

## 微觀跟車與巨觀交通流動模式之數學轉換

### The Mathematical Transformation between Microscopic Car-Following Theory and Macroscopic Traffic Stream Models

范俊海(Chun-Hai Fan)<sup>1</sup>

#### 摘要

車流模式是分析交通現象最重要的基礎，而其中以微觀的跟車理論與巨觀的交通流動模式使用頻率最高，然而，這兩種模式在收集資料上有很大的差異，對於交通流動模式來說，在資料的取得是比較容易的，但是對於跟車模式來說，卻變得相當地困難。因此本文試圖透過數學上的轉換，可快速地解決跟車模式的建立難題。

**關鍵詞：**跟車理論、交通流動模式

#### Abstract

*Traffic flow model is the most important basis for the analysis of traffic phenomena, of which the microscopic car-following theory and macroscopic traffic stream model using the highest frequency. However, these two models have very different differences in the data collected. For the traffic stream model, the acquisition of the data is relatively easy, but for the car-following model, it has become quite difficult. Therefore, this paper attempts to solve the problem of building with the car-following model by means of mathematical transformation.*

**Keywords:** Car-following Theory, Traffic Stream Model

#### 一、前言

車流模式在交通工程上，扮演非常重要的角色，比如交通控制的應用、交通安全的推估、容量的預測以及網路流量的分析等等議題上，都是必備的基礎。而對於車流模式的建構，從不同的角度，會有不同的理論對應，諸如車流統計分配模式(Statistical distribution)、排隊理論的車流模型(Queueing Theory)、衝擊波理論(Shock Wave Theory)、水利動力學理論(Hydrodynamics Theory)、交通流動理論(Traffic Stream Theory)以及微觀的跟車理論(Car-Following Theory)等等，都是常被用到的基礎理論模型。在計算科技的進步，過去難於克服的模擬的計算消耗，已被完全地征服，然而現實世界中，若要快速取得車輛間的反應時間以及間距，仍需要一些感測科技的提升。

本文以最被常用的兩種理論，巨觀的交通流動理論以及微觀的跟車理論，探討其理論互換的推導，以建立日後應用的基礎。雖然在實質上的車流活動上，還是充滿地隨機性，但是也提供了研究的動機。

<sup>1</sup> 淡江大學運輸管理系副教授 (聯絡地址: 新北市淡水區英專路 151 號淡大運管系, 電話: 02-2621-5656 ext 2080, E-mail: chunhai@mail.tku.edu.tw)。

## 二、交通流動模式(Traffic Stream Model)

### 2.1 基本定義

在車流中，以流量(Q, veh/hr)、速度(U, km/hr)以及密度(K, veh/km)三個為主要的參數，而這三個參數也構成很重要的函數關係如下式所示：

$$Q = K * U \quad (1)$$

上式(1)是車流模型的基本關係。

由於式(1)的啟發，學者們開始觀察速度與密度的互動現象，當密度低的時候，車輛的速度則是高的，而當密度高的時候，相對來說，車輛的速度則是低的。其中速度與密度的關係成為關鍵的研究對象，大量的數據被收集，可以把其結果分為兩個大分類：線性關係與非線性關係。

下列將各個參數適當定義說明：

$U_f$  = 自由流之下的速度(free flow speed)

$K_j$  = 擁擠下的密度 (jam density)

$U_o$  = 在容量下的速度或稱最佳之速度(optimum speed)

$K_o$  = 在容量下的密度或稱最佳之密度(optimum density)

$Q_o$  = 代表容量(capacity)

### 2.2 線性模式

在早期 Greenshield 發現密度與速度的關係為線性的，若以  $U_f$  與  $K_j$  為邊界值的話，則我們就可以得到下列公式：

$$U = U_f - \frac{U_f}{K_j} K = U_f \left(1 - \frac{K}{K_j}\right) \quad (2)$$

$$K = K_j - \frac{K_j}{U_f} U = K_j \left(1 - \frac{U}{U_f}\right) \quad (3)$$

而把上式(2)(3)，代入式(1)中，則可以得到

$$Q = U_f \left(K - \frac{K^2}{K_j}\right) \quad (4)$$

$$Q = K_j \left(U - \frac{U^2}{U_f}\right) \quad (5)$$

而如果把式(4)(5)，以微分方式求得最佳化之速度( $U_o$ )以及密度( $K_o$ )，則可得

$$U_o = U_f / 2$$

$$K_o = K_j / 2$$

$$Q_o = K_o * U_o = U_f * K_j / 4$$

### 2.3 非線性模式

在文獻 Adolf D. May(1990)所提到幾個非線性的模式，包括有 Greenberg、Underwood、Northwestern、Drew、以及 Pipes-Munjjal 等模型，加上一般化的模式，或許可以說有 6 種模型狀態。

#### (1) Greenberg's Model

$$U = U_o \ln\left(\frac{k_j}{k}\right) \quad (6)$$

其中  $u_0$  = 最佳的速度(容量時的速度)

(2) Underwood's Model

$$U = U_f e^{-k/k_o} \quad (7)$$

其中  $k_0$  = 最佳的密度(容量時的密度)

(3) Northwestern's Model

$$U = U_f e^{-1/2(k/k_o)^2} \quad (8)$$

(4) Drew Model

$$U = U_f \left[ 1 - \left( \frac{K}{K_j} \right)^{(n+1)/2} \right] \quad (9)$$

(5) Pipes-Munjaj Model

$$U = U_f \left[ 1 - \left( \frac{K}{K_j} \right)^n \right] \quad (10)$$

(6) Generalized speed-density equation

$$U^{1-m} = U_j^{1-m} \left[ 1 - \left( \frac{K}{K_j} \right)^{l-1} \right] \quad (11)$$

$m, l$  = 任意之參數

何以出現這麼多非線性的模式，因為在大量數據中，發現資料的整體型態並非完全是線性的走向，尤其在密度較低的情況下，速度並沒有迅速反應來變動，如下圖 1 所示。

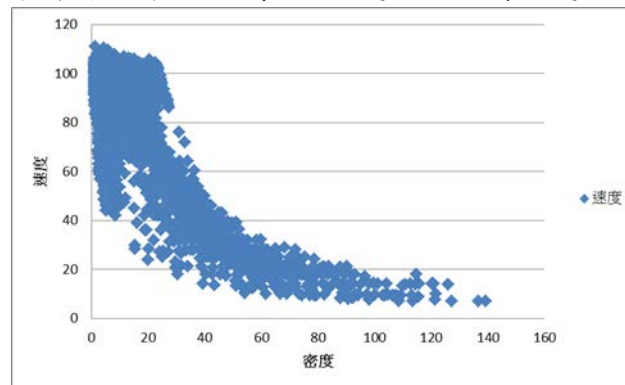


圖 1 ETC 資料庫取樣結果圖

### 三、跟車理論(Car-Following Theory)

#### 3.1 基本界定

跟車理論是微觀車輛的運動描述理論，主要的參數包括加速度(Acceleration)、相對位置(Relative Position)、相對速度(Relative Velocity)、以及個別車輛的速度(Velocity)，因此為了建構該車輛的運動反應模型，先行界定車輛行經路徑的位置，依 X 軸為建構的基礎，並且在該變數下附註車輛的編號，以作為特定車輛的參數表示。

$X_n(t)$  = 表示第 n 輛車在 t 時刻的位置  
 $X_{n+1}(t)$  = 表示第 n+1 輛車在 t 時刻的位置  
 $\dot{X}_n(t)$  = 表示第 n 輛車在 t 時刻的速度  
 $\dot{X}_{n+1}(t)$  = 表示第 n+1 輛車在 t 時刻的速度  
 $\ddot{X}_n(t)$  = 表示第 n 輛車在 t 時刻的加速度  
 $\ddot{X}_{n+1}(t)$  = 表示第 n+1 輛車在 t 時刻的加速度

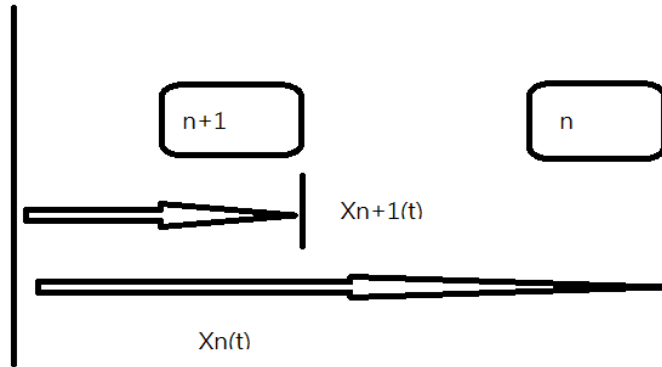


圖 2 車輛間距示意圖

### 3.2 GM 的跟車模型

GM(General Motor)通用公司發展了系列的跟車模型，其最重要的觀念乃是依據駕駛者的敏感度以及外在資訊的刺激，引起車輛反應的現象。而對於車輛的反應最直接的是速度的改變，也就是加速度的顯現，因此其模型的應變數就是加速度，而自變數的參數則以相對位置或相對速度的參數來表現，所以把其五代的模型分述於下：

$$\text{GM I Model} \quad \ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = \alpha (\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)) \quad (12)$$

$$\text{GM II Model} \quad \ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = \alpha_1 \left( \dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t) \right) + \alpha_2 \left( X_n(t) - X_{n+1}(t) \right) \quad (13)$$

$$\text{GM III Model} \quad \ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = \frac{\alpha_0}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))} (\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)) \quad (14)$$

$$\text{GM IV Model} \quad \ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = \frac{\alpha \dot{X}_{n+1}(t + \Delta t)}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))} (\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)) \quad (15)$$

$$\text{GM V Model} \quad \ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = \frac{\alpha [\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t)]^m}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))^l} (\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)) \quad (16)$$

其中有關於  $\alpha, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha'$  都是泛指駕駛敏感度的反應現象。

### 3.3 視覺因子的跟車模式

從駕駛者的角度觀察車輛的靠近以及遠離，也會影響視覺角度的變化，如果以  $\theta$  代表視角，而以  $W$  代表車寬， $L$  代表了前車長，以  $h$  代表了車頭距。

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{W}{h} \quad (17)$$

$$h = X_n(t) - X_{n+1}(t)$$

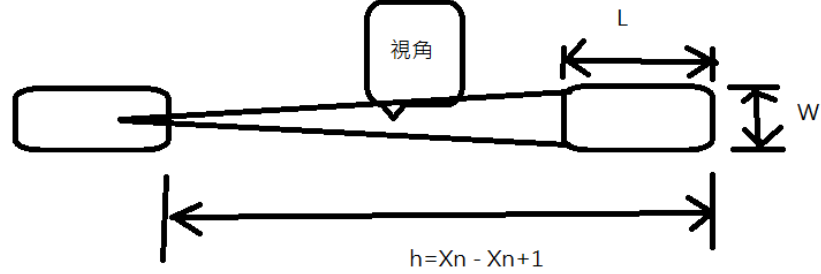


圖 2 視覺因子的跟車圖

$$\theta = 2 \tan^{-1}\left(\frac{W}{h}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2 \left[ \frac{1}{1 + \left(\frac{W}{h}\right)^2} \right] \frac{\frac{dW}{dt}h - \frac{dh}{dt}W}{h^2} = 2 \frac{-W}{h^2 + W^2} \left(\frac{dh}{dt}\right) \quad (18)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -2Wh^{-2} \left(\frac{dh}{dt}\right) \quad (19)$$

根據視角與駕駛的反應，則當角度變大時，表示車輛靠近，駕駛會採取剎車的動作，而當角度變小時，表示前車遠離，以跟車特質會採取加速的動作，因此我們可以發現角度與加速度呈現反向的數學作用。

$$\ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = c(-\dot{\theta}) = -c \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \quad (20)$$

$$\ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = 2cW \frac{(\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t))}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))^2} \quad (21)$$

式(21)是從視覺角度所推估出來的跟車模式。

### 3.4 三輛車的跟車現象

以駕駛的經驗，會發現跟車之車輛常常會依據前 1 車以及前 2 車之動態，而進行車輛行為的調整。

#### 1) 線性模式

$$\ddot{X}_{n+2}(t + \Delta t) = c_1(\dot{X}_{n+1}(t) - \dot{X}_{n+2}(t)) + c_2(\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+2}(t)) \quad (22)$$

#### 2) 電腦模擬模式

Fox 與 Lehman 提出一模式如下：

$$\ddot{X}_{n+2}(t + \Delta t) = \alpha_1 \dot{X}_{n+2}(t + \Delta t) \left\{ \frac{W_1(\dot{X}_{n+1}(t) - \dot{X}_{n+2}(t))}{(X_{n+1}(t) - X_{n+2}(t))^2} + \frac{W_2(\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+2}(t))}{(X_n(t) - X_{n+2}(t))^2} \right\} \quad (23)$$

$$1 = W_1 + W_2$$

## 四、模式數學轉換

### 4.1 轉換的參數討論

在巨觀的參數上有關於密度與速度，如何與微觀的參數轉換呢？所謂密度指的是單位距離內有多少的車輛稱之，其單位為 veh/km 或 veh/mile，然而在微觀的參數上相對的位置又稱之為間距(Headway)，其單位為 m/veh or ft/veh，若把 1km = 1000 m 或 1mile = 5280 ft，若忽略單位問題，我們可以得到下列的關係式：

$$K = \frac{1}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))} \quad (24)$$

$$U = \dot{X}_n(t) \quad (25)$$

### 4.2 模式轉換

#### 4.2.1 GM 跟車模式轉換成交通流模式

以 GM 的跟車模式可分為兩大群，GM I、GM II、GM IV 以及 GM V 為一群，而 GM III 可視為另外一群，跟車模式經過積分後可轉換為巨觀的模式。

##### 1) GM I、GM II、GM IV 以及 GM V

我們以 GM V 為代表

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) &= \frac{\alpha[\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t)]^m}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))^l} (\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)) \\ \frac{\ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t)}{[\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t)]^m} &= \frac{\alpha(\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t))}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))^l} \\ \frac{d[\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t)]}{dt} &= \frac{\alpha d[X_n(t) - X_{n+1}(t)]}{dt} \\ \frac{[\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t)]^m}{dt} &= \frac{(X_n(t) - X_{n+1}(t))^l}{dt} \\ \frac{d[\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t)]}{[\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t)]^m} &= \frac{\alpha d[(X_n(t) - X_{n+1}(t))]}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))^l} \end{aligned} \quad (26)$$

兩邊同時積分

$$\int [\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t)]^{-m} d[\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t)] = \alpha \int [X_n(t) - X_{n+1}(t)]^{-l} d[X_n(t) - X_{n+1}(t)] + \delta \quad (27)$$

$$[\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t)]^{-m+1} = \alpha [X_n(t) - X_{n+1}(t)]^{-l+1} + \delta$$

轉換成巨觀符號，並考慮邊界值  $U_f$  與  $K_j$ 。

則式(27)可以下式表示

$$U^{-m+1} = \alpha K^{-l+1} + \delta$$

$$K = 0, U = U_f$$

$$\delta = U_f^{-m+1}$$

$$U = 0, K = K_j \quad (28)$$

$$0 = \alpha K_j^{-l+1} + U_f^{-m+1}$$

$$\alpha = \frac{-U_f^{-m+1}}{K_j^{l-1}}$$

我們把參數代入式中

$$U^{1-m} = \frac{-U_f^{1-m}}{K_j^{l-1}} K^{l-1} + U_f^{1-m} \quad (29)$$

$$U^{1-m} = U_f^{1-m} \left[ 1 - \left( \frac{K}{K_j} \right)^{l-1} \right]$$

對於式(29)的討論，可以依據 m 以及 l 的值，轉換為各種跟車公式。

當 m=0 且 l=0 時，則就可以表示 GM I 與 GM II 的轉換。

當 m=1 且 l=1 時，則就可以表示 GM IV 的轉換。

## 2) GM III 與 Greenberg 的轉換

GM III 的模式如下

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) &= \frac{\alpha_0}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))} (\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)) \\ \frac{d[\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t)]}{dt} &= \alpha_0 \frac{\frac{d[X_n(t) - X_{n+1}(t)]}{dt}}{[X_n(t) - X_{n+1}(t)]} \end{aligned} \quad (30)$$

$$d[\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t)] = \alpha_0 [X_n(t) - X_{n+1}(t)]^{-1} d[X_n(t) - X_{n+1}(t)]$$

兩邊同時積分

$$\int d[\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t)] = \alpha_0 \int [X_n(t) - X_{n+1}(t)]^{-1} d[X_n(t) - X_{n+1}(t)] + \delta \quad (31)$$

$$\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = \alpha_0 \ln[X_n(t) - X_{n+1}(t)] + \delta$$

轉換成巨觀符號，並考慮邊界值  $U_f$  與  $K_j$ 。

$$U = \alpha_0 \ln\left(\frac{1}{K}\right) + \delta \quad (32)$$

$$U = \delta - \alpha_0 \ln(K)$$

當  $U=0$  時， $K=K_j$

$$\delta = \alpha_0 \ln(K_j)$$

$$U = \alpha_0 \ln\left(\frac{K_j}{K}\right) \quad (33)$$

$$Q = K * U$$

$$Q = \alpha_0 K \ln\left(\frac{K_j}{K}\right)$$

引入  $U_0$  與  $K_0$  的概念

當  $\frac{\partial Q}{\partial K} = 0$  時  $K=K_0$ ，因此

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha_0 \ln\left(\frac{K_j}{K}\right) + \alpha_0 K \frac{K}{K_j} \frac{K \frac{\partial K_j}{\partial K} - K_j \frac{\partial K}{\partial K}}{K^2} = 0 \quad (34)$$

$$\alpha_0 \ln\left(\frac{K_j}{K_o}\right) - \alpha_0 = 0$$

$$\ln\left(\frac{K_j}{K_o}\right) - 1 = 0$$

$$K_o = \frac{K_j}{e}$$

當  $K=K_o$  時，則  $U=U_o$

代入式(33)

$$\alpha_0 = U_o$$

最後可得到 Greenberg 公式

$$U = U_o \ln\left(\frac{K_j}{K}\right) \quad (35)$$

因此而得證。

### 3) 視覺因子跟車模式與 Greenshield's 的轉換

視覺因子跟車模式可寫成下式：

$$\ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = 2cW \frac{(\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t))}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))^2}$$

兩邊同時積分

$$U = aK + b$$

帶入邊界值，可求出線性模式如下

$$U = U_f - \frac{U_f}{K_j} K$$

#### 4.2.2 從非線性交通流模式轉換成跟車模式

在非線性交通流模式中，只有 Underwood's Model 及 Northwestern's Model 兩模式，無法馬上從觀察中得到  $m$  及  $l$  的通用模式互換，所以在下面特別加以討論。

##### 1) Underwood's Model 之轉換

Underwood's Model 的公式如下

$$U = U_f e^{-k/k_o}$$

$$\frac{U}{U_f} = e^{-k/k_o}$$

$$\ln\left(\frac{U}{U_f}\right) = -\frac{K}{K_o}$$

$$\ln U - \ln U_f = -\left(\frac{1}{K_o}\right)K \quad (36)$$

兩邊同時微分



$$\ln U - \beta = \gamma K$$

$$\frac{d(\ln U)}{dt} = \gamma \frac{dK}{dt} \quad (37)$$

$$\frac{1}{U} \frac{dU}{dt} = \gamma \frac{dK}{dt}$$

進行微觀處理

$$\frac{\ddot{X}_{n+1}(t+\Delta t)}{\dot{X}_{n+1}(t+\Delta t)} = \gamma \frac{d(X_n(t) - X_{n+1}(t))^{-1}}{dt}$$

$$\frac{\ddot{X}_{n+1}(t+\Delta t)}{\dot{X}_{n+1}(t+\Delta t)} = \gamma(-1)[X_n(t) - X_{n+1}(t)]^{-2} \frac{d[X_n(t) - X_{n+1}(t)]}{dt} \quad (38)$$

$$\frac{\ddot{X}_{n+1}(t+\Delta t)}{\dot{X}_{n+1}(t+\Delta t)} = \frac{\alpha[\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)]}{[X_n(t) - X_{n+1}(t)]^2}$$

最後我們可得到

$$\ddot{X}_{n+1}(t+\Delta t) = \frac{\alpha \dot{X}_{n+1}(t+\Delta t)}{[X_n(t) - X_{n+1}(t)]^2} [\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)] \quad (39)$$

由此可見 Underwood's Model，也可以用 m=1 與 l=2 的情況下得到好的轉換。

## 2) Northwestern's Model 之轉換

Northwestern's Model 的公式如下

$$U = U_f e^{-1/2(k/k_o)^2}$$

$$\ln \frac{U}{U_f} = -\frac{1}{2} \left( \frac{K}{K_o} \right)^2 \quad (40)$$

兩邊同時微分

$$\ln U - \phi = \varphi K^2$$

$$\frac{d \ln U}{dt} = \varphi \frac{dK^2}{dt} \quad (41)$$

$$\frac{1}{U} \frac{dU}{dt} = \varphi(2K) \frac{dK}{dt}$$

進行微觀處理

$$\frac{\ddot{X}_{n+1}(t+\Delta t)}{\dot{X}_{n+1}(t+\Delta t)} = 2\varphi \frac{1}{[X_n(t) - X_{n+1}(t)]} (-1)[X_n(t) - X_{n+1}(t)]^{-2} \frac{d[X_n(t) - X_{n+1}(t)]}{dt}$$

整理後

$$\ddot{X}_{n+1}(t+\Delta t) = \frac{\alpha \dot{X}_{n+1}(t+\Delta t)}{[X_n(t) - X_{n+1}(t)]^3} [\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)] \quad (42)$$

由此可見 Northwestern's Model，也可以用 m=1 與 l=3 的情況下得到好的轉換。

### 4.2.3 從其他函數轉換成跟車模式

在 ETC 文中，把 U-K 函數推估成下列一覽表。

表 1 方程式群一覽表

群組	應變數	自變數	方程式	備註
U=f(k)	u	k	U=a+b*k	Greenshield's
			U=a+b*ln(k)	Greenberg's
			U=a+b*K+c*k <sup>2</sup>	(uk2)
			U=a+b*k+c*k <sup>2</sup> +d*k <sup>3</sup>	(uk3)
K=f(u)	k	u	K=a+b*u	Greenshield's
			K=a+b*ln(u)	Underwood's
			K=a+b*u+c*u <sup>2</sup>	(ku2)
			K=a+b*u+c*u <sup>2</sup> +d*u <sup>3</sup>	(ku3)
K <sup>2</sup> =f(u)	K <sup>2</sup>	u	K <sup>2</sup> =a+b*u	(k2u)
			K <sup>2</sup> =a+b*ln(u)	Northwestern's
			K <sup>2</sup> =a+b*u+c*u <sup>2</sup>	(K2u2)
			K <sup>2</sup> =a+b*u+c*u <sup>2</sup> +d*u <sup>3</sup>	(K2u3)

1) 如果把公式(uk2)進行轉換

$$U = a + bK + cK^2$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d(a + bK + cK^2)}{dt} = \frac{da}{dt} + \frac{d(bK)}{dt} + \frac{d(cK^2)}{dt} \quad (43)$$

$$\frac{dU}{dt} = b \frac{dK}{dt} + c(2K) \frac{dK}{dt}$$

$$\ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = b(-1)(X_n(t) - X_{n+1}(t))^{-2} [\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)] + 2c(X_n(t) - X_{n+1}(t))^{-3} [\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)]$$

$$\ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = \alpha_1 \frac{[\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)]}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))^2} + \alpha_2 \frac{[\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)]}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))^3}$$

$$\ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = \frac{[\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)]}{\beta_1(X_n(t) - X_{n+1}(t))^2 + \beta_2(X_n(t) - X_{n+1}(t))^3}$$

2) 若是以(uk3)進行轉換

$$U = a + bK + cK^2 + dK^3$$

則可得下式的推導

$$\ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = \frac{[\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)]}{\gamma_1(X_n(t) - X_{n+1}(t))^2 + \gamma_2(X_n(t) - X_{n+1}(t))^3 + \gamma_3(X_n(t) - X_{n+1}(t))^4} \quad (44)$$

3) 若是以(ku2)進行轉換

$$K = a + bU + cU^2$$

則

$$\frac{dK}{dt} = b \frac{dU}{dt} + c \frac{dU^2}{dt}$$

$$\frac{d(X_n(t) - X_{n+1}(t))^{-1}}{dt} = (b + 2c\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t))\ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t)$$

$$(-1)(X_n(t) - X_{n+1}(t))^{-2}[\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)] = (b + 2c\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t))\ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) \quad (45)$$

$$\ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = \frac{-1}{(b + 2c\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t))} \frac{[\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)]}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))^2}$$

4) 若是以(ku3)進行轉換

$$K = a + bU + cU^2 + dU^3$$

則可得

$$\ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = \frac{-1}{(b + 2c\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t) + 3d\dot{X}_{n+1}^2(t + \Delta t))} \frac{[\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)]}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))^2} \quad (46)$$

5) 若是以(k2u)進行轉換

$$K^2 = a + bU$$

$$2K \frac{dK}{dt} = b \frac{dU}{dt}$$

$$-2 \frac{[\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)]}{[X_n(t) - X_{n+1}(t)]^3} = b\ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) \quad (47)$$

$$\ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = \alpha \frac{[\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)]}{[X_n(t) - X_{n+1}(t)]^3}$$

6) 若是以(k2u2)進行轉換

$$K^2 = a + bU + cU^2$$

$$\ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = \frac{-1}{(b + 2c\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t))} \frac{[\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)]}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))^3} \quad (48)$$

7) 若是以(k2u3)進行轉換

$$K^2 = a + bU + cU^2 + dU^3$$

$$\ddot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = \frac{-1}{(b + 2c\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t) + 3d\dot{X}_{n+1}^2(t + \Delta t))} \frac{[\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)]}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))^3} \quad (49)$$

### 4.3 討論

在前面幾節的轉換公式中，從數學的角度上，我們可以觀察出跟車模式的兩端，一端為加速度的反應，另外一端為相對速度的變數，而產生變化都在敏感度的這一項，因此當交通狀況改變時，駕駛者集體的反應，卻是跟車模式最主要的關鍵，若要把此敏感度係數歸納，也可以得到下列幾種：

1)  $\alpha = \text{常數}$

$$2) \alpha = \frac{\alpha_0}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))}$$

$$3) \alpha = \frac{\alpha'\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t)}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))}$$

$$4) \alpha = \frac{\alpha'\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t)}{[X_n(t) - X_{n+1}(t)]^2}$$

$$5) \alpha = \frac{\alpha''\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t)}{[X_n(t) - X_{n+1}(t)]^3}$$

$$6) \alpha = \frac{1}{\beta_1(X_n(t) - X_{n+1}(t))^2 + \beta_2(X_n(t) - X_{n+1}(t))^3}$$

$$7) \alpha = \frac{1}{\gamma_1(X_n(t) - X_{n+1}(t))^2 + \gamma_2(X_n(t) - X_{n+1}(t))^3 + \gamma_3(X_n(t) - X_{n+1}(t))^4}$$

$$8) \alpha = \frac{-1}{(b + 2c\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t))} \frac{1}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))^2}$$

$$9) \alpha = \frac{-1}{(b + 2c\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t) + 3d\dot{X}_{n+1}^2(t + \Delta t))} \frac{1}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))^2}$$

$$10) \alpha = \frac{\alpha'}{[X_n(t) - X_{n+1}(t)]^3}$$

$$11) \alpha = \frac{-1}{(b + 2c\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t))} \frac{1}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))^3}$$

$$12) \alpha = \frac{-1}{(b + 2c\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t) + 3d\dot{X}_{n+1}^2(t + \Delta t))} \frac{1}{(X_n(t) - X_{n+1}(t))^3}$$

從上面的歸納中，深刻地體會敏感度的表現，與車輛的速度以及相對位置的影響有密切的關係，這也是必須加以研究的重點。

## 五、結論

本文的數學轉換的推導，成功地把現有常用的跟車模式與交通流模式對接，可以從巨觀的觀察來界定微觀的行為，減少觀測資料的難度，也是本文的貢獻。另外從理論的探索，發現車輛速度在某種情境下，的確會影響駕駛心理的反應，因此合理的推論，當速限改變時，駕駛的敏感度也會發生改變，致使容量狀況也跟著變異。雖然尚無資料能來佐證這項推理，不過卻也留下可努力的空間。

## 參考文獻

1. A. D. May, "Traffic Flow Fundamentals", 1990。
2. 范俊海、許芝綾，利用 ETC 數據在車流模式之實證研究，第 24 屆海峽兩岸都市交通學術研討會論文。
3. Pipes, L. C., and Wojcik, C. K., A contribution to theory of traffic flow. SAE Conference Proceeding – Analysis and Control of Traffic Flow Symposium (Detroit, 1968), pp. 53-60.
4. Fox, P., and Lehman, F. G., Safety in Car-Following –A Computer Simulation, Newark College of Engineering, New Jersey (1967), 173 pp.