

## 一、前言

一般常用於分析邊坡穩定的方法主要有極限平衡法及數值方法二大類。其中極限平衡法被廣泛地使用於實務中。其求解方式係以材料極限強度為本，假定滑動面各點同時破壞，並簡化平衡要項與未知數，利用直接求解或反覆疊代運算搜尋邊坡之最可能破壞狀態。該法雖具有簡易之優點，但卻無法描述邊坡應力分佈狀態，由於需假設破壞面及部份平衡條件以解決系統之靜不定特性，故所得者與實際狀況仍有出入。而數值方法則以精密的力學理論為依據，可提供結構體應力分佈、變形及整體破壞潛能供分析者參考。然由於材料勁度參數掌握不易，分析邊界之規模與模式均會影響所得結果，同時演算及數據解讀較為複雜，故較少用於設計實務中。鑒於此，本研究希望能結合上述方法之主要優點，以簡易的數學和力學公式配合土壤強度參數，概略地分析邊坡的力學行為與穩定性，提供另類評估模式供分析者參考。

研究首先將邊坡內部應力以概略的應力疊加方式處理。若假設系統可簡化為平面應變問題，其應力狀態相似於開挖水平地表所產生者，則圖 1b 即為其模式。圖中開挖前之土壤應力以靜止土壓力狀態模擬之，而解壓總力則作用於開挖區的形心位置。若進一步將該解壓作用力表示為沿水平方面延伸的線載重總和，則圖 1c 中系統非開挖區之應力影響可概略地以適用於半無限域的 Mindlin 公式求解[5]。由於 Mindlin 公式之積分推導過程相對地繁複，本研究遂於研究初期以較為簡易之彈力公式為積分基礎，嘗試建構其積分過程並編譯分析流程，以供後續研究使用。若考慮重力於空間分佈之延續性並將該重力以集中力方式作用於開挖區域之頂緣，則 Boussinesq 公式將可用於此概算中。由於集中力置於地表(如圖 1d)將形成高估邊坡內緣應力影響值，低估坡底水平地層應力增量之現象，本研究亦以 Kelvin 公式進行概算。Kelvin 公式雖適用於無限域(infinite domain)之受力行為，但由於該解之應力消散行為不同，研究亦將其納入積分推導中，以了解不同公式所導致的力學差異。將開挖區之解壓行為以等值向上荷重方式予以處置後，其後再將該項應力變化疊加至非開挖區之原有大地應力狀態，即可概略地模擬理想化邊坡系統之內部應力。爾後再配合莫爾庫倫破壞機制的決定可同時了解邊坡中可能的破壞區域及其安全係數分佈情形。除了理論的推導外，為了解分析之合理性，研究亦使用 Goodman and Brown 利用線彈性理論配合增量建構方式所建立之平面二維重力荷重近似解[2] 和以有限差分法為基礎的軟體 FLAC [3] 比較。至於邊坡的安全係數，則以 STABL 程式 [1] 做為參考的基準，以驗證本方法之可行性。

## 二、理論推導

土壤為複雜多變之材料，在分析前需施以合理假設以簡化問題。以下即說明研究假設與所使用的基本彈性力學解推導；另將以參數研究決定該等公式的積分範圍，同時定義安全係數以研討破壞潛能。

### 1. 基本假設

- (1). 將邊坡穩定問題視為二維度之問題，忽略另一維度之應變分量。
- (2). 土層係由均質，等向性之線彈性材料所構成。
- (3). 土壤之強度參數不隨時間而改變，且可藉 Mohr-Coulomb 破壞理論模擬之。
- (4). 邊坡在破壞前處於彈性範圍內，疊加定理及彈性力學公式適用。
- (5). 地下水位在坡址下方深處。
- (6). 邊坡的頂緣及底緣土層為水平分佈，且邊坡系統不具對稱性，非填築而成之壩堤(embankment)系統。

### 2. 公式推導

研究所根據之基本彈力解主要有下列二種：

- (1). Boussinesq 解：係描述一作用於半空間表面上的載重所造成的應力改變情形。
- (2). Kelvin 解：為描述作用於一無限大實體內部之荷重所產生的應力變化情形。

#### Boussinesq 解

Boussinesq 解[7] 為應用於分析土壤應力分佈情形最為廣泛的彈性力學解析解。當半空間之彈性體受垂直線載重作用時(例如一無限厚之邊坡)，其系統中任意點之應力狀況，可表示為：

$$\sigma_z = \frac{2Q}{\pi} \frac{z^3}{R^4} \quad (1)$$

$$\sigma_x = \frac{2Q}{\pi} \frac{x^2 z}{R^4} \quad (2)$$

$$\tau_{xz} = \frac{2Q}{\pi} \frac{xz^2}{R^4} \quad (3)$$

其中  $Q$  為單位寬度內垂直線載重之總強度(力/長度)， $x$  為質點至載重的水平支距， $z$  為質點深度， $R$  為質點至載重的斜距( $=\sqrt{x^2+z^2}$ )； $\sigma_z$ 、 $\sigma_x$  和  $\tau_{xz}$  則為  $x$ - $z$  平面之正向與剪應力分量。值得注意的是，對於無限長線載重作用的影響，Boussinesq 解並不受柏松比之影響。

當使用以上公式進行土體內應力增量公式之推導時，由於分析點所在位置之不同，需分成三個區域來考慮，如圖 2 所示。

區域 I：

對區域 I 內任意點  $o$  而言(如圖 2)，根據(1)式，且已知對應於虛擬土方自重之單位面積強度為  $q$  (力/長度<sup>2</sup>)，其垂直應力增量可以積分形式表示如下：

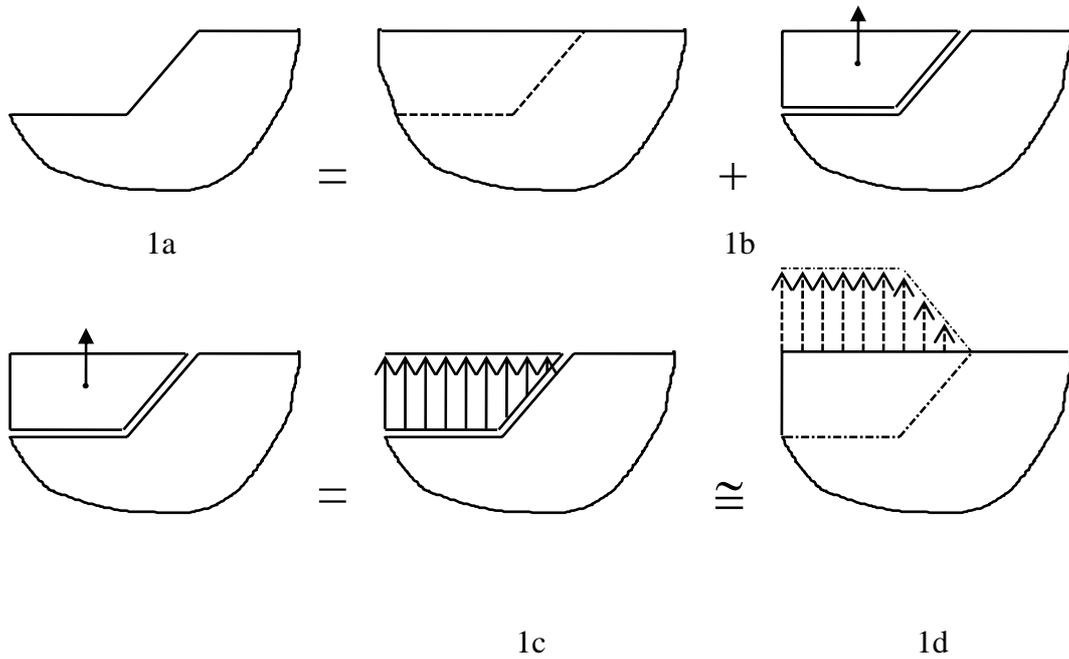


圖 1 邊坡應力疊加概略模式

$$\Delta\sigma_z = -\int_{a_1}^{a_1+a_2} \frac{2z^3q\left(\frac{x-a_1}{a_2}\right)}{\pi(x^2+z^2)^2} dx \quad (4)$$

$$-\int_{a_1+a_2}^{a_1+a_2+a_3} \frac{2z^3q}{\pi(x^2+z^2)^2} dx$$

其中  $\chi$  為局部座標系統，隨  $o$  點所在之位置而改變。若定義角度  $\theta$  為積分點垂直軸至該積分點和力作用點連線之旋轉角度，透過積分表與三角函數積分技巧，可將式(4)之定積分表示成式(5)。此式表區域 I 內任意點受到如圖 2 所示載重之垂直應力增量。

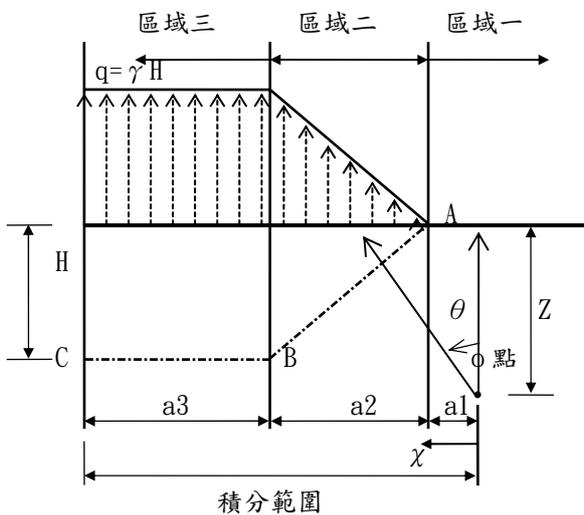


圖 2 積分範圍及區域 I 積分點示意圖

$$\Delta\sigma_z = -\frac{2zq}{a_2\pi} \left[ -\frac{\cos^2 \theta}{2} \right]_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}}$$

$$+\frac{2qa_1}{a_2\pi} \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}}$$

$$-\frac{2q}{\pi} \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\alpha_{12}}^{\alpha_{123}} \quad (5)$$

同理，對區域 I 內任意點  $o$  而言，在受到相同載重狀況作用下，水平應力增量與剪應力增量亦可利用(2)式及(3)式以相同方式進一步推導而得到。分別表示如下：

$$\Delta\sigma_x = -\frac{2zq}{a_2\pi} \left[ -\ln|\cos\theta| + \frac{\cos^2\theta}{2} \right]_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} + \frac{2qa_1}{a_2\pi} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} - \frac{2q}{\pi} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\alpha_{12}}^{\alpha_{123}}$$

$$\Delta\tau_{xz} = -\frac{2zq}{a_2\pi} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} + \frac{2qa_1}{a_2\pi} \left[ -\frac{\cos^2\theta}{2} \right]_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} - \frac{2q}{\pi} \left[ -\frac{\cos^2\theta}{2} \right]_{\alpha_{12}}^{\alpha_{123}}$$

式中  $a_1$  為任意點  $o$  到邊坡坡頂  $A$  之水平距離， $a_2$  為邊坡寬度， $a_3$  為邊坡坡趾  $B$  至積分邊界之水平距離；而

$$\alpha_{11} = \tan^{-1}\left(\frac{a_1}{z}\right)$$

$$\alpha_{12} = \tan^{-1}\left(\frac{a_1 + a_2}{z}\right)$$

$$\alpha_{123} = \tan^{-1}\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{z}\right)$$

對區域 II 及區域 III 內任意點  $o$  而言，在受到圖 3 及圖 4 所示載重狀況作用下， $o$  點之各項應力增量推導方式同前，結果整理如下：

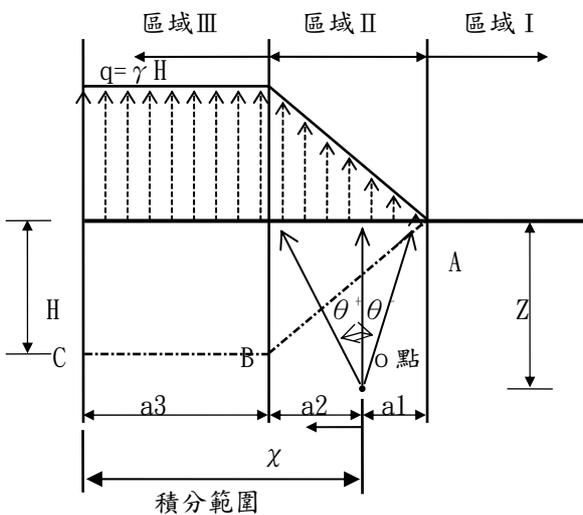


圖 3 積分範圍及區域 II 積分點示意圖

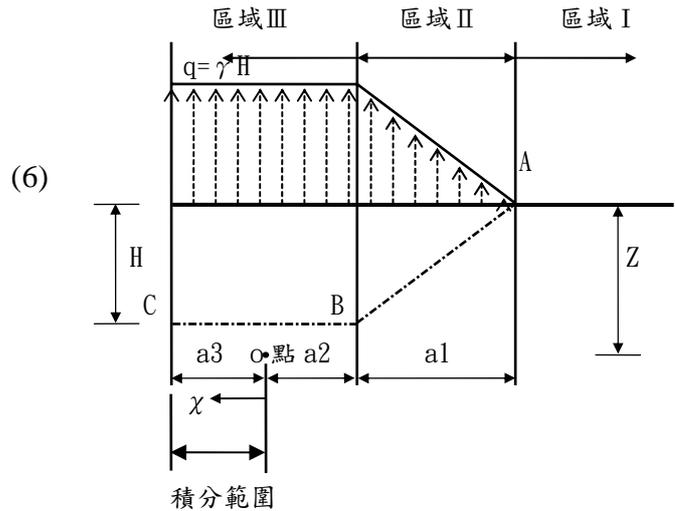


圖 4 積分範圍及區域 III 積分點示意圖

區域 II :

$$\Delta\sigma_z = -\frac{2zq}{\pi(a_1 + a_2)} \left[ -\frac{\cos^2\theta}{2} \right]_{-\alpha_{11}}^{\alpha_{22}} - \frac{2qa_1}{\pi(a_1 + a_2)} \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\alpha_{11}}^{\alpha_{22}} - \frac{2q}{\pi} \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\alpha_{22}}^{\alpha_{23}}$$

$$\Delta\sigma_x = -\frac{2zq}{\pi(a_1 + a_2)} \left[ \ln|\sec\theta| + \frac{\cos^2\theta}{2} \right]_{-\alpha_{11}}^{\alpha_{22}} - \frac{2qa_1}{\pi(a_1 + a_2)} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\alpha_{11}}^{\alpha_{22}} - \frac{2q}{\pi} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\alpha_{22}}^{\alpha_{23}}$$

$$\Delta\tau_{xz} = \frac{2zq}{\pi(a_1 + a_2)} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\alpha_{11}}^{\alpha_{22}} - \frac{2qa_1}{\pi(a_1 + a_2)} \left[ -\frac{\cos^2\theta}{2} \right]_{-\alpha_{11}}^{\alpha_{22}} - \frac{2q}{\pi} \left[ -\frac{\cos^2\theta}{2} \right]_{\alpha_{22}}^{\alpha_{23}}$$

式中  $a_1$  為任意點  $o$  到邊坡坡頂  $A$  之水平距離， $a_2$  為任意點  $o$  到邊坡坡趾  $B$  之水平距離， $a_3$  為邊坡坡趾  $B$  至積分邊界之水平距離；而

$$\alpha_{11} = \tan^{-1}\left(\frac{a_1}{z}\right)$$

$$\alpha_{22} = \tan^{-1}\left(\frac{a_2}{z}\right)$$

$$\alpha_{23} = \tan^{-1}\left(\frac{a_2 + a_3}{z}\right)$$

區域 III :

$$\Delta\sigma_z = -\frac{2q}{\pi} \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\alpha_{22}}^{\alpha_{33}} - \frac{2q(a_1 + a_2)}{\pi a_1} \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\alpha_{12}}^{-\alpha_{22}} \quad (11)$$

$$\Delta\sigma_x = -\frac{2q}{\pi} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\alpha_{22}}^{\alpha_{33}} - \frac{2q(a_1 + a_2)}{\pi a_1} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\alpha_{12}}^{-\alpha_{22}} - \frac{2zq}{\pi a_1} \left[ \frac{\cos^2 \theta}{2} \right]_{-\alpha_{12}}^{-\alpha_{22}} \quad (12)$$

$$\Delta\tau_{xz} = -\frac{2q}{\pi} \left[ -\frac{\cos^2 \theta}{2} \right]_{-\alpha_{22}}^{\alpha_{33}} - \frac{2q(a_1 + a_2)}{\pi a_1} \left[ -\frac{\cos^2 \theta}{2} \right]_{-\alpha_{12}}^{-\alpha_{22}} - \frac{2zq}{\pi a_1} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\alpha_{12}}^{-\alpha_{22}} \quad (13)$$

式中  $a_1$  為邊坡寬度,  $a_2$  為任意點  $o$  到邊坡坡趾  $B$  之水平距離,  $a_3$  為任意點  $o$  到積分邊界之水平距離;  
而

$$\alpha_{12} = \tan^{-1}\left(\frac{a_1 + a_2}{z}\right)$$

$$\alpha_{22} = \tan^{-1}\left(\frac{a_2}{z}\right)$$

$$\alpha_{33} = \tan^{-1}\left(\frac{a_3}{z}\right)$$

### Kelvin 解

Kelvin 解[5] 於大地工程之應用不若 Boussinesq 解普遍。當均質、等向之全空間彈性介質內受到無限長荷重作用時, 系統中任意點之應力增量可以下列公式求得:

$$\sigma_z = \frac{Q}{2\pi(1-\nu)} \frac{z}{R^2} \left[ \frac{(3-2\nu)}{2} - \frac{x^2}{R^2} \right] \quad (14)$$

$$\sigma_x = \frac{Q}{2\pi(1-\nu)} \frac{z}{R^2} \left[ -\frac{(1-2\nu)}{2} + \frac{x^2}{R^2} \right] \quad (15)$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q}{2\pi(1-\nu)} \frac{x}{R^2} \left[ \frac{(1-2\nu)}{2} + \frac{z^2}{R^2} \right] \quad (16)$$

其中各變數定義同前, 而  $\nu$  表介質之柏松比值。將式(14)~(16)與式(1)~(3)比較, Boussinesq 解在線荷重作用下其應力值不受柏松比影響, 而 Kelvin 解將隨柏松比改變而影響其應力值; 當柏松比為 0.5 時, Kelvin 解恰為 Boussinesq 解之 1/2。根據式(14)~(16), 可推導各分析點之應力增量影響, 其程序及定義同前, 結果整理如下:

區域 I :

$$\Delta\sigma_z = -\frac{z(3-2\nu)q}{4\pi a_2(1-\nu)} \left[ -\ln|\cos \theta| \right]_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} + \frac{zq}{2\pi a_2(1-\nu)} \left[ \frac{\cos 2\theta}{4} - \ln|\cos \theta| \right]_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} + \frac{(3-2\nu)qa_1}{4\pi a_2(1-\nu)} [\theta]_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} - \frac{qa_1}{2\pi a_2(1-\nu)} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} - \frac{(3-2\nu)q}{4\pi(1-\nu)} [\theta]_{\alpha_{12}}^{\alpha_{123}} \quad (17)$$

$$\Delta\sigma_x = \frac{z(1-2\nu)q}{4\pi a_2(1-\nu)} \left[ -\ln|\cos \theta| \right]_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} + \frac{qa_1}{2\pi a_2(1-\nu)} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} - \frac{q}{2\pi(1-\nu)} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\alpha_{12}}^{\alpha_{123}} - \frac{zq}{2\pi a_2(1-\nu)} \left[ \frac{\cos 2\theta}{4} - \ln|\cos \theta| \right]_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} - \frac{(1-2\nu)qa_1}{4\pi a_2(1-\nu)} [\theta]_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} + \frac{(1-2\nu)q}{4\pi(1-\nu)} [\theta]_{\alpha_{12}}^{\alpha_{123}} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Delta \tau_{xz} = & \frac{z(1-2\nu)q}{4\pi a_2(1-\nu)} [\tan \theta - \theta]_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} \\ & + \frac{(1-2\nu)qa_1}{4\pi a_2(1-\nu)} [-\ln|\cos \theta|]_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} \\ & - \frac{zq}{2\pi a_2(1-\nu)} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} \\ & + \frac{qa_1}{2\pi a_2(1-\nu)} \left[ -\frac{\cos^2 \theta}{2} \right]_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} \\ & - \frac{q}{2\pi(1-\nu)} \left[ -\frac{\cos^2 \theta}{2} \right]_{\alpha_{12}}^{\alpha_{123}} \\ & - \frac{(1-2\nu)q}{4\pi(1-\nu)} [-\ln|\cos \theta|]_{\alpha_{12}}^{\alpha_{123}} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Delta \tau_{xz} = & -\frac{z(1-2\nu)q}{4\pi(a_1+a_2)(1-\nu)} [\tan \theta - \theta]_{-\alpha_{11}}^{\alpha_{22}} \\ & - \frac{q}{2\pi(1-\nu)} \left[ -\frac{\cos^2 \theta}{2} \right]_{\alpha_{22}}^{\alpha_{23}} \\ & - \frac{(1-2\nu)q}{4\pi(1-\nu)} [-\ln|\cos \theta|]_{\alpha_{22}}^{\alpha_{23}} \\ & - \frac{(1-2\nu)qa_1}{4\pi(a_1+a_2)(1-\nu)} [-\ln|\cos \theta|]_{-\alpha_{21}}^{\alpha_{22}} \\ & - \frac{zq}{2\pi(a_1+a_2)(1-\nu)} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\alpha_{21}}^{\alpha_{22}} \\ & - \frac{qa_1}{2\pi(a_1+a_2)(1-\nu)} \left[ -\frac{\cos^2 \theta}{2} \right]_{-\alpha_{21}}^{\alpha_{22}} \end{aligned} \quad (22)$$

區域 II :

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_z = & -\frac{z(3-2\nu)q}{4\pi(a_1+a_2)(1-\nu)} [-\ln|\cos \theta|]_{-\alpha_{11}}^{\alpha_{22}} \\ & + \frac{(3-2\nu)qa_1}{4\pi(a_1+a_2)(1-\nu)} [\theta]_{-\alpha_{11}}^{\alpha_{22}} \\ & + \frac{q}{2\pi(1-\nu)} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\alpha_{22}}^{\alpha_{23}} \\ & + \frac{zq}{2\pi(a_1+a_2)(1-\nu)} \left( \frac{\cos 2\theta}{4} - \ln|\cos \theta| \right)_{-\alpha_{11}}^{\alpha_{22}} \\ & - \frac{qa_1}{2\pi(a_1+a_2)(1-\nu)} \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right)_{-\alpha_{11}}^{\alpha_{22}} \\ & - \frac{(3-2\nu)q}{4\pi(1-\nu)} [\theta]_{\alpha_{22}}^{\alpha_{23}} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_x = & \frac{z(1-2\nu)q}{4\pi(a_1+a_2)(1-\nu)} [-\ln|\cos \theta|]_{-\alpha_{11}}^{\alpha_{22}} \\ & + \frac{(1-2\nu)qa_1}{4\pi(a_1+a_2)(1-\nu)} [\theta]_{-\alpha_{11}}^{\alpha_{22}} \\ & - \frac{q}{2\pi(1-\nu)} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\alpha_{22}}^{\alpha_{23}} \\ & - \frac{qa_1}{2\pi(a_1+a_2)(1-\nu)} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\alpha_{11}}^{\alpha_{22}} \\ & - \frac{zq}{2\pi(a_1+a_2)(1-\nu)} \left[ \frac{\cos 2\theta}{4} - \ln|\cos \theta| \right]_{-\alpha_{11}}^{\alpha_{22}} \\ & + \frac{(1-2\nu)q}{4\pi(1-\nu)} [\theta]_{\alpha_{22}}^{\alpha_{23}} \end{aligned} \quad (21)$$

區域 III :

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_z = & -\frac{z(3-2\nu)q}{4\pi a_1(1-\nu)} [-\ln|\cos \theta|]_{-\alpha_{12}}^{\alpha_{22}} \\ & + \frac{(3-2\nu)q(a_1+a_2)}{4\pi a_1(1-\nu)} [\theta]_{-\alpha_{12}}^{\alpha_{22}} \\ & - \frac{q(a_1+a_2)}{2\pi a_1(1-\nu)} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\alpha_{12}}^{\alpha_{22}} \\ & + \frac{zq}{2\pi a_1(1-\nu)} \left[ \frac{\cos 2\theta}{4} - \ln|\cos \theta| \right]_{-\alpha_{12}}^{\alpha_{22}} \\ & - \frac{(3-2\nu)q}{4\pi(1-\nu)} [\theta]_{-\alpha_{22}}^{\alpha_{33}} \\ & + \frac{q}{2\pi(1-\nu)} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\alpha_{22}}^{\alpha_{33}} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_x = & \frac{z(1-2\nu)q}{4\pi a_1(1-\nu)} [-\ln|\cos \theta|]_{-\alpha_{12}}^{\alpha_{22}} \\ & + \frac{(1-2\nu)q(a_1+a_2)}{4\pi a_1(1-\nu)} [\theta]_{-\alpha_{12}}^{\alpha_{22}} \\ & - \frac{q(a_1+a_2)}{2\pi a_1(1-\nu)} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\alpha_{12}}^{\alpha_{22}} \\ & - \frac{q}{2\pi(1-\nu)} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\alpha_{22}}^{\alpha_{33}} \\ & - \frac{zq}{2\pi a_1(1-\nu)} \left[ \frac{\cos 2\theta}{4} - \ln|\cos \theta| \right]_{-\alpha_{12}}^{\alpha_{22}} \\ & + \frac{(1-2\nu)q}{4\pi(1-\nu)} [\theta]_{-\alpha_{22}}^{\alpha_{33}} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\Delta\tau_{xz} = -\frac{z(1-2\nu)q}{4\pi a_1(1-\nu)}[\tan\theta - \theta]_{-\alpha_{12}}^{-\alpha_{22}} - \frac{q}{2\pi(1-\nu)}\left[-\frac{\cos^2\theta}{2}\right]_{-\alpha_{22}}^{\alpha_{33}} - \frac{(1-2\nu)q(a_1+a_2)}{4\pi a_1(1-\nu)}[-\ln|\cos\theta|]_{-\alpha_{12}}^{-\alpha_{22}} - \frac{(1-2\nu)q}{4\pi(1-\nu)}[-\ln|\cos\theta|]_{-\alpha_{22}}^{\alpha_{33}} - \frac{zq}{2\pi a_1(1-\nu)}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\alpha_{12}}^{-\alpha_{22}} - \frac{q(a_1+a_2)}{2\pi a_1(1-\nu)}\left[-\frac{\cos^2\theta}{2}\right]_{-\alpha_{12}}^{-\alpha_{22}} \quad (25)$$

各公式中之變數定義均同前，其中當  $a_3$  等於無限大值時， $a_{123}$ 、 $a_{23}$ 、 $a_{33}$  等值均可寫為  $\pi/2$ ，詳細推証可見[8]。

### 3. 邊坡內部應力計算

如圖 1 所示，邊坡內部之應力可視為近似於解壓荷重所產生之應力增量與水平地表土壤自重所造成之現地應力疊加結果，即

$$\sigma = \Delta\sigma + \sigma_1 \quad (26)$$

其中  $\sigma$  為邊坡內部應力， $\Delta\sigma$  為解壓荷重所產生之應力增量， $\sigma_1$  為水平地表土壤自重所造成之現地應力。若忽略地下水及滲流，對於單位重  $\gamma$  之土壤，可利用下列關係求得地表下方地層之靜止狀態大地應力。

$$\sigma_{iz} = \gamma z \quad (27)$$

$$\sigma_{ix} = \sigma_{iy} = K_0\sigma_{iz} = K_0 \gamma z \quad (28)$$

式中  $\sigma_{iz}$ 、 $\sigma_{ix}$  (或  $\sigma_{iy}$ ) 分別為土壤自重所造成之垂直與水平應力， $z$  為深度， $K_0$  為靜止土壓力係數；除以上之正向應力分量外，其餘應力分量可忽略不計。若忽略土壤之體積壓縮量，可將  $K_0$  表示為柏松比的函數[6]。

$$K_0 = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (29)$$

### 4. 破壞機制與安全係數

邊坡內部應力分佈情形決定後，選擇適當的破壞準則，可進一步了解邊坡內部安全係數分佈情形，進而預測邊坡可能之破壞區域。根據前述理論推導所決定之應力狀況，可進一步利用應力圓的觀念，將其轉換為作用於主平面上之主應力。根據莫爾-庫倫理論，當土壤發生破壞時，破壞面上的正應力  $\sigma_f$  和剪應力  $\tau_f$  可表示為土壤剪力強度參數  $c$  與  $\phi$  的關係式

$$\tau_f = c + \sigma_f \tan\phi \quad (30)$$

若分別以正向應力為橫軸，剪應力為縱軸， $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$  為最大與最小主應力，並參考邊坡內部任意質點之莫爾應力圓(參考圖 5)，則依據莫爾-庫倫破壞準則，該質點之安全係

數可利用土壤發生破壞所需的應力(強度)值  $F$  與現地發展出之實際應力值  $R$  的比值表示之。

$$FS = \frac{F}{R} = \frac{2c \cos\phi + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin\phi}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (31)$$

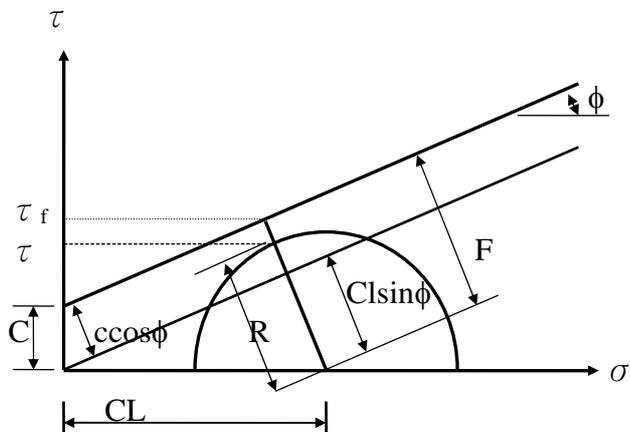


圖 5 安全係數的定義

## 三、應力分析與比較

### 1. 應力增量與疊加應力分佈情形

由 2.2 節之公式可計算出解壓向上荷重作用於地表所造成之地層內應力改變量，如圖 6~8 所示。利用 Boussinesq 解與 Kelvin 解所估算之分佈趨勢類似，但在應力增量值方面，Kelvin 解所得皆較 Boussinesq 解為低，其差異解將隨柏松比的增加而減少。造成 Boussinesq 解與 Kelvin 解之差異主要源於原始公式的假設不同，Boussinesq 解之外力作用於半空間的表面上，而 Kelvin 解則作用於無限大的實體內，兩者之傳遞與消散速率不同所導致。

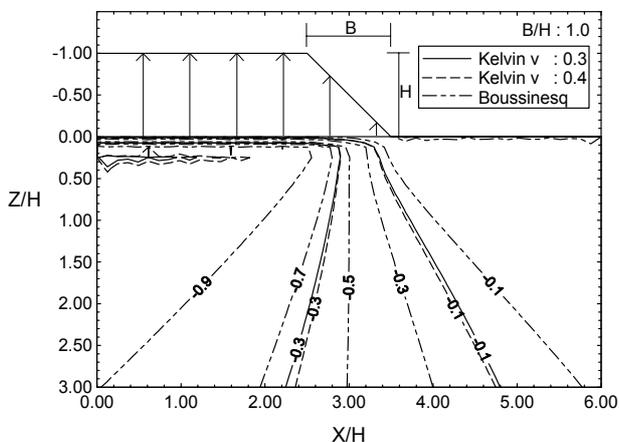


圖 6 正規化垂直應力增量  $\left(\frac{\Delta\sigma_z}{\gamma H}\right)$  等值線

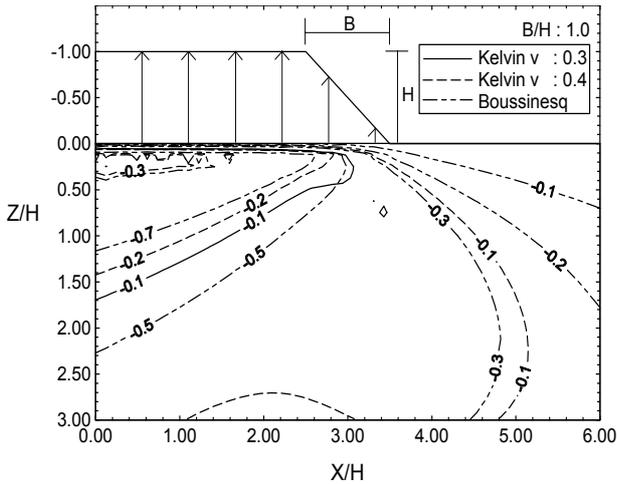


圖 7 正規化水平應力增量  $\left(\frac{\Delta\sigma_x}{\gamma H}\right)$  等值線

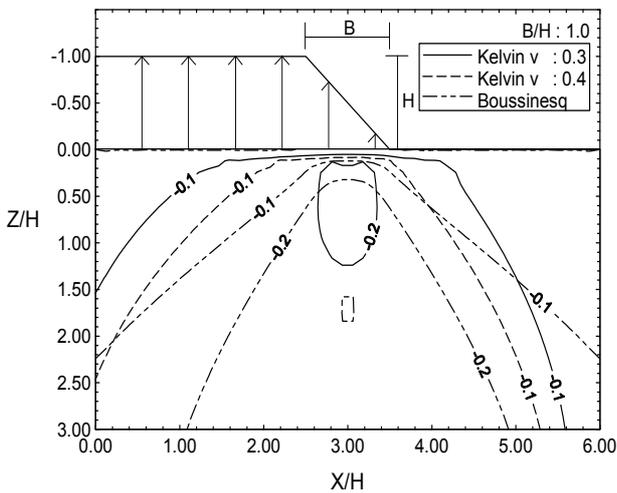


圖 8 正規化剪應力增量  $\left(\frac{\Delta\tau_{xz}}{\gamma H}\right)$  等值線

完成外加負荷重所造成的應力增量分析後，將此應力增量與水平地表土壤自重所造成的現地應力疊加，並忽略開挖區土方，可概略地模擬邊坡內部的應力分佈情形。就垂直應力的分佈而言(如圖 9)，Kelvin 解受柏松比的影響不大，在邊坡坡頂的附近，Boussinesq 解與 Kelvin 解所得之垂直應力差異不大；但在邊坡坡底下方土層，Kelvin 解則明顯較 Boussinesq 解為高。圖 10 為 Kelvin 所得之水平應力分佈圖形，隨著柏松比的增加，邊坡內部的水平應力有較大幅度的增加(柏松比與側向土壓力有關)。在 Boussinesq 解方面(圖 11)，其對淺層部份的水平應力有較低的預估值，而隨著  $K_0$  值的減小，該低估現象益趨明顯。就剪應力而言，Kelvin 解所得之剪應力在淺層部份，將隨柏松比的增大而減小，而在較深層部份則隨柏松比的增加而增大。相對地，Boussinesq 解則較為高估，如圖 12

所示。整體而言，在受到向上荷重作用下，使用 Boussinesq 解所得之應力增量值較高；而與自重所造成的現地應力疊加後，其所得之垂直及水平應力值均較 Kelvin 解所得者為低，剪應力值則因不受土壤重力的影響，仍以 Boussinesq 解所得者較高。由於該項應力疊加模式係概略模式，故所得之各項應力分量在接近邊坡表面處雖有非零的情況發生，但其應力之分佈趨勢大致仍屬合理，其後之各項比較可提供佐証參考。本研究所估算者與 Perloff 等人(1967)[4] 所建議者相仿，但 Perloff 等人之分析乃針對對稱之壩堤系統而言，兩者差異將隨壩堤大小與分析區域的差異而逐漸增大。

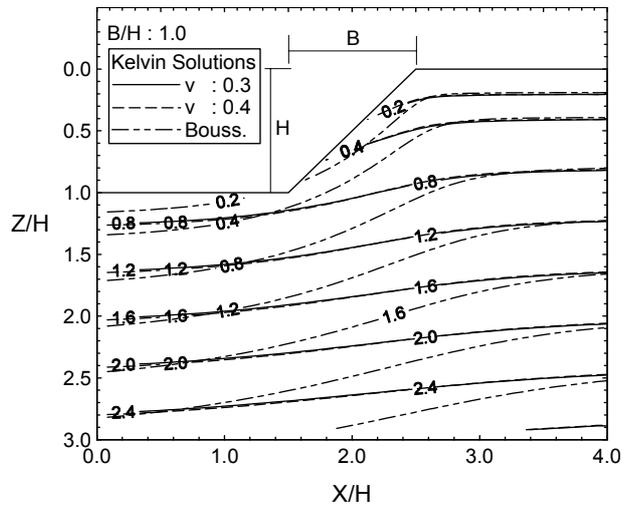


圖 9 正規化垂直應力  $\left(\frac{\sigma_z}{\gamma H}\right)$  等值線分佈狀況

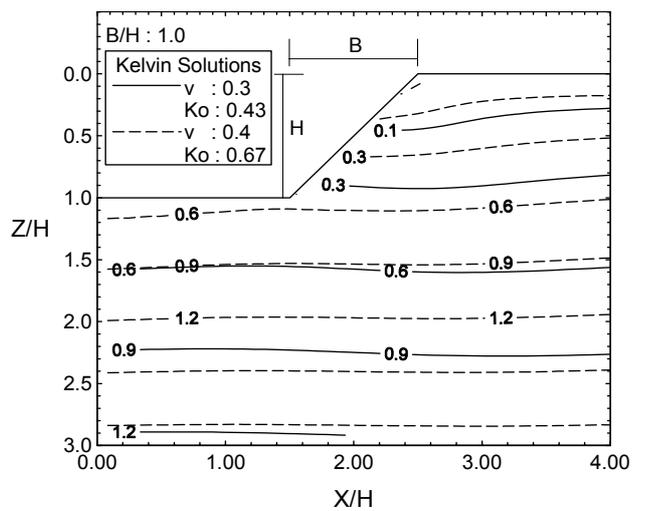


圖 10 Kelvin 解所得之正規化水平應力

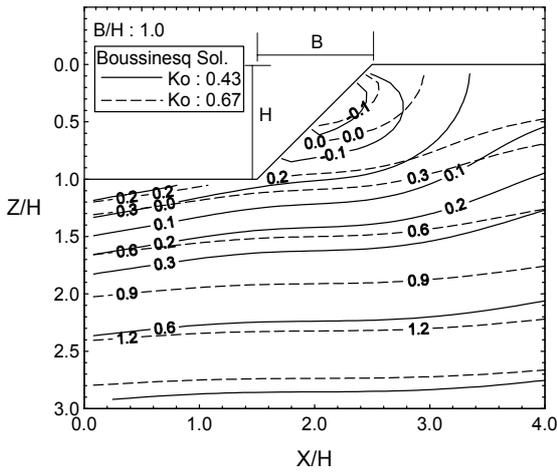


圖 11 Boussinesq 解所得之正規化水平應力  $\left(\frac{\sigma_x}{\gamma H}\right)$  等值線分佈狀況

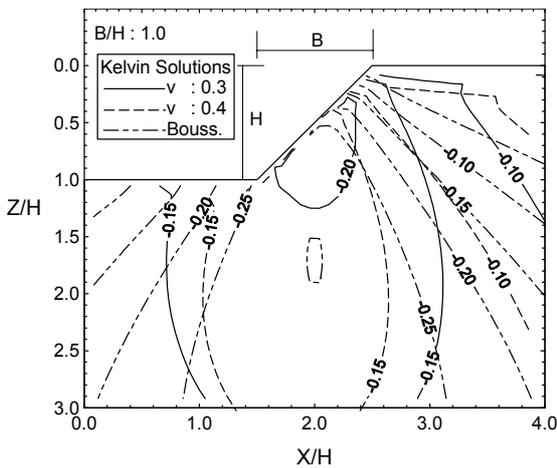


圖 12 正規化剪應力  $\left(\frac{\tau_{xz}}{\gamma H}\right)$  等值線分佈狀況

### 2. 與 Goodman and Brown 解比較

對於平面應變的邊坡穩定應力分析問題，Goodman and Brown 於 1963 年[2]曾利用線彈性理論配合增量建構方式建立其近似解(以下簡稱 G & B 方法)。如圖 13 所示，本研究與 G & B 方法在垂直應力方面所得結果相似，在坡頂部份( $x_1 / z_1 \geq 0$ ;  $x_1, z_1$  定義如圖中所示)不同方法所得結果差異不大，但在靠近邊坡斜面的部份( $x_1 / z_1 \leq 0$ ) G & B 方法的垂直應力值則介於本研究 Kelvin 解與 Boussinesq 解之間。在水平應力方面，如圖 14 所示，Boussinesq 解所得之水平應力最低，其解隨  $K_0$  之減小而減少，而在 Kelvin 解方面，柏松比為 0.3 時，Kelvin 解所得亦較 G & B 方法為低，但在柏松比為 0.4 時，坡頂部份( $x_1 / z_1 \geq 0$ )之 Kelvin 解與 G & B 結果相差不大。圖 15 為 G & B 方法及本研究所建立之剪應力隨  $x_1 / z_1$  比變化之情

形。由圖中顯示，本研究所得之剪應力值均較 G & B 方法所得者為高，而 Kelvin 解在柏松比為 0.4 時將介於 G & B 方法和 Boussinesq 解之間，當柏松比為 0.3 時，Kelvin 解將隨  $x_1 / z_1$  比例增加而趨向於 G & B 方法之解。由於 G&B 方法未考慮柏松比或靜止土壓力係數影響，且係經由分析點上方土層之平面二維重力載重疊加合成，故其於水平應力和剪應力部份的預測值仍有別於開挖模擬之本研究結果。為求更相似的比較，研究將以 FLAC 程式進行對比，詳述如後。

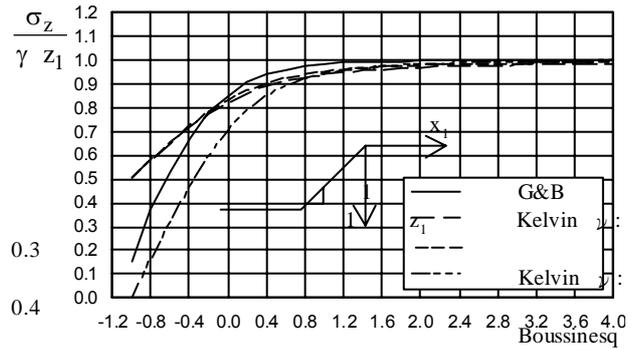


圖 13 正規化垂直應力隨空間尺度  $x_1/z_1$  變化之情形(45° 斜坡)

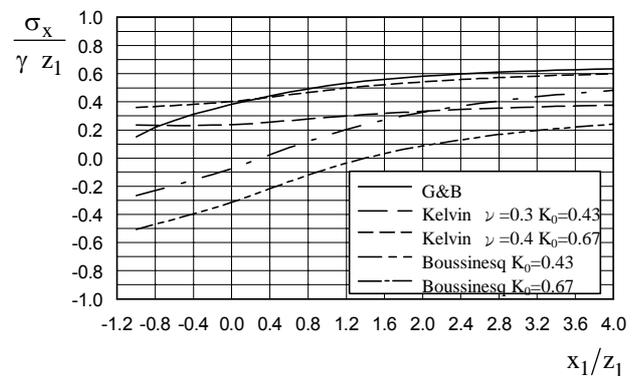


圖 14 正規化水平應力隨空間尺度  $x_1/z_1$  變化之情形(45° 斜坡)

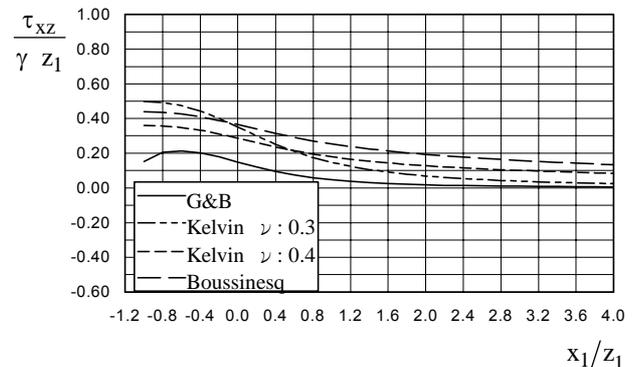


圖 15 正規化剪應力隨空間尺度  $x_1/z_1$  變化之情形(45° 斜坡)

3. FLAC 程式之數值解比較

FLAC[3]為利用外顯有限差分法求解基本運動方程式的數值分析程式。由於該程式之數值特性，其分析範圍必需先行考慮。本研究在探討數值解之收斂性後，決定以 13 倍邊坡寬及 7 倍深之邊坡高度範圍進行分析，邊界均輔以輓支承以模擬其束制性，其程序詳見[8]。

如圖 16 所示，在坡頂下方之土層，不同方法所得之垂直應力值相差不大，但在邊坡斜面及坡下方之土層，Kelvin 解所得之垂直應力值明顯大於 FLAC 分析所得結果，Boussinesq 解在邊坡斜面部份則較 FLAC 結果低，而在坡底的部份，其應力值亦稍大於 FLAC 分析結果。在水平應力方面(圖 17)，當柏松比為 0.4 時(即  $K_0$  為 0.67 時)，在深層部份之 Boussinesq 解將與 FLAC 之結果相近，但在淺層部份則明顯低估。對 Kelvin 解而言，在深層的部份，Kelvin 解則較 FLAC 分析結果為高，相較而言，在邊坡斜面附近，Kelvin 解與 FLAC 所得結果較為接近，而著柏松比的增加，Kelvin 解與 FLAC 所得之結果在淺層及坡面部份的差異逐漸縮小。圖 18 則為不同方法所得之剪應力分佈趨勢。Boussinesq 解所得之剪應力較 FLAC 高估一倍以上，Kelvin 解所得之剪應力雖亦較 FLAC 為高，但其超估之幅度較小，且其與 FLAC 之差異將隨著柏松比之增加而減小。

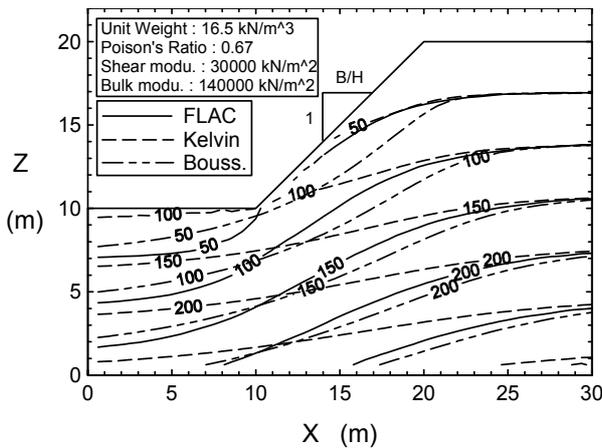


圖 16 垂直應力等值線分佈狀況 (應力單位 kN/m<sup>2</sup>)

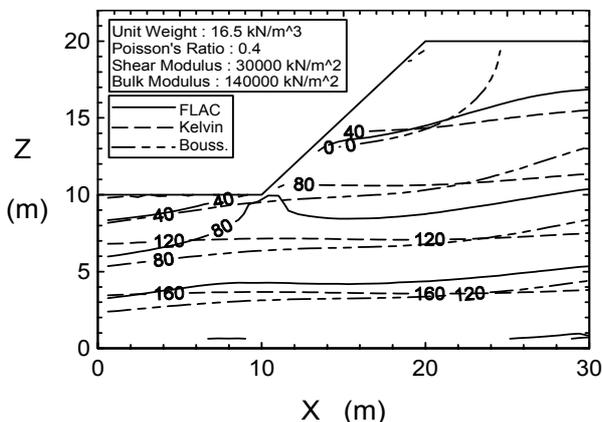


圖 17 水平應力等值線分佈狀況 (應力單位 kN/m<sup>2</sup>)

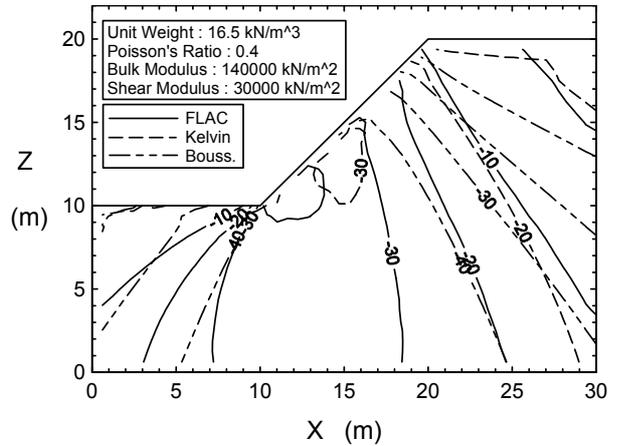


圖 18 剪應力等值線分佈狀況 (應力單位 kN/m<sup>2</sup>)

對於邊坡內部的應力分佈，與其它方法比較之結果，Boussinesq 解在垂直應力方面，與其它方法所得者相近，但水平應力及剪應力則有較大的差異，其主要原因在於本研究在模擬開挖行為時，向上荷重係作用於水平地表，而非作用於邊坡內部或其表面上，因此將高估開挖行為對淺層部份所造成的影響；而與現地應力疊加後，會減低使質點趨於穩定的正向應力，剪應力則因不受土壤自重影響仍然偏高。在 Kelvin 解方面，雖然亦高估開挖行為對淺層部份所造成的影響，但因其應力傳遞之衰減性較高(柏松比影響)，因此，其差異反而較 Boussinesq 解為小，隨柏松比值的增加，其預測結果將愈加趨近其它方法。由此可知，若以 Kelvin 解施用於柏松比值較大的邊坡土層時，依照現行分析模式將可得有效的應力分佈解。

四. 邊坡的穩定性

根據前述對邊坡內部應力分佈所做研究顯示，以 Kelvin 解施用於柏松比值較大的邊坡土層時，可獲致較佳之應力分佈模擬，因此，在評估邊坡內部安全係數分佈時，研究即以 Kelvin 解為基礎評嘗試估理想邊坡之穩定性。由於材料破壞範圍會由局部逐漸擴大，且質點彈塑性行為變化會牽動其相鄰質點的性質，故本研究所評估者應僅為邊坡系統於某特定時刻之穩定性，其整體的安全性仍會與局部區域之破壞潛能乃至整體結構的平均安全係數有互動關係，而非呈現固定值。

1. 影響邊坡安全係數的因素

對於一般的極限平衡法，其邊坡安全係數乃針對假設之特定破壞滑動面分析得來。在本方法中，安全係數的求取則以邊坡內部的網格節點為主，分別計算各節點安全係數，再以其等值線的方式表示之，如圖 19 所示。其安全係數小於 1.0 的部份即代表邊坡所可能發生破壞之潛在區域(此區域內，土壤發展之應力已超過土壤本身的強度)。

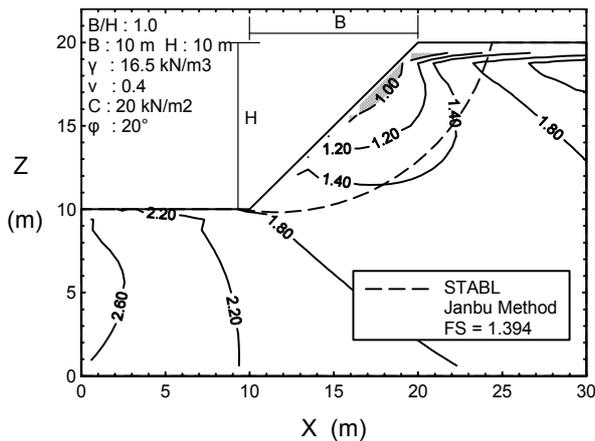


圖 19 範例邊坡之安全係數等值線與 Janbu 法之臨界

由本研究所得之結果顯示，邊坡破壞之發生，係由邊坡斜面上方的部份開始，逐漸向坡趾及邊坡內部擴張，隨著 B/H 比值的減小，其發生破壞之區域則逐漸增大。對於相同規模之邊坡，若其斜坡角愈大，則愈容易發生破壞，且破壞範圍將較深入邊坡的內部。規模愈大之邊坡，愈容易發生破壞，且其破壞範圍亦愈大。

隨著土壤單位重的增加，邊坡安全係數小於 1.0 的區域亦同時擴大，安全係數則逐漸減小。隨著柏松比的增加，邊坡內部的安全係數將逐漸增大，發生破壞的區域相對地減小。土壤的剪力強度可提供土體抵抗滑動與產生破壞的能力。因此，隨著土壤強度的增加，邊坡安全係數小於 1.0 的區域明顯縮小，安全係數亦相對地增大。對於由

純凝聚性土壤 ( $\phi = 0$ ) 所構成的邊坡，本研究在分析時將土層強度參數視為固定值，並未考慮土壤強度隨深度改變之現象，因此深層部份安全係數明顯偏低。對於由砂性土壤所構成的邊坡，由於沒有凝聚力的作用，在圍壓束制較小的地方（邊坡坡頂淺層的部份），土壤的剪應力將高於土壤本身的強度，致使邊坡發生破壞，相關圖示詳見[8]。

## 2. 與 STABL 程式的比較

本研究續與 STABL 程式利用圓弧滑動面分析（包含 Janbu 法及 Bishop 簡化法）所得結果進行比較，以了解破壞潛能評估之可行性。

就安全係數等值線分佈的趨勢而言，本研究所得之邊坡破壞區域與 STABL 程式所得之臨界滑動面在範圍上有相當的差異。不過，由 STABL 程式所得之臨界滑動面安全係數值亦可適當地插入本研究所預估之安全係數等值線分佈範圍中（圖 19）。造成其差別之主要原因係由於本研究並不預先假設破壞滑動面，邊坡內部的安全係數係由分析點之安全係數所建立，對特定破壞滑動面而言，其安全係數並非定值。

以本研究分析方式求取 STABL 程式臨界滑動面所對應之安全係數，將呈大幅度的變化。其所得之安全係數將有 1/2~1/3 的部份低於 STABL 程式所得者（圖 20）。此種局部安全係數偏低的現象，對於柏松比較小之土壤將更為明顯。表 1 及表 2 為在不同的邊界條件及土壤特性時使用 STABL 程式（包含 Janbu 法及 Bishop 法）分析所得之安全係數與本研究依 Kelvin 解沿臨界滑動面所得之平均安全係數之比較。就臨界滑動面的平均安全係數而言，Kelvin 解所得結果與 STABL 程式之預估差異小於 20%。

表 1 Janbu 法與依據其臨界破壞面由本研究所得之安全係數平均值比較

邊坡寬 m	邊坡高 m	單位重 kN/m <sup>3</sup>	柏松比	凝聚力 KN/m <sup>2</sup>	摩擦角 度(°)	Janbu Method	本研究 之結果	差異百 分率
10	10	16.5	0.40	10	20	0.969	1.073	9.69%
10	10	16.5	0.40	20	20	1.394	1.483	6.00%
10	10	18.0	0.40	20	20	1.328	1.468	9.53%
10	10	16.5	0.35	20	20	1.394	1.230	11.76%
10	10	16.5	0.40	20	30	1.716	1.723	0.41%
12	8	16.5	0.40	20	20	1.832	1.757	4.09%

表 2 Bishop 法與依據其臨界破壞面由本研究所得之安全係數平均值比較

邊坡寬 m	邊坡高 m	單位重 kN/m <sup>3</sup>	柏松比	凝聚力 kN/m <sup>2</sup>	摩擦角 度(°)	Bishop Method	本研究 之結果	差異百 分率
10	10	16.5	0.40	10	20	1.016	1.073	5.31%
10	10	16.5	0.40	20	20	1.445	1.504	5.59%
10	10	18.0	0.40	20	20	1.374	1.387	0.93%
10	10	16.5	0.35	20	20	1.445	1.199	17.02%
10	10	16.5	0.40	20	30	1.788	1.723	3.64%
12	8	16.5	0.40	20	20	1.964	1.731	11.86%

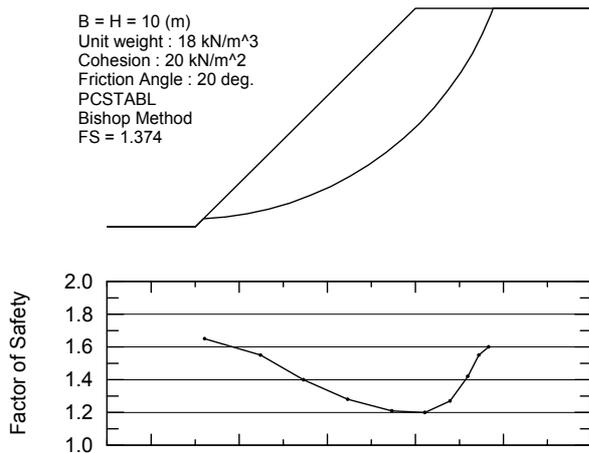


圖 20 安全係數沿 Bishop 簡化法之臨界滑動面變化情形

### 五、結論與建議

本研究係以簡易之彈性力學公式及疊加概念概略地模擬開挖水平地表後殘留邊坡之內部應力狀況及其穩定性，由於開挖區解壓作用力機制和自由邊界條件等特性之限制，研究旨在建立另類分析模式供工程師參考比較，其分析精確性仍待強化以建立更為合理的分析結果。研究主要觀察和建議如下：

1. 對於開挖行為的模擬，由於 Kelvin 解與 Boussinesq 解原始公式的假設不同，Kelvin 解所得值皆較 Boussinesq 解為低。由於受到疊加模式的限制，外加荷重係作用於水平地表，因此本研究將高估邊坡坡面內緣的應力增量。
2. 利用 Boussinesq 解所得之應力值在與其它相關方法比較後，僅垂直應力與其它方法之結果較為接近。而 Kelvin 解所得應力差異則較 Boussinesq 解小，對於柏松比值較大的土層，Kelvin 解有較佳的模擬效果。
3. 邊坡安全係數將隨著邊坡寬度與高度之比值、邊坡規模、土壤單位重等之增加而減小，另隨著柏松比、土壤的凝聚力及摩擦角的增加而增加。
4. 以 Kelvin 解所得之應力分佈趨勢配合莫爾庫倫破壞條件，可大致地顯示邊坡的穩定性。若以 STABL 程式所建議的臨界滑動面而論，研究目前所得之安全係數平均值與其誤差將小於 20%。
5. 本分析方法由於受限於將開挖區土方重力以集中荷重方式置於其頂緣（也即水平地表），故在邊坡之表面仍有曳引力存在，無法真切地滿足邊界條件。為解決此一問題，Mindlin 解與疊代法則的引用為研究下一階段所欲達成的目標。

### 參考文獻

1. Carpenter, J. R., PCSTABL5 User's Manual, Report, Joint Highway Research Project, Purdue University, Indiana (1985).
2. Goodman, L. E. and Brown, C. B., "Dead Load

Stresses and the Instability of Slopes," *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 89, SM3, pp.103-134 (1963).

3. ITASCA Consulting Group, FLAC User's Manual, Version 3.0, ITASCA Consulting Group, Inc., Minnesota (1992).
4. Perloff, W. H. , Baladi, G. Y. and Harp, M. E. , "Stress Distribution within and under Long Elastic Embankments," *Highway Research Record*, No.181, p.12 (1967).
5. Poulos, H. G. and Davis, E. H., *Elasticity Solutions for Soil and Rock Mechanics* , John Wiley & Sons , New York (1974).
6. Sowers, G. F., *Introductory Soil Mechanics and Foundations : Geotechnical Engineering* , 4th edition, Macmillan Publishing, New York (1979).
7. Timoshenko, S. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York.
8. 黃建祥,「土壤邊坡應力分析與破壞潛能解析解之建立」, 碩士論文, 私立淡江大學土木工程研究所, 中華民國臺灣 (1996).

**Manuscript Received: June 13, 1997**

**Revision Received: Aug. 6, 1997**

**and Accepted: Oct. 1, 1997**