = x_{Ft}$，相當於獨

立抽樣；若$\rho_{SF}=1$，則$\varepsilon_{St}=\varepsilon_{Ft}$，相當於共同抽樣；透過此一步驟即可保有現貨與期貨模擬之間的高度相關性。

另外，本文設定目標報酬水準為 0，並設定 0.5, 1.0, 2.0, 4.0 等四種不同風險容忍度，分別代表風險愛好者、風險中立者、風險趨避者與極端風險趨避者的風險態度。

C. 避險績效

本文中除了採用變異數衡量避險績效外，並分別採用 LPM、平均報酬對標準差比($\frac{\text{平均報酬率}}{\text{標準差}}$)以及平均報酬對 LPM 比($\frac{\text{平均報酬率}}{\sqrt{LPM_{2,0}}}$)來衡量不同避險比率之良窳；其中，前兩者代表兩種不同定義的損失風險衡量指標，數值愈低，避險績效愈佳；後兩者則代表每單位損失風險的報酬，比率愈高，避險績效愈佳。

III. 實證結果

台灣期交所「台股指數期貨」的交易開始於 1998 年 7 月 21 日，但為了避免初上市資料干擾實證結果之正確性，本文設定實證期間由 1999 年 1 月 1 日至 2001 年 12 月 31 日，資料基礎包含日資料與週資料，週資料期間由每週四至下週三，若遇非營業日，則往後或前推一日。

表 1　指數現貨與期貨之基本統計量

		平均值	標準差	相關係數
1999				
日資料	指數現貨	0.001033	0.015867	
	指數期貨	0.001019	0.018162	0.939490
週資料	指數現貨	0.005362	0.034530	
	指數期貨	0.005186	0.036158	0.963689
2000				
日資料	指數現貨	-0.002130	0.021333	
	指數期貨	-0.002160	0.025076	0.929676
週資料	指數現貨	-0.011630	0.054985	
	指數期貨	-0.012100	0.058896	0.982911
2001				
日資料	指數現貨	0.000648	0.019794	
	指數期貨	0.000656	0.022410	0.923269
週資料	指數現貨	0.003054	0.048047	
	指數期貨	0.003203	0.050917	0.974678

表 1 首先列出指數現貨與期貨在分段期間內日報酬與週報酬的平均值、標準差與相關係數。無論是日或週資料，其看法一致，指數現貨與期貨之間的報酬率相近，2000 年均有負報酬，1999 與 2001 年則有正報酬，而且期貨標準差總是大於現貨，隱含衍生性金融商品較其標的資產有更高的波動性。指數現貨與期貨之間的相關係數則指出兩者之間具有高度正相關，特別是以週資料爲基礎時，但是仍非完全正相關，隱含 naïve 避險比率將不適用；而且在幾何布朗運動的模擬過程中，採用獨立抽樣或是共同抽樣來模擬指數現貨與期貨均有不恰當之處，本文採用的修正方法應可得到較合理的結果。

表 2　不同避險方法所求之避險比率與績效

A.　日資料基礎

年度 \ 避險比率			最小變異數避險比率	歷史資料法				蒙地卡羅模擬法(幾何布朗運動)			
				$LPM_{0.5,0}$	$LPM_{1,0}$	$LPM_{2,0}$	$LPM_{4,0}$	$LPM_{0.5,0}$	$LPM_{1,0}$	$LPM_{2,0}$	$LPM_{4,0}$
2000	避險比率		**0.82**	0.77	0.79	**0.81**	0.81	0.90	0.93	**0.94**	0.95
	避險投資組合	平均報酬率	**-0.0978**	-0.1276	-0.1159	**-0.1042**	-0.1042	-0.0515	-0.0340	**-0.0281**	-0.0223
		變異數	**0.01689**	0.01681	0.01674	**0.01680**	0.01680	0.01876	0.02003	**0.02052**	0.02105
		$LPM_{2,0}$	**0.01014**	0.01009	0.01006	**0.01010**	0.01010	0.01101	0.01157	**0.01179**	0.01202
		$\frac{平均報酬率}{標準差}$	**-0.7521**	-0.9841	-0.8958	**-0.8039**	-0.8039	-0.3761	-0.2400	**-0.1962**	-0.1534
		$\frac{平均報酬率}{\sqrt{LPM_{2,0}}}$	**-0.9708**	-1.2700	-1.1552	**-1.0370**	-1.0370	-0.4911	-0.3158	**-0.2590**	-0.2031
2001	避險比率		**0.791**	0.97	0.86	**0.79**	0.80	1.18	1.00	**0.92**	0.87
	避險投資組合	平均報酬率	**0.0316**	0.0029	0.0205	**0.0317**	0.0301	-0.3072	-0.0019	**0.0109**	0.0189
		變異數	**0.01418**	0.01703	0.01435	**0.01419**	0.01414	0.03039	0.01828	**0.01545**	0.01447
		$LPM_{2,0}$	**0.00720**	0.00867	0.00729	**0.00720**	0.00718	0.01578	0.00931	**0.00786**	0.00736
		$\frac{平均報酬率}{標準差}$	**0.2650**	0.0222	0.1712	**0.2663**	0.2533	-0.1762	-0.0141	**0.08778**	0.1572
		$\frac{平均報酬率}{\sqrt{LPM_{2,0}}}$	**0.3720**	0.0312	0.2402	**0.3738**	0.3555	-0.2446	-0.0197	**0.1231**	0.2205

B. 週資料基礎

年度		避險比率	最小變異數避險比率	歷史資料法				蒙地卡羅模擬法(幾何布朗運動)			
				$LPM_{0.5,0}$	$LPM_{1,0}$	$LPM_{2,0}$	$LPM_{4,0}$	$LPM_{0.5,0}$	$LPM_{1,0}$	$LPM_{2,0}$	$LPM_{4,0}$
2000	避險比率		**0.92**	0.76	0.87	**0.90**	0.96	0.90	0.93	**0.94**	0.95
	避險投資組合	平均報酬率	**-0.0260**	-0.1267	-0.0575	**-0.0386**	-0.0009	-0.0386	-0.0197	**-0.0135**	-0.0072
		變異數	**0.00533**	0.00981	0.00574	**0.00538**	0.00565	0.00538	0.00534	**0.00542**	0.00552
		$LPM_{2,0}$	**0.00262**	0.00634	0.00326	**0.00282**	0.00243	0.00282	0.00255	**0.00249**	0.00246
		$\frac{平均報酬率}{標準差}$	**-0.3566**	-1.2791	-0.7590	**-0.5262**	-0.0115	-0.5262	-0.2697	**-0.1827**	-0.0963
		$\frac{平均報酬率}{\sqrt{LPM_{2,0}}}$	**-0.5083**	-1.5890	-1.0063	**-0.7268**	-0.0175	-0.7268	-0.3909	**-0.2692**	-0.1444
2001	避險比率		**0.92**	0.97	0.96	**0.97**	0.98	1.18	1.00	**0.92**	0.87
	避險投資組合	平均報酬率	**0.0589**	-0.0026	-0.0010	**-0.0026**	-0.0042	-0.0369	-0.0075	**0.0056**	0.0137
		變異數	**0.00589**	0.00622	0.00610	**0.00621**	0.00637	0.01484	0.00674	**0.00589**	0.00621
		$LPM_{2,0}$	**0.00248**	0.00271	0.00264	**0.00271**	0.00280	0.00803	0.00303	**0.00248**	0.00262
		$\frac{平均報酬率}{標準差}$	**0.0768**	-0.0330	-0.0124	**-0.0323**	-0.0531	-0.3028	-0.0914	**0.0725**	0.1742
		$\frac{平均報酬率}{\sqrt{LPM_{2,0}}}$	**0.1183**	-0.0499	-0.0189	**-0.0500**	-0.0800	-0.4116	-0.1363	**0.1117**	0.2681

表 2 分別列出以日或週資料爲基礎下，不同避險方法在分段期間的避險比率與績效。首先觀察不同資料基礎下所求得的最小變異數避險比率，當資料基礎爲日資料時，最小變異數避險比率大致介於 0.8 左右，一旦變爲週資料型態，最小變異數避險比率則提高至 0.92，這應該是因爲週資料型態下指數現貨與期貨的相關程度提高所致，因而使得避險比率愈接近 1.0。其次，觀察不同風險容忍度下的最小 LPM 避險比率，無論資料基礎，也無論報酬率分配的模擬方法，在 2000 年，投資者風險趨避程度愈高，最小 LPM 避險比率愈高，意指風險趨避程度愈高的投資人必須放空愈多的期貨部位；反之，在 2001 年，除了歷史資料法的實證結果不符外，投資者風險趨避

程度愈高，最小 LPM 避險比率愈低，意指風險趨避程度愈高的投資人必須放空愈少的期貨部位；配合期貨契約 2000 年的負報酬與 2001 年的正報酬，極端風險趨避者所採行的期貨部位(2000 年放空最多的期貨部位以及 2001 年放空最少的期貨部位)通常可使其得到高於其他風險態度者的平均報酬，顯示最小 LPM 避險比率頗能掌握投資者的風險趨避心理。最後，比較風險容忍度同爲 2 的最小變異數避險比率以及歷史資料法、蒙地卡羅模擬法下的最小 $LPM_{2,0}$ 避險比率，避險績效可能因爲時間、資料基礎、績效評估方法改變而改變，因此無法斷言究竟何者爲最佳的避險方法；但除了 2001 年的週資料實證結果支持最小變異數避險比率外，其餘情況下均指向最小 LPM 避險比率是比較好的避險方法，但究竟應採用歷史資料法或是蒙地卡羅(幾何布朗運動)模擬法則又無從評判。整體而言，實證結果僅肯定最小 LPM 避險比率在投資者風險態度的掌控上有不錯的表現，並無法斷言何者爲最佳避險方法。

IV. 結論

金融自由化使得投資者面臨的風險與日俱增，隨著衍生性金融商品的問世，期貨避險成爲投資者規避風險的重要管道之一；然而，期貨避險的成效維繫在損失風險的掌控上，變異數與 LPM 正爲兩種不同典型的損失風險代表，前者假設雖然過於嚴苛，但卻容易執行，後者雖然具有一般化的優點，但卻執行不易；我們無從評判其良窳，僅可由實證上去瞭解兩者的避險績效；實證結果發現：避險績效可能因爲時間、資料基礎、績效評估方法改變而改變，我們並無法斷言何者爲最佳避險方法，僅能由實證結果推論出最小 LPM 避險比率在投資者避險心理的掌握上有不錯表現。

變異數與 LPM 各有其優缺點，在時效性與一般化的兩難抉擇下，一個兼具兩者特性的損失風險指標應可爲期貨避險比率帶來新的契機；隨著風險管理意識的盛行，有愈來愈多的損失風險衡量指標被提出，例如 VaR (Value at Risk)或 expected shortfall，後續研究可針對新的損失風險衡量指標繼續進行探討，以期找出一個兼備時效與精確性的期貨避險比率。

References:

1. 李進生與吳壽山, 2000, "淺述避險比例與避險績效," 臺灣期貨市場, 2:2, 3-7。

2. 李進生等著, 2001, "風險管理：風險值理論與應用," 清蔚科技。

3. 李進生與盧陽正, 1997, "避險投資組合價值平穩化避險策略--動態預測避險研究法," 證券市場發展, 34 , 83-115.

4. 李進生與盧陽正, 1999, "風險值：觀念與估算方法," 證券金融, 63, 39-58.

5. 徐守德、郭照榮與戴妙玲，「以隨機優勢法分析國際股市月份效果及動態投資組合績效評估」，管理科學學報，民國八十五年三月，21-48 頁。

6. 張智星，「ＭＡＴＬＡＢ　程式設計與應用」，清蔚科技股份有限公司出版事業部出版，民國八十九年十一月二版。

7. Bawa, Vijay S., 1975, "Optimal rules for ordering uncertain prospects," Journal of Financial Economics, p.95-121.

8. Ederington, L. H., 1979, "The Hedging Performance of the New Futures Markets," Journal of Finance, p.157-170.

9. Eftekhari, Bagak, 1998, "Lower Partial Moment Hedge Ratio," Applied Financial Economics, p.645-652.

10. Figlewski, Stephen, 1984, "Hedging Performance and Basis Risk in Stock Index Futures," Journal of Finance , p.657-669.

11. Fishburn, Peter C., 1977, "Mean-risk Analysis with Risk Associated with Below-target Returns," American Economic Review , p.116-126.

12. Markowitz, Harry M., 1952, "Portfolio Selection," Journal of Finance, p.77-91.

13. Nawrocki, David N., 1999, "A Brief History of Downside Risk Measures," Journal of Investing, p.9-25.

14. Roy, A. D., 1952, "Safety First and the Holding of Assets," Econometrica, p.431-449.