

科技部補助專題研究計畫成果報告 期末報告

移動機電載荷對壓電複合材料之暫態影響與波傳研究

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：MOST 104-2221-E-032-031-
執行期間：104年08月01日至105年07月31日
執行單位：淡江大學航空太空工程學系

計畫主持人：應宜雄

計畫參與人員：大專生-兼任助理人員：黃茂昌
大專生-兼任助理人員：韋雨雯
大專生-兼任助理人員：羅曼文
大專生-兼任助理人員：葉宗洽
大專生-兼任助理人員：羅佳芸
大專生-兼任助理人員：朱郁曉
大專生-兼任助理人員：范馨予

中華民國 105 年 10 月 26 日

中文摘要：移動負載的相關應用很多，例如飛機於跑道上降落、火車在鐵軌上移動、車輛在橋樑上運行、子彈從槍管內射出以及各項導軌的運動等，本計畫成功解析了移動點負載對壓電材料之暫態效應與波傳研究。首先獲得了功能性壓電材料受移動「反平面」機械點載荷與移動平面電位移點載荷之暫態波傳問題，再解析壓電材料受移動「平面」機械點載荷與移動平面電位移點負載之暫態響應，兩個問題都求得了兩次拉普拉斯轉換域下之全場解析解。本計畫利用數值逆轉換法來計算長時間的暫態響應，並計算不同負載移動速度、觀察點位置與功能性梯度常數下之暫態應力與電位移結果並做詳細之討論與比較。

中文關鍵詞：功能性梯度、壓電、波傳、點負載、暫態、二維

英文摘要：In structure dynamics and fracture mechanics, various applications of the moving load problem have been implemented. For examples, vehicles that pass bridges, trains on the track, bullets inside the gun, and guideways, etc. The proposal was to investigate the transient response of piezoelectric materials due to concentrated moving loading. First the transient wave behavior of a piezoelectric strip subjected to moving anti-plane mechanical and moving in-plane electric displacement impacts was considered. Then the transient analysis of the same piezoelectric strip, but subjected to moving in-plane electromechanical concentrated impacts was performed. The analytical solutions for the structures were obtained in double Laplace transform domain. Durbin's method was used to implement the numerical inversion of Laplace transform. The numerical results were evaluated and discussed in detail for both problems.

英文關鍵詞：functionally graded, piezoelectric, wave propagation, concentrated impact, transient, two-dimensional

一、前言

移動負載的相關應用很多，例如飛機在跑道上降落、火車在鐵軌上移動、車輛在橋樑上運行、子彈從槍管內射出以及各項導軌的運動等。研究移動負載的問題通常分為穩態問題和暫態問題，雖然穩態問題較容易分析，但大多數的實際應用卻都是暫態形式的負載；由於暫態問題解析的困難度，相關文獻也相對較少。Payton(1964)首先研究了無窮域內承受移動點載荷的暫態響應，接著，Gakenheimer and Miklowitz (1969)獲得了半無窮域表面受移動負載的暫態解。近年來也有不少學者針對半無窮域表面受移動負載的暫態問題作了研究，如 Bakker et al.(1999)、de Hoop (2001)與 Kooij(2010)等，且大部分是將其應用在高速鐵路的問題上。但要如何將移動負載所產生的所有暫態波（包括不同材料界面間的反射與折射波）準確地計算一直是學者努力的方向，也是實際應用時重要的課題。

關於移動負載的應用，無論是在飛機跑道的降落或高速鐵路的運載，大多屬於半無窮域或多層複合材料的問題，此類問題廣泛被稱為層狀結構(layered medium)。層狀結構承受動力負載一直是工程與軍事上重要的課題，其應用範圍涵蓋了航太、機械、電子、地質、海洋以及土木等相關範疇。如前所述，動力負載研究的形式可分為穩態與暫態兩種，其中暫態的問題即是屬於應力波傳的研究，在實際的應用上，例如感測器的偵測與制動器的回饋、地殼內部的結構分析、非破壞檢測、石油與天然氣的探勘以及核試爆估算等都是應力波於各類工程與軍事上之應用。

研究多層域介質的應力波傳歷史，必須追溯到 Lamb(1904)問題。Lamb(1904)研究了半無窮域於表面受簡諧負載時的應力波傳問題，其開啟了爾後的相關研究，因此半無窮域的動力載荷問題亦稱為 Lamb 問題。關於層域介質的問題，Thomson(1950)與 Haskell(1953)為研究地球層狀地質的波傳現象，提出了轉移矩陣的方法來處理多層介質的頻散方程式(dispersion equation)。Kennett and Kerry(1979)提出反射矩陣法(reflected matrix method)來分析多層介質受一般性載荷的暫態問題，將整個暫態響應以反射或透射矩陣來表示。為避免直接解多層介質的邊界值問題，Spencer(1960)提出了廣義射線路徑(generalized ray path)來處理邊界反射與透射的問題，他利用所求出的邊界反射與透射係數來處理多層介質中的所有的波，並將之做有系統的排序與整理，如此可避免直接解多層介質的邊界值問題。廣義射線理論將層狀介質中的每個波再轉換域中都可表示成一射線積分式，其主要是由波源函數(source function)、介面間之反射與透射係數乘積(products of reflection and transmission coefficients)、接收函數(receiver function)與相函數(phase function)所構成，轉換域中的每個積分式可利用 Cagniard-de Hoop method(Cagniard(1939), de Hoop(1958))做逆轉換得到其暫態反應，而所有射線積分式的總和即構成了多層介質的暫態解析。Müller(1968a, 1968b, 1969)利用廣義射線理論來解多層介質承受不同負載的暫態問題。有別於直接利用廣義射線理論，對二維層狀介質之反平面與平面問題 Ma and Huang(1995, 1996)利用導出的層與層之間的通解寫出了表面受動力點波源的全場解，但細觀其解的形式，仍與廣義射線理論相同。林宜賢(2011)研究了彈性波於多層均質與非均質材料之暫態波傳理論解析與數值計算，只是其所研究問題為一維的問題，並無法計算施加負載為點傳荷時的二維問題。

長期以來，對於多層域介質的彈性應力波傳之研究主要是以廣義射線理論為基礎，廣義射線理論乃是將波在介質中傳遞時所產生的反射與折射行為，透過有系統的排序以波傳射線來表示出每一個波的形式，這樣的方法在計算極短時間的暫態應力波響應時，不失為一項正確且快速的方法。然而，想要以廣義射線理論來計算較長時間的暫態響應時，由於反射與折射波的數目已快速地增加，導致計算與分析上變成十分困難，因此目前大多相關研究的計算都僅止於計算單層或一層加半無窮域的問題。要如何能準確且又效率地計算多層介質於長時間的暫態應力波響應，長久以來一直是學術與工程上想要突破的瓶頸。數值求解的方式主要可分為有限元素法(FEM)與數值逆轉換法兩類。其中有限元素法是純數值的計算，隨著電腦

計算速度的快速進步，有限元素法在結構力學與固體力學上就漸漸扮演了重要的角色；但有限元素法的計算效率與精確度畢竟比不上解析計算的方法，且由於其中某些動態參數的調整需配合豐富的計算經驗才能得到較好的數值結果，所以仍有其先天不足的缺陷存在。因此，若能結合部分解析和部分數值的方式來研究應力波傳的問題，將可能是較佳的處理方法，本計畫即利用 Durbin(1974)單邊拉普拉斯逆轉換法與 Ing et al.(2013)所提出之雙邊拉普拉斯逆轉換法來計算壓電材料承受反平面與平面移動負載之暫態解，透過數值拉普拉斯逆轉換法來做數值計算，得到了精確且又有效率的暫態響應。

二、功能性梯度壓電條板承受移動反平面機械與平面電位移點載荷之解析

考慮一厚度為 h 之單層功能性梯度壓電材料(FGPM)，在時間 $t=0$ 時，於座標原點 $(0,0)$ 處施加大小為 τ_0 的反平面剪應力與大小為 D_0 的平面電位移之移動點負載，此兩個點載荷皆以等速度 v 向正 x 方向移動，其幾何結構示意圖如圖 1 所示。從固體力學平衡方程可知此反平面問題之應力平衡方程式為：

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

其中 ρ 為材料密度， τ_{xz} 和 τ_{yz} 為剪應力， w 為 z 方向位移。

假設此 FGPM 常數皆隨著 y 方向呈指數型變化，即：

$$(C_{44}, e_{15}, \varepsilon_{11}, \rho) = (C_{440}, e_{150}, \varepsilon_{110}, \rho_0) e^{\beta y}, \quad (2)$$

其中 C_{44} 為彈性常數， e_{15} 為壓電常數， ε_{11} 為介電常數， β 為功能性梯度常數。

相關的本構方程式為下：

$$\tau_{xz} = C_{44}(y) \frac{\partial w}{\partial x} + e_{15}(y) \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\tau_{yz} = C_{44}(y) \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15}(y) \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (4)$$

$$D_x = e_{15}(y) \frac{\partial \omega}{\partial x} - \varepsilon_{11}(y) \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (5)$$

$$D_y = e_{15}(y) \frac{\partial \omega}{\partial y} - \varepsilon_{11}(y) \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (6)$$

將(3)、(4)式代入(1)式可得：

$$C_{440} \nabla^2 \omega + e_{150} \nabla^2 \phi + \beta C_{440} \frac{\partial w}{\partial y} + \beta e_{150} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \rho_0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}, \quad (7)$$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 。

從麥斯威爾方程式中可得到電場與電位能關係式：

$$D_{x,x} + D_{y,y} = 0. \quad (8)$$

將(5)、(6)式代入(8)式可得：

$$e_{150} \nabla^2 \omega - \varepsilon_{110} \nabla^2 \phi + \beta e_{150} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \beta \varepsilon_{110} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

為方便解析，令一變數

$$\phi = \psi + \frac{e_{150}}{\varepsilon_{110}} \omega. \quad (10)$$

將(10)式帶入(9)式可得：

$$\nabla^2 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial y} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (11)$$

其中 ε 漸近於 0^+ 。

將(10)、(11)式代入(7)式可得：

$$\nabla^2 \omega + \beta \frac{\partial \omega}{\partial y} = b^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}, \quad (12)$$

其中 $b = \sqrt{\frac{\rho_0}{\bar{C}_{440}}}$ ， $\bar{C}_{440} = C_{440} + \frac{e_{150}^2}{\varepsilon_{110}}$ ，且(11)式及(12)式為本問題控制方程式。

將(10)式代入(3)~(6)式中，其本構方程式如下：

$$\tau_{xz} = \bar{C}_{440} e^{\beta y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + e_{150} e^{\beta y} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (13)$$

$$\tau_{yz} = \bar{C}_{440} e^{\beta y} \frac{\partial \omega}{\partial y} + e_{150} e^{\beta y} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (14)$$

$$D_x = -\varepsilon_{110} e^{\beta y} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (15)$$

$$D_y = -\varepsilon_{110} e^{\beta y} \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (16)$$

此問題之邊界條件可表示如下：

$$\tau_{yz}(x, 0, t) = \tau_0 \delta(x - vt) H(t), \quad (17)$$

$$D_y(x, 0, t) = D_0 \delta(x - vt) H(t), \quad (18)$$

$$\tau_{yz}(x, -h, t) = 0, \quad (19)$$

$$D_y(x, -h, t) = 0, \quad (20)$$

其中 $H(\)$ 為 Heaviside function。

運用兩次拉普拉斯轉換，將 x 、 t 轉換為 λ 、 s ，(11)、(12)式可轉換為下列控制方程式：

$$\frac{\partial^2 \bar{w}^*}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial y} - (b^2 - \lambda^2) s^2 \bar{w}^* = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}^*}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial y} - (\varepsilon^2 - \lambda^2) s^2 \bar{\psi}^* = 0. \quad (22)$$

(21)、(22)式為標準常微分方程式，其通解為：

$$\bar{w}^* = A_1 e^{m_1 y} + A_2 e^{m_2 y}, \quad (23)$$

$$\bar{\psi}^* = B_1 e^{n_1 y} + B_2 e^{n_2 y}. \quad (24)$$

且

$$m_1(s, \lambda) = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4s[(1 - b^2 v^2)s\lambda^2 + 2b^2 v\lambda - b^2 s]}}{s}, \quad (25)$$

$$m_2(s, \lambda) = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4s[(1 - b^2 v^2)s\lambda^2 + 2b^2 v\lambda - b^2 s]}}{s}, \quad (26)$$

$$n_1(s, \lambda) = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4s[(1 - \varepsilon^2 v^2)s\lambda^2 + 2\varepsilon^2 v\lambda - \varepsilon^2 s]}}{s}, \quad (27)$$

$$n_2(s, \lambda) = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4s[(1 - \varepsilon^2 v^2)s\lambda^2 + 2\varepsilon^2 v\lambda - \varepsilon^2 s]}}{s}. \quad (28)$$

將邊界條件(17)~(20)式取兩次拉普拉斯轉換，可得：

$$\bar{\tau}_{yz}^*(s\lambda, 0, s) = \frac{\tau_0}{s(1 + \lambda v)}, \quad (29)$$

$$\bar{D}_y^*(s\lambda, 0, s) = \frac{D_0}{s(1 + \lambda v)}, \quad (30)$$

$$\bar{\tau}_{yz}^*(s\lambda, -h, s) = 0, \quad (31)$$

$$\bar{D}_y^*(s\lambda, 0, s) = 0. \quad (32)$$

將本構方程式(13)~(16)式取兩次拉普拉斯轉換，可得：

$$\bar{\tau}_{xz}^* = \bar{C}_{440} e^{\beta y} s \lambda \bar{w}^* + e_{150} e^{\beta y} s \lambda \bar{\psi}^* \quad (33)$$

$$\bar{\tau}_{yz}^* = \bar{C}_{440} e^{\beta y} \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial y} + e_{150} e^{\beta y} \frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial y}, \quad (34)$$

$$\bar{D}_x^* = -\varepsilon_{110} e^{\beta y} s \lambda \bar{\psi}^*, \quad (35)$$

$$\bar{D}_y^* = -\varepsilon_{110} e^{\beta y} \frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial y}. \quad (36)$$

將通解(23)、(24)式代入(34)、(36)式，再利用邊界條件(17)~(20)式，可得：

$$B_1 n_1 + B_2 n_2 = -\frac{D_0}{\varepsilon_{110} s (1 + \lambda \nu)}, \quad (37)$$

$$B_1 n_1 e^{-n_1 h} + B_2 n_2 e^{-n_2 h} = 0, \quad (38)$$

$$A_1 m_1 + A_2 m_2 = \frac{1}{\bar{C}_{440} s (1 + \lambda \nu)} \left(\tau_0 + \frac{e_{150} D_0}{\varepsilon_{110}} \right), \quad (39)$$

$$A_1 m_1 e^{-m_1 h} + A_2 m_2 e^{-m_2 h} = 0. \quad (40)$$

由(37)~(40)式可得：

$$A_1 = \frac{-1}{\bar{C}_{440} s m_1 (1 + \lambda \nu)} \left(\tau_0 + \frac{e_{150} D_0}{\varepsilon_{110}} \right) \left(\frac{1}{e^{m_2 h - m_1 h} - 1} \right), \quad (41)$$

$$A_2 = \frac{-1}{\bar{C}_{440} s m_2 (1 + \lambda \nu)} \left(\tau_0 + \frac{e_{150} D_0}{\varepsilon_{110}} \right) \left(\frac{1}{1 - e^{m_1 h - m_2 h}} \right), \quad (42)$$

$$B_1 = -\frac{D_0}{n_1 \varepsilon_{110} s (1 + \lambda \nu)} \left(\frac{1}{1 - e^{n_2 h - n_1 h}} \right), \quad (43)$$

$$B_2 = -\frac{D_0}{n_2 \varepsilon_{110} s (1 + \lambda \nu)} \left(\frac{1}{e^{n_1 h - n_2 h} - 1} \right). \quad (44)$$

將(41)~(44)式代入(23)、(24)式，可得：

$$\bar{w}^* = \frac{1}{\bar{C}_{440} s (1 + \lambda \nu)} \left(\tau_0 + \frac{e_{150} D_0}{\varepsilon_{110}} \right) \left[\frac{-e^{m_1 y}}{m_1} \left(\frac{1}{e^{m_2 h - m_1 h} - 1} \right) + \frac{e^{m_2 y}}{m_2} \left(\frac{1}{1 - e^{m_1 h - m_2 h}} \right) \right], \quad (45)$$

$$\bar{\psi}^* = \frac{D_0}{\varepsilon_{110} s (1 + \lambda \nu)} \left[\frac{-e^{n_1 y}}{n_1} \left(\frac{1}{1 - e^{n_2 h - n_1 h}} \right) + \frac{e^{n_2 y}}{n_2} \left(\frac{1}{e^{n_1 h - n_2 h} - 1} \right) \right]. \quad (46)$$

將(45)、(46)式(34)、(36)式，最後可得兩層拉普拉斯轉換域中的應力解 $\bar{\tau}_{yz}^*$ 及電位能 \bar{D}_y^* 為：

$$\bar{\tau}_{yz}^* = \frac{e^{\beta y}}{s(1 + \lambda \nu)} \left(\tau_0 + \frac{e_{150} D_0}{\varepsilon_{110}} \right) \left(\frac{-e^{m_1 y} + e^{m_2 y - m_1 h + m_2 h}}{e^{m_2 h - m_1 h} - 1} \right) + \frac{D_0 e_{150} e^{\beta y}}{\varepsilon_{110} s (1 + \lambda \nu)} \left(\frac{-e^{n_1 y} + e^{n_2 y - n_1 h + n_2 h}}{1 - e^{n_2 h - n_1 h}} \right), \quad (47)$$

$$\bar{D}_y^* = \frac{-D_0 e^{\beta y}}{s(1 + \lambda \nu)} \left(\frac{-e^{n_1 y} + e^{n_2 y - n_1 h + n_2 h}}{1 - e^{n_2 h - n_1 h}} \right). \quad (48)$$

最後，將所得(47)式以及(48)式代入拉普拉斯逆數值逆轉換公式中，可得在時間 t 和空間 x 下的應力解 $\bar{\tau}_{yz}^*$ 及電位能 \bar{D}_y^* 。

三、功能性梯度壓電條板承受移動反平面機械與平面電位移點載荷之數值結果

這裡採用兩次拉普拉斯逆轉換公式計算數值結果，其相關參數設定，在 Ing et al. (2013) 已有建議設定範圍。Durbin(1974)單邊數值拉普拉斯逆轉換的相關參數較佳的建議範圍為， T_t 為所取時間 T 的最大值， αT_t 為 5~10， N_1 為加總項數，取 50~5000 項。Durbin(1974)雙邊數值拉普拉斯逆轉換的相關參數較佳的建議範圍為， T_x 為所取時間 10~100， βT_x 為 0.1~0.01， N_2 及 N_3 為加總項數，取 1000~5000 項。本問題材料常數假設成 y 的函數，其範圍為 $-h \leq y \leq 0$ ，數值計算時採用 PZT4，其相關材料常數表 1 所示。

計算數值拉普拉斯逆轉換公式時，先將外圍迴圈對轉換域中的參數 λ 做逆轉換，再將 λ 值代入內部迴圈對參數 s 做逆轉換，可得出本問題的應力解 τ_{yz} 。設定 $\alpha T_t = 5$ 、 $\beta T_x = 0.01$ 、 $T_t = 2$ ，加總項數 $N_1 = 1000$ 、 $N_2 = 3000$ 、 $N_3 = 3000$ ，週期 T_t 採用 Ing et al.(2013)所建議之週期 T_t 該段計算時間最大值之兩倍。

在 $(0, -0.5h)$ 位置為觀察點時，分別針對以下三種情形做計算分析，第一種情況為固定單一負載速度 v ，在速度不變的情況下，改變功能性梯度壓電材料 β 值並探討其暫態應力圖之間的變化差異。圖 2 為一靜止負載，即 $v=0$ 的情況，在原點施予一個反平面動力點載荷，其中施加動力點載荷到觀察位置的距離為 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，第一個入射波於無因次化時間 $t/bh = 0.5$ 時到達觀察點，第一個反射波於 $t/bh = 1.5$ 時到達觀察點。依此類推的情況下，反射波將交替於 $t/bh = 2.5$ 、 3.5 、 4.5 到達。由圖 2 中可以知道，增加功能性梯度的影響並改變 β 值，剪力波波前到達時間皆相同，而應力 τ_{yz} 會有或大或小的差異。觀察得知，若 β 越大，暫態應力值 τ_{yz} 越小；反之，若 β 越小，暫態應力值 τ_{yz} 越大，此結論與 Lin et al.(2014)相同。圖 3 為一移動負載，在速度 $v = 0.1/b$ 的情況下，針對不同功能性梯度壓電材料 β 值的暫態應力圖，其剪力波波前到達時間與圖 2 相同，而速度的增加，形成 β 值對應力的改變相對圖 2 則有逐漸增大的趨勢。由圖 2 與圖 3，可以發現不同的負載移動速度會影響其暫態應力值的大小，當速度變大，有逐漸增大的趨勢。而 β 值的改變對應力 τ_{yz} 也有很大的影響， $\beta = -2$ 的應力是最大的，依次到應力相對最小的 $\beta = 2$ 。

第二種情況假設功能性梯度壓電材料 β 值固定不變，觀察不同移動負載速度下的應力值 τ_{yz} 的變化，圖 4 為 $\beta = 0$ 時，不同移動負載速度暫態響應圖，同圖 2 及圖 3，施加動力點載荷到觀察位置 $(0, -0.5h)$ 的距離為 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，每個波前到達觀察點的時間皆與圖 2 圖 3 相同，當速度越大，暫態應力圖受到的影響也越大，在相同時間點的應力值 τ_{yz} 也越大。圖 5 和圖 6 為 $\beta = 2$ 及 $\beta = -2$ 的暫態應力圖，由此兩圖可知， β 大小值會影響應力值 τ_{yz} 的大小，當 β 變大時，應力值 τ_{yz} 相對圖 4 相對減少；當 β 變小時，應力值 τ_{yz} 相對圖 4 相對增大，和第一種情況符合。

第三種情況為改變觀察點位置並觀察其應力值 τ_{yz} 的變化。圖 7 為觀察點正下方往 x 軸偏移 h 且為一靜止負載，其中施加動力點載荷到觀察位置的距離為 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，第一個入射波於無因次化時間 $t/bh = 1.118$ 時到達觀察點，第一個反射波於 $t/bh = 1.802$ 時到達觀察點。依此類推的情況下，反射波將交替於 $t/bh = 2.692$ 、 3.64 、 4.609 到達。觀察得知，若 β 越大，暫態應力值 τ_{yz} 越小；反之，若 β 越小，暫態應力值 τ_{yz} 越大，與第一種情況符合。將圖 7 與圖 2 相比較，可發現觀察點偏移以後，其振幅會較觀察點在正下方來的小，是由於當觀察點

偏移，其離動力點載荷較遠所而成。

四、壓電單層板承受移動平面機械與平面電位移點載荷之解析（平面問題）

考慮一單層壓電材料，其厚度為 h ，當時間 $t < 0$ ，整個材料不受力且靜止。當時間 $t = 0$ 時，在單層板上表面施加一大小為 σ_0 的正向應力、 τ_0 的剪應力與 D_0 的電位移，且此三個負載皆以等速度 v 向正 x 方向移動，又單層板下表面為自由表面不承受負載，其幾何結構示意圖如圖 8 所示。

相關的本構方程式如下：

$$\tau_{xx} = c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (49)$$

$$\tau_{zz} = c_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (50)$$

$$\tau_{xz} = c_{44} \frac{\partial u_x}{\partial z} + c_{44} \frac{\partial u_z}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (51)$$

$$D_x = e_{15} \frac{\partial u_x}{\partial z} + e_{15} \frac{\partial u_z}{\partial x} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (52)$$

$$D_z = e_{31} \frac{\partial u_x}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \varepsilon_{33} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (53)$$

其中 c_{11} 、 c_{13} 、 c_{33} 、 c_{44} 為彈性係數， e_{31} 、 e_{15} 、 e_{33} 為壓電係數， ε_{11} 、 ε_{33} 為介電係數， ρ 為材料密度， τ_{xx} 、 τ_{zz} 、 τ_{xz} 為應力張量， D_x 與 D_z 分別為 x 與 z 方向之電位移， ϕ 為電位能。

當物體微體力為零時，由二維問題的固體力學運動平衡方程式可得

$$\tau_{xx,x} + \tau_{xz,z} = \rho u_{x,tt}, \quad (54)$$

$$\tau_{zx,x} + \tau_{zz,z} = \rho u_{z,tt}, \quad (55)$$

由麥斯威爾方程式可得到電場與電位能關係式，但考慮材料為壓電材料，且其介電質 (dielectrics) 為可極化而非磁化，故

$$D_{x,x} + D_{z,z} = 0, \quad (56)$$

假設其下表面為開路 (Open-Circuit)，則此問題之邊界條件，可描述如下：

$$\tau_{zz}(x, 0, t) = \sigma_0 \delta(x - vt) H(t), \quad -\infty < x < \infty \quad (57)$$

$$\tau_{xz}(x, 0, t) = \tau_0 \delta(x - vt) H(t), \quad -\infty < x < \infty \quad (58)$$

$$D_z(x, 0, t) = D_0 \delta(x - vt) H(t), \quad -\infty < x < \infty \quad (59)$$

$$\tau_{zz}(x, -h, t) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (60)$$

$$\tau_{xz}(x, -h, t) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (61)$$

$$D_z(x, -h, t) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (62)$$

將(49)、(51)式帶入(54)式，(50)、(51)式帶入(55)式，(52)、(53)式帶入(56)式，最後可得到壓電材料之控制方程式如下：

$$c_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + (e_{15} + e_{31}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad (63)$$

$$c_{44} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + e_{15} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + e_{31} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (64)$$

$$e_{15} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (e_{15} + e_{31}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} - \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (65)$$

將(63)、(64)、(65)式做一次拉普拉斯轉換，可得到：

$$c_{11} \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x \partial z} + (e_{15} + e_{31}) \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x \partial z} = \rho s^2 \bar{u}_x, \quad (66)$$

$$c_{44} \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} + c_{33} \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x \partial z} + e_{15} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = \rho s^2 \bar{u}_z, \quad (67)$$

$$e_{15} \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial z^2} + (e_{15} + e_{31}) \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x \partial z} - \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = 0, \quad (68)$$

將(66)、(67)、(68)式取雙邊拉普拉斯轉換，結果可得：

$$c_{11}(s\lambda)^2 \bar{u}_x^* + c_{44} \frac{\partial^2 \bar{u}_x^*}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44})(s\lambda) \frac{\partial^2 \bar{u}_z^*}{\partial z} + (e_{15} + e_{31})(s\lambda) \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z} = \rho s^2 \bar{u}_x^*, \quad (69)$$

$$(c_{13} + c_{44})(s\lambda) \frac{\partial^2 \bar{u}_x^*}{\partial z} + c_{44}(s\lambda)^2 \bar{u}_z^* + c_{33} \frac{\partial^2 \bar{u}_z^*}{\partial z^2} + e_{15}(s\lambda)^2 \bar{\phi}^* + e_{33} \frac{\partial^2 \bar{\phi}^*}{\partial z^2} = \rho s^2 \bar{u}_z^*, \quad (70)$$

$$(e_{15} + e_{31})(s\lambda) \frac{\partial^2 \bar{u}_x^*}{\partial z} + e_{15}(s\lambda)^2 \bar{u}_z^* + e_{33} \frac{\partial^2 \bar{u}_z^*}{\partial z^2} - \varepsilon_{11}(s\lambda)^2 \bar{\phi}^* - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \bar{\phi}^*}{\partial z^2} = 0, \quad (71)$$

(69)~(71)三式為標準常微分方程式，假設其通解為：

$$\bar{u}_x^*(\lambda, z, s) = \sum_{j=1}^6 a_j(s, \lambda) A_j(s, \lambda) e^{mz}, \quad (72)$$

$$\bar{u}_z^*(\lambda, z, s) = \sum_{j=1}^6 A_j(s, \lambda) e^{mz}, \quad (73)$$

$$\bar{\phi}^*(\lambda, z, s) = \sum_{j=1}^6 b_j(s, \lambda) A_j(s, \lambda) e^{mz}, \quad (74)$$

接著將通解(72)~(74)式代入控制方程式(69)~(71)式，可得如下：

$$\sum_{j=1}^6 \{[(c_{13} + c_{44})(s\lambda m)] + [c_{11}(s\lambda)^2 + c_{44}m^2 - \rho s^2] a_j(s, \lambda) + (e_{15} + e_{31})(s\lambda m) b_j(s, \lambda)\} A_j e^{mz} = 0, \quad (75)$$

$$\sum_{j=1}^6 \{[c_{44}(s\lambda)^2 + c_{33}m^2 - \rho s^2] + [(c_{13} + c_{44})(s\lambda m)] a_j(s, \lambda) + [e_{15}(s\lambda)^2 + e_{33}m^2] b_j(s, \lambda)\} A_j e^{mz} = 0, \quad (76)$$

$$\sum_{j=1}^6 \{[e_{15}(s\lambda)^2 + e_{33}m^2] + [(e_{15} + e_{31})(s\lambda m)] a_j(s, \lambda) + [-\varepsilon_{11}(s\lambda)^2 - \varepsilon_{33}m^2] b_j(s, \lambda)\} A_j e^{mz} = 0, \quad (77)$$

觀察(75)~(77)式，未知函數若要有非零解，則係數矩陣之行列表值需為零。

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = 0, \quad (78)$$

其中

$$A_{11} = (c_{13} + c_{44})(s\lambda m),$$

$$A_{12} = c_{11}(s\lambda)^2 + c_{44}m^2 - \rho s^2,$$

$$A_{13} = (e_{15} + e_{31})(s\lambda m),$$

$$A_{21} = c_{44}(s\lambda)^2 + c_{33}m^2 - \rho s^2,$$

$$A_{22} = (c_{13} + c_{44})(s\lambda m),$$

$$A_{23} = e_{15}(s\lambda)^2 + e_{33}m^2$$

$$A_{31} = e_{15}(s\lambda)^2 + e_{33}m^2,$$

$$A_{32} = (e_{15} + e_{31})(s\lambda m),$$

$$A_{33} = -\varepsilon_{11}(s\lambda)^2 - \varepsilon_{33}m^2.$$

由(78)式，可整理出 m 的六次方程式，此六次方程式表示如下：

$$A(m)^6 + B(m)^4 + C(m)^2 + D = 0, \quad (79)$$

其中

$$A = c_{33}\varepsilon_{33}c_{44} + c_{44}e_{33}^2,$$

$$B = [-c_{11}\varepsilon_{33}c_{33} - \varepsilon_{11}c_{33}c_{44} - \varepsilon_{33}c_{44}^2 - c_{33}(e_{15} + e_{31})^2 + \varepsilon_{33}(c_{13} + c_{44})^2 - 2e_{15}e_{33}c_{44}]s^2\lambda^2 + (\rho c_{33}\varepsilon_{33} + \rho\varepsilon_{33}c_{44} + \rho e_{33}^2)s^2,$$

$$C = [-c_{11}\varepsilon_{11}c_{44} - c_{11}\varepsilon_{11}c_{33} - \varepsilon_{11}c_{44}^2 - c_{44}e_{15}^2 - 2e_{15}e_{31}c_{44} - c_{44}e_{31}^2 + e_{15}e_{31}c_{44} + \varepsilon_{11}(c_{13} + c_{44})^2 - 2c_{11}e_{15}e_{33} + 2c_{13}e_{15}e_{31} + c_{13}e_{15}^2]s^4\lambda^4 + [\rho c_{11}\varepsilon_{33} + \rho\varepsilon_{33}c_{44} + \rho\varepsilon_{11}c_{33} + \rho\varepsilon_{11}c_{44} + \rho(e_{15} + e_{31})^2 + 2\rho e_{15}e_{33}]s^4\lambda^2 - (c_{11}e_{33}^2)s^2\lambda^2 - (\varepsilon_{33}\rho^2)s^4 + (\rho e_{33}^2)s^2,$$

$$D = (c_{11}\varepsilon_{11}c_{44} - c_{11}e_{15}^2)s^6\lambda^6 + (\rho c_{11}\varepsilon_{11} + \rho\varepsilon_{11}c_{44} + \rho e_{15}^2)s^6\lambda^4 - (\varepsilon_{11}\rho^2)s^6\lambda^2.$$

且 m 有6個根 $m_1 \sim m_6$ ，計算出 $m_1 \sim m_6$ 之值，再將其代回(75)~(77)式，任意取兩式應用克拉瑪公式解 $a_j(s, \lambda)$ 、 $b_j(s, \lambda)$ ，在此取(76)、(77)式為基準，表示如下：

$$a_j(s, \lambda) = \frac{\Delta_a}{\Delta}, \quad (j = 1, 2, \dots, 6) \quad (80)$$

$$b_j(s, \lambda) = \frac{\Delta_b}{\Delta}, \quad (j = 1, 2, \dots, 6) \quad (81)$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} (c_{13} + c_{44})s\lambda m & e_{15}s^2\lambda^2 + e_{33}m^2 \\ (e_{15} + e_{31})s\lambda m & -\varepsilon_{11}(s\lambda)^2 - \varepsilon_{33}m^2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} -(c_{44}s^2\lambda^2 + c_{33}m^2 - \rho s^2) & e_{15}s^2\lambda^2 + e_{33}m^2 \\ -(e_{15}s^2\lambda^2 + e_{33}m^2) & -\varepsilon_{11}(s\lambda)^2 - \varepsilon_{33}m^2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} (c_{13} + c_{44})s\lambda m & -(c_{44}s^2\lambda^2 + c_{33}m^2 - \rho s^2) \\ (e_{15} + e_{31})s\lambda m & -(e_{15}s^2\lambda^2 + e_{33}m^2) \end{vmatrix}.$$

對邊界條件(57)~(62)式，取時間域中拉普拉斯轉換，可表示如下：

$$\bar{\tau}_{xz}(x, 0, s) = \frac{\sigma_0}{s(1 + \lambda\nu)}\delta(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (82)$$

$$\bar{\tau}_{xz}(x, 0, s) = \frac{\tau_0}{s(1 + \lambda\nu)}\delta(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (83)$$

$$\bar{D}_z(x, 0, s) = \frac{D_0}{s(1 + \lambda v)} \delta(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (84)$$

$$\bar{\tau}_{zz}(x, -h, s) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (85)$$

$$\bar{\tau}_{xz}(x, -h, s) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (86)$$

$$\bar{D}_z(x, -h, s) = 0. \quad -\infty < x < \infty \quad (87)$$

再對邊界條件(82)~(87)式，取空間域拉普拉斯轉換，可表示如下：

$$\bar{\tau}_{zz}^*(\lambda, 0, s) = \frac{\sigma_0}{s(1 + \lambda v)}, \quad -\infty < x < \infty \quad (88)$$

$$\bar{\tau}_{xz}^*(\lambda, 0, s) = \frac{\tau_0}{s(1 + \lambda v)}, \quad -\infty < x < \infty \quad (89)$$

$$\bar{D}_z^*(\lambda, 0, s) = \frac{D_0}{s(1 + \lambda v)}, \quad -\infty < x < \infty \quad (90)$$

$$\bar{\tau}_{zz}^*(\lambda, -h, s) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (91)$$

$$\bar{\tau}_{xz}^*(\lambda, -h, s) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (92)$$

$$\bar{D}_z^*(\lambda, -h, s) = 0. \quad -\infty < x < \infty \quad (93)$$

可將本構方程式(50)、(51)、(53)式，也同時對時間域與空間域作拉普拉斯轉換，可得到如下：

$$\bar{\tau}_{zz}^* = c_{13}(s\lambda)\bar{u}_x^* + c_{33}\bar{u}_{z,z}^* + e_{33}\bar{\phi}_{,z}^*, \quad (94)$$

$$\bar{\tau}_{xz}^* = c_{44}\bar{u}_{x,z}^* + c_{44}(s\lambda)\bar{u}_{z,x}^* + e_{15}(s\lambda)\bar{\phi}_{,x}^*, \quad (95)$$

$$\bar{D}_z^* = e_{31}(s\lambda)\bar{u}_x^* + e_{33}\bar{u}_{z,z}^* - \varepsilon_{33}\bar{\phi}_{,z}^*, \quad (96)$$

將通解(72)~(74)代入(94)~(96)，可得如下：

$$\bar{\tau}_{zz}^* = \sum_{j=1}^6 \{c_{13}(s\lambda)a_j(s, \lambda) + c_{33}m_j + e_{33}m_j b_j(s, \lambda)\} A_j(s, \lambda) e^{m_j z}, \quad (97)$$

$$\bar{\tau}_{xz}^* = \sum_{j=1}^6 \{c_{44}m_j a_j(s, \lambda) + c_{44}(s\lambda) + e_{15}(s\lambda)m_j b_j(s, \lambda)\} A_j(s, \lambda) e^{m_j z}, \quad (98)$$

$$\bar{D}_z^* = \sum_{j=1}^6 \{e_{31}(s\lambda)a_j(s, \lambda) + e_{33}m_j - \varepsilon_{33}m_j b_j(s, \lambda)\} A_j(s, \lambda) e^{m_j z}, \quad (99)$$

其中 $A_j(s, \lambda)$ 為待定係數，須由邊界條件求得。

利用邊界條件(88)~(93)式與本構方程式(97)~(99)式，可得到如下：

$$\sum_{j=1}^6 \{c_{33}m_j a_j(s, \lambda) + c_{13}(s\lambda) + e_{33}m_j b_j(s, \lambda)\} A_j(s, \lambda) = \frac{\sigma_0}{s(1 + \lambda\nu)}, \quad (100)$$

$$\sum_{j=1}^6 \{c_{44}(s\lambda)a_j(s, \lambda) + c_{44}m_j + e_{15}(s\lambda)m_j b_j(s, \lambda)\} A_j(s, \lambda) = \frac{\tau_0}{s(1 + \lambda\nu)}, \quad (101)$$

$$\sum_{j=1}^6 \{e_{33}m_j a_j(s, \lambda) + e_{31}(s\lambda) - \varepsilon_{33}m_j b_j(s, \lambda)\} A_j(s, \lambda) = \frac{D_0}{s(1 + \lambda\nu)}, \quad (102)$$

$$\sum_{j=1}^6 \{c_{33}m_j a_j(s, \lambda) + c_{13}(s\lambda) + e_{33}m_j b_j(s, \lambda)\} A_j(s, \lambda) e^{-m_j h} = 0, \quad (103)$$

$$\sum_{j=1}^6 \{c_{44}(s\lambda)a_j(s, \lambda) + c_{44}m_j + e_{15}(s\lambda)m_j b_j(s, \lambda)\} A_j(s, \lambda) e^{-m_j h} = 0, \quad (104)$$

$$\sum_{j=1}^6 \{e_{33}m_j a_j(s, \lambda) + e_{31}(s\lambda) - \varepsilon_{33}m_j b_j(s, \lambda)\} A_j(s, \lambda) e^{-m_j h} = 0. \quad (105)$$

為求 $A_j(s, \lambda)$ 之待定係數，本研究將利用高斯消去法求得，先以矩陣 \mathbf{M} 表示(100)~(105)六式，結果如下：

$$[\mathbf{M}][\mathbf{A}] = [\mathbf{B}], \quad (106)$$

其中

$$M_{1j} = c_{13}(s\lambda)a_j(s, \lambda) + c_{33}m_j + e_{33}m_j b_j(s, \lambda)$$

$$M_{2j} = c_{44}m_j a_j(s, \lambda) + c_{44}(s\lambda) + e_{15}m_j b_j(s, \lambda)$$

$$M_{3j} = e_{31}(s\lambda)a_j(s, \lambda) + e_{33}m_j - \varepsilon_{33}m_j b_j(s, \lambda)$$

$$M_{4j} = \{c_{13}(s\lambda)a_j(s, \lambda) + c_{33}m_j + e_{33}m_j b_j(s, \lambda)\} e^{-m_j h}$$

$$M_{5j} = \{c_{44}m_j a_j(s, \lambda) + c_{44}(s\lambda) + e_{15}m_j b_j(s, \lambda)\} e^{-m_j h}$$

$$M_{6j} = \{e_{31}(s\lambda)a_j(s, \lambda) + e_{33}m_j - \varepsilon_{33}m_j b_j(s, \lambda)\} e^{-m_j h}$$

$$\mathbf{A} = [A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ A_5 \ A_6]^T,$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0}{s(1 + \lambda\nu)} & \frac{\tau_0}{s(1 + \lambda\nu)} & \frac{D_0}{s(1 + \lambda\nu)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad j=1, 2, \dots, 6.$$

藉由高斯消去法可求得 $A_j(s, \lambda)$ ，再將 $a_j(s, \lambda)$ 、 $b_j(s, \lambda)$ 代回本構方程式(97)~(99)式，即可執行拉普拉斯逆轉換數值分析。

五、壓電單層板承受移動平面機械與平面電位移點載荷之數值計算結果（平面問題）

在本文數值運算中，假設單層板厚度為 h 之層板，且壓電材料常數為PTZ-5H，其相關材料參數如表 2 所示。計算數值拉普拉斯逆轉換時採用 Durbin(1974)的單邊拉普拉斯逆轉換法以及 Ing et al.(2013)雙邊拉普拉斯逆轉換數值方法，其設定值 $\alpha T_i = 10$ ，加總項數 $N_1 = 1000$ 、 $N_2 = 4000$ 、 $N_3 = 4000$ ，本文之週期 T_i ，則採用 Ing et al.(2013)所建議之週期 T_i 為該段計算時間最大之兩倍；而 Ing et al.(2013)雙邊拉普拉斯逆轉換數值方法，本文建議的設定值分成兩種情況：(1)當觀察點在 $(x, z) = (0, -0.5h)$ 時，週期 T_x 設為 30~50、 βT_x 設為 0.1。(2)當觀察點在 $(x, z) = (0, -0.5h)$ 之外時，同樣將週期 T_x 設為 10~30、 βT_x 設為 0.01。

首先計算負載移動速度 $v = 0$ 時的正向應力 τ_{zz} 之暫態值，且只施加平面正向應力 σ_0 時(即 $\tau_0 = D_0 = 0$)的結果。圖 9 為觀察點 $(x, z) = (0, -0.5h)$ 位置的正向應力 τ_{zz} 之暫態數值解，其中橫軸之無因次化時間內的參數 a 為壓電材料內縱波(P波)的慢度，對表 2 的壓電材料PZT-5H而言，其剪力波的慢度約為縱波慢度的 2.46 倍。由圖 9 中可看出，除了電磁波（對正向應力的影響非常小）會瞬間抵達觀察點外，當無因次化時間 $t/ah = 0.5$ 時，入射的縱波(P波)會率先到達觀察點，而當 $t/ah = 1.23$ 時，入射的剪力波(S波)會到達觀察點。在 $t/ah = 1.5$ 與 $t/ah = 2.5$ 時，將於觀察點接收到第一次反射縱波(PP波)與第二次反射縱波(PPP波)。接著，在 $t/ah \approx 2.23$ 、2.96、3.23、3.5、3.69、3.96、4.23、4.5、4.69時，通過觀察點的波分別為PS、SP、PPS、PPPP、SS、PSP、PPPS、PPPPP和PSS等波；接著，暫態應力值就在靜力值附近震盪，由於單層板的能量遞減較慢，所以暫態應力值並不會很快地趨近靜力值。由圖 9 的結果可看出這些波到達的時間都非常準確，完全符合應力波傳的物理現象，表示本文理論的推導與計算的方法是正確無誤的。

圖 10 為觀察點在 $x = 0$ 且不同高度位置的正向應力 τ_{zz} 之暫態數值解，由圖 10 中可知除了各個暫態波到達的時間皆符合物理意義外，亦可看出當觀察點距離點載荷越遠時，其相對的暫態應力值與所趨近的靜力解會越小。圖 11 為觀察點在 $z = -0.5h$ 且在不同水平位置之正向應力 τ_{zz} 之暫態數值解，由圖 11 中也可看出，當觀察點距離負載越遠時，因波源能量傳遞會隨之減弱，故相對之暫態應力值會較小，同時靜力解也相對較小。

圖 12 為觀察點在 $(x, z) = (0, -0.5h)$ 位置，施加不同電位移負載大小的正向應力 τ_{zz} 之暫態數值圖，從圖 12 可清楚看到，由於電的效應，當施加電位移時，於時間 $t = 0$ 瞬間時便有明顯的數值產生，且施加電位移負載越大，其所產生的正向應力 τ_{zz} 也會越大，而靜力解也相對較大。

圖 13 為觀察點在 $(x, z) = (0, -0.5h)$ 位置，施加正向應力 τ_{zz} 之長時間暫態數值圖，從圖 13 可清楚看到，因為單層板能量遞減很慢，所以暫態波並不會立即趨近相對靜力值，只會在靜力值附近上下震盪，本文利用兩次數值逆轉換可以同時精確計算短時間與長時間的暫態響應，相對許多文獻只能計算短時間或只能計算長時間的限制，本文所使用的方法顯然較好。

接下來計算有負載速度的情況，圖 14 為觀察點 $(x, z) = (0, -0.5h)$ 位置且速度不同的正向應力 τ_{zz} 之移動點載荷暫態數值圖，由圖 14 中可看出，當無因次化時間 $t/ah = 0.5$ 時，入射的縱波(P波)會率先到達觀察點，而當 $t/ah = 1.08$ 時，入射的剪力波(S波)會到達觀察點。在 $t/ah = 1.5$ 與 $t/ah = 2.5$ 時，將於觀察點接收到第一次反射縱波(PP波)與第二次反射縱波(PPP波)。接著，在 $t/ah \approx 2.208$ 、2.916、3.208、3.5、3.624時，通過觀察點的波分別為PS、SP、PPS、PPPP和SS等波；接著，暫態應力值就在靜力值附近震盪，由於單層板的能量遞減較

慢，所以暫態應力值並不會很快地趨近靜力值。此外，點載荷往正 x 方向移動，所以暫態波會因速度的不同，其產生的正向應力 τ_{zz} 也會隨之改變，當移動點載荷速度越大時，所產生的正向應力 τ_{zz} 也相對較小。

六、結論

本文除了解析功能性梯度壓電層板受移動機電負載之反平面暫態響應外，也解析了壓電材料層板受移動機電載荷之平面暫態問題，且兩種問題皆獲得了拉普拉斯轉換域中的全場解析解，並成功的利用 Durbin(1974)與 Ing et al.(2013)的數值拉普拉斯逆轉換法來計算暫態結果。本文研究的成果大致可歸納為以下幾點：

1. 本文成功求得功能性梯度壓電層板受移動機電負載之反平面問題的應力和電位移於拉普拉斯轉換域中之解。
2. 本文成功求得壓電材料層板受移動機電載荷之平面暫態問題的應力和電位移於拉普拉斯轉換域中之解。
3. 由計算的結果顯示，每個抵達觀察點的應力波，其波前到達的時間皆符合物理意義，且暫態應力值會在相對的靜力值附近震盪，並漸漸趨近靜力解。
4. 數值結果顯示功能性梯度常數對暫態應力值影響很大，且功能性梯度常數 β 值越大時，暫態應力值 τ_{yz} 會越小。
5. 數值結果顯示，距離負載越近的觀察點，其相對的暫態應力值會越小；且移動速度越快時，相對之暫態應力值會較小，亦即負載移動速度 v 越大時，暫態應力值 τ_{yz} 會越小。

誌謝

感謝行政院國家科學委員會經費補助，計畫編號： MOST 104-2221-E-032 -031 -。

參考文獻

- Bakker, M.C.M., Verweij, M.D., Kooij, B.J., Dieterman, H.A.,(1999) "The traveling point load revisited," Wave Motion, Vol. 29, pp.119 - 135.
- Cagniard, L., (1939) Reflexion et Refraction des Ondes Seismiques Progressives, Cauthuers-Villars, Paris; Translated into English and revised by Flinn, E. A., and Dix, C. H., (1962) Reflection and refraction of Progressive Seismic Waves, McGraw Hill, New York.
- de Hoop, A. T., (1958) Representation theorems for the displacement in an elastic solid and their application to elastodynamic diffraction theory, Doctoral dissertation, Technische hoegschool, Delft.
- de Hoop, A.T., (2001) "The moving-load problem in soil dynamics—the vertical displacement approximation," Wave Motion, Vol. 36, pp.335 - 346.
- Durbin, F., (1974) "Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method," The Computer Journal, Vol. 17, pp. 371-376.
- Gakenheimer, D. C. and Miklowitz, J., (1969) "Transient excitation of an elastic-half space by a

point load traveling on the surface,” ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 36, pp. 505-515.

Haskell, N., (1953) “The Dispersion of Surface Waves on Multilayered Media,” Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 43, pp. 17-34.

Ing, Y.S., Liao, H.F., Huang, K.S., (2013) “The Extended Durbin Method and Its Application for Piezoelectric Wave Propagation Problems,” International Journal of Solids and Structures, Vol. 50, pp.4000-4009.

Kennett, B. L. N., and Kerry, N. J., (1979) “Seismic Waves in a Stratified Half Space,” Geophys. J. R. Astron. Soc., Vol. 44, pp. 557-583.

Kooij, B.J., (2010) “The transient elastodynamic field excited by trans-Rayleigh trains,” Int. J. Solids Structures, Vol. 47, pp.81 – 90.

Lamb, H., (1904) "On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid," Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A Vol. 203, pp.1-42.

Ma, C. C., and Huang, K. C., (1995) “Analytical Transient Analysis of Layered Composite Medium Subjected to Dynamic In-Plane Impact Loadings,” Int. J. Solids and Structures, Vol. 33, pp. 4511-4529.

Ma, C. C., and Huang, K. C., (1996) “Exact Transient Solutions of Buried Dynamic Point Forces for Elastic Bimaterial,” Int. J. Solids and Structures, Vol. 33, pp. 4223-4238.

Müller, G., (1968a) “Theoretical Seismograms for Some Types of Point-Source in Layered Media: Part I : Theory,” *Z. Geophys.*, Vol. 34, pp. 15-35.

Müller, G., (1968b) “Theoretical Seismograms for Some Types of Point-Source in Layered Media: Part II : Numerical Calculations,” *Z. Geophys.*, Vol. 34, pp. 247-371.

Müller, G., (1969) “Theoretical Seismograms for Some Types of Point-Source in Layered Media: Part III: Single Force and Dipole Sources of Arbitrary Orientation,” *Z. Geophys.*, Vol. 35, pp. 347-371.

Payton, R. G., (1964) “An application of the dynamic Betti-Rayleigh reciprocal theorem to moving point loads in elastic media,” Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 21, pp. 299-313.

Spencer, T. W., (1960) “The Method of Generalized Reflection and Transmission Coefficients,” Geophysics, Vol. 25, pp. 625-641.

Thomson, W.T., (1950) “Transmission of Elastic Waves Through a Stratified Solid Medium,” J. Appl. Phys., Vol. 21, pp. 89-93.

林宜賢 (2011)，彈性波於多層均質與非均質材料之暫態波傳理論解析與數值計算，台灣大學機械工程學系博士論文。

表 1 PZT4 之壓電常數表

材料 材料常數	PZT4
c_{44} ($10^{10} N/m^2$)	2.56
e_{15} (C/m)	12.7
ϵ_{11} ($10^{-9} F/m$)	6.4634
b (s/m)	3.852×10^{-4}

表 2 PZT-5H 之壓電常數表

材料 材料常數	PZT-5H
c_{11} , ($10^{10} N/m^2$)	12.6
c_{13} , ($10^{10} N/m^2$)	8.41
c_{33} , ($10^{10} N/m^2$)	11.7
c_{44} , ($10^{10} N/m^2$)	3.53
e_{13} , (C/m^2)	-6.5
e_{15} , (C/m^2)	17.0
e_{33} , (C/m^2)	23.3
ϵ_{11} , ($10^{-10} C/Vm$)	151
ϵ_{33} , ($10^{-10} C/Vm$)	130
ρ , (kg/m^3)	7500

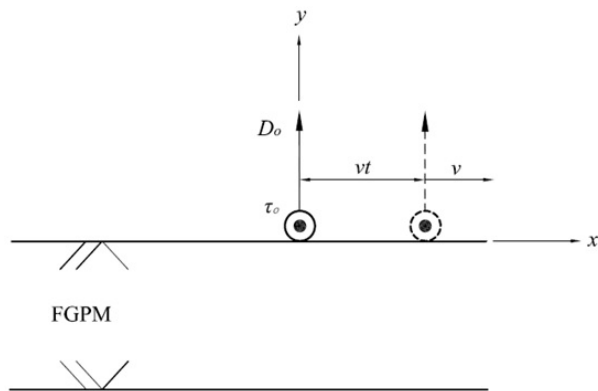


圖 1 功能性梯度壓電單層板受反平面移動點負載之座標示意圖。

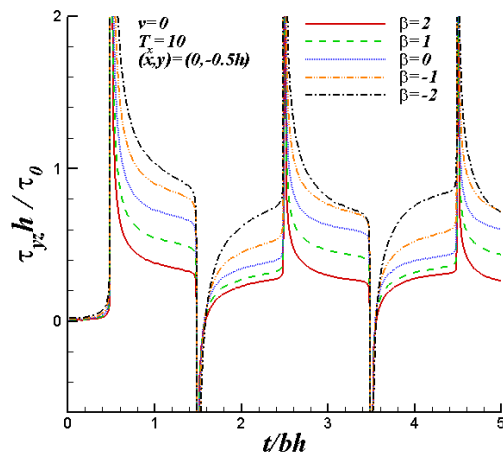


圖 2 功能性梯度壓電材料受到一靜止負載，根據不同 β 值在觀察點的暫態應力比較圖。

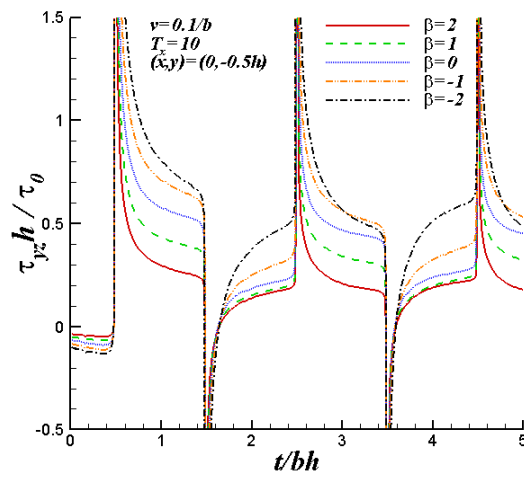


圖 3 功能性梯度壓電材料於點負載移動速度為 $v=0.1/b$ 時，在不同 β 值下的暫態應力圖。

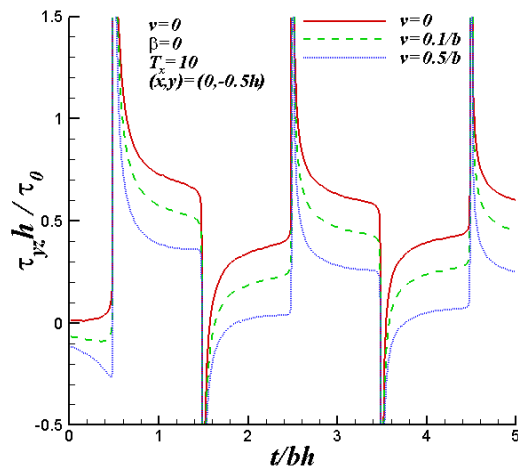


圖 4 功能性梯度壓電材料於 $\beta=0$ 時，在不同移動負載速度下的暫態應力圖。

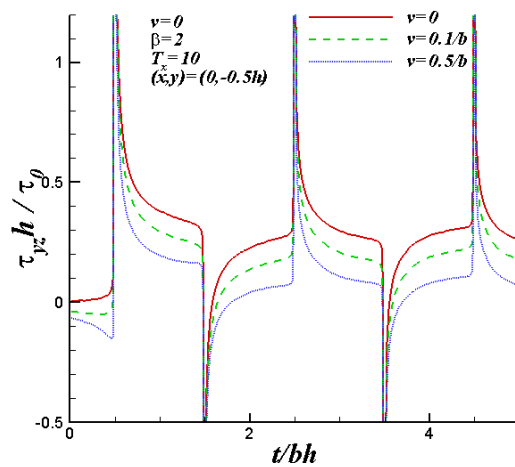


圖 5 功能性梯度壓電材料於 $\beta=2$ 時，在不同移動負載速度下的暫態應力圖。

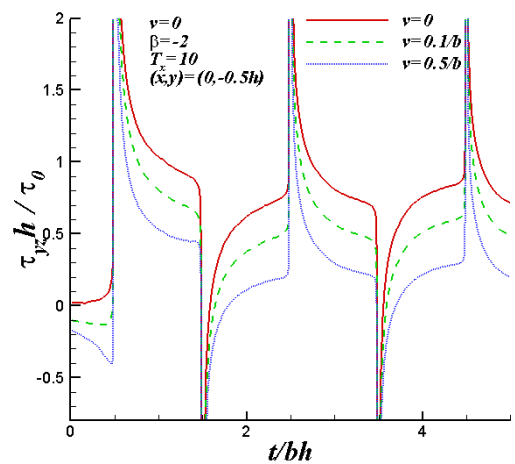


圖 6 功能性梯度壓電材料於 $\beta=-2$ 時，在不同移動負載速度下的暫態應力圖。

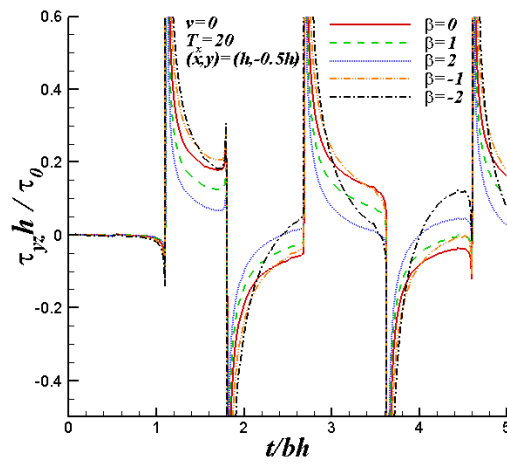


圖 7 功能性梯度壓電材料受於靜止負載下於 $(x, y) = (h, -0.5h)$ 觀察點的暫態應力圖。

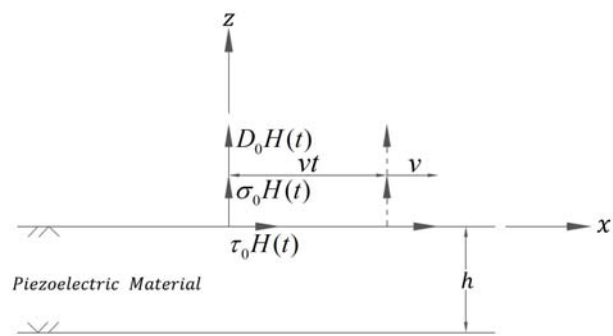


圖 8 單層壓電材料承受平面移動機電點載荷之幾何結構示意圖

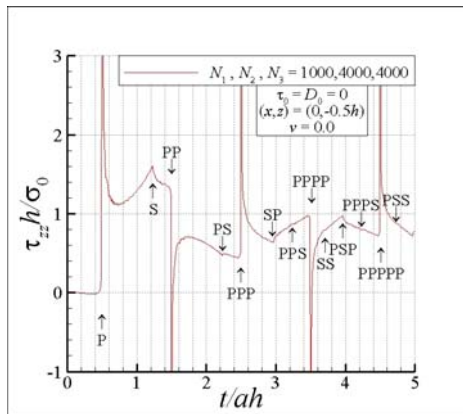


圖 9 觀察點在 $(x,z) = (0, -0.5h)$ 位置的正向應力 τ_{zz} 之 Durbin 加總項數不同之比較暫態數值圖

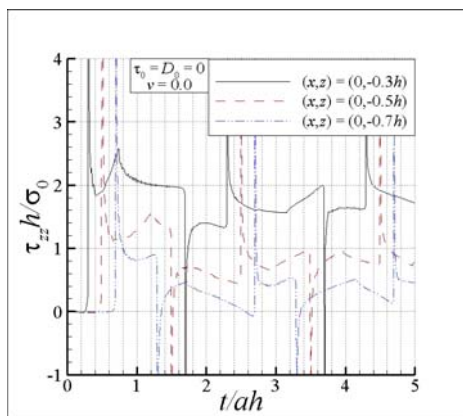


圖 10 觀察點在 $x=0$ 且不同高度位置的正向應力 τ_{zz} 之暫態數值圖

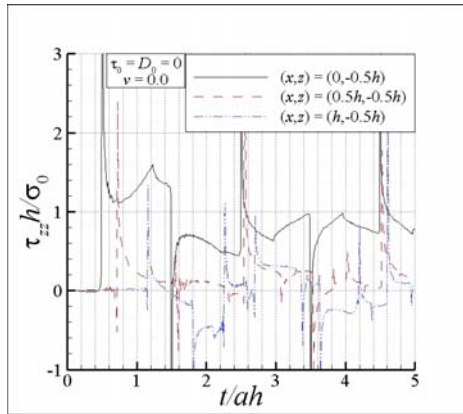


圖 11 觀察點在 $z = -0.5h$ 且不同水平位置的正向應力 τ_{zz} 之暫態數值圖

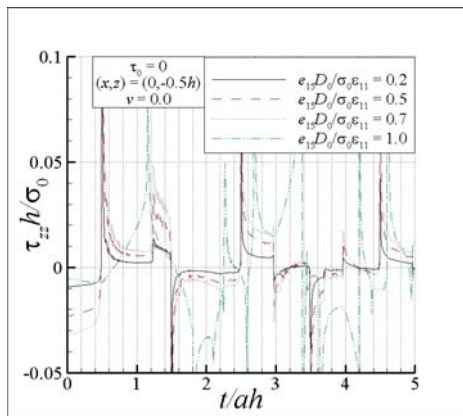


圖 12 觀察點在 $(x,z) = (0, -0.5h)$ 位置施加不同電位移負載大小的正向應力 τ_{zz} 之暫態數值圖

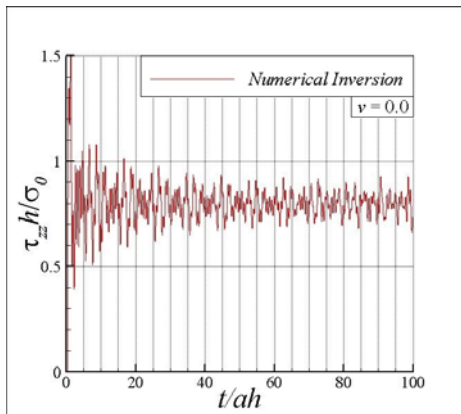


圖 13 觀察點在 $(x, z) = (0, -0.5h)$ 位置的正向應力 τ_{zz} 之長時間暫態數值圖

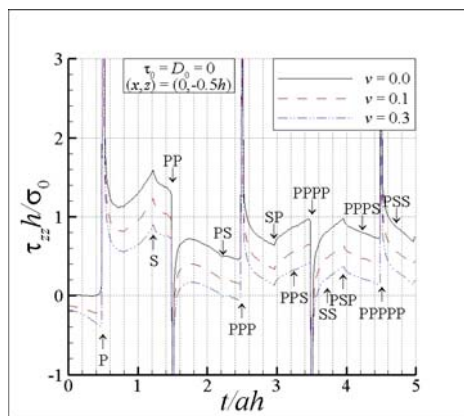


圖 14 觀察點在 $(x, z) = (0, -0.5h)$ 位置的移動速度不同點載荷之正向應力 τ_{zz} 暫態數值圖

科技部補助計畫衍生研發成果推廣資料表

日期:2016/10/26

科技部補助計畫	計畫名稱: 移動機電載荷對壓電複合材料之暫態影響與波傳研究
	計畫主持人: 應宜雄
	計畫編號: 104-2221-E-032-031- 學門領域: 航太技術
無研發成果推廣資料	

104年度專題研究計畫成果彙整表

計畫主持人：應宜雄			計畫編號：104-2221-E-032-031-			
計畫名稱：移動機電載荷對壓電複合材料之暫態影響與波傳研究						
成果項目			量化	單位	質化 (說明：各成果項目請附佐證資料或細項說明，如期刊名稱、年份、卷期、起訖頁數、證號...等)	
國內	學術性論文	期刊論文		0	篇	
		研討會論文		1		
		專書		0	本	
		專書論文		0	章	
		技術報告		1	篇	
		其他		0	篇	
	智慧財產權及成果	專利權	發明專利	申請中	0	件
				已獲得	0	
			新型/設計專利		0	
		商標權		0		
		營業秘密		0		
		積體電路電路布局權		0		
		著作權		0		
		品種權		0		
		其他		0		
	技術移轉	件數		0	件	
		收入		0	千元	
	國外	學術性論文	期刊論文		2	篇
			研討會論文		0	
			專書		0	本
專書論文			0	章		
技術報告			0	篇		
其他			0	篇		
智慧財產權及成果		專利權	發明專利	申請中	0	件
				已獲得	0	
			新型/設計專利		0	
		商標權		0		
		營業秘密		0		
		積體電路電路布局權		0		
		著作權		0		
		品種權		0		
其他		0				

	技術移轉	件數	0	件	
		收入	0	千元	
參與計畫人力	本國籍	大專生	7	人次	
		碩士生	0		
		博士生	0		
		博士後研究員	0		
		專任助理	0		
	非本國籍	大專生	0		
		碩士生	0		
		博士生	0		
		博士後研究員	0		
		專任助理	0		
其他成果 (無法以量化表達之成果如辦理學術活動、獲得獎項、重要國際合作、研究成果國際影響力及其他協助產業技術發展之具體效益事項等，請以文字敘述填列。)					

科技部補助專題研究計畫成果自評表

請就研究內容與原計畫相符程度、達成預期目標情況、研究成果之學術或應用價值（簡要敘述成果所代表之意義、價值、影響或進一步發展之可能性）、是否適合在學術期刊發表或申請專利、主要發現（簡要敘述成果是否具有政策應用參考價值及具影響公共利益之重大發現）或其他有關價值等，作一綜合評估。

1. 請就研究內容與原計畫相符程度、達成預期目標情況作一綜合評估

達成目標

未達成目標（請說明，以100字為限）

實驗失敗

因故實驗中斷

其他原因

說明：

2. 研究成果在學術期刊發表或申請專利等情形（請於其他欄註明專利及技轉之證號、合約、申請及洽談等詳細資訊）

論文： 已發表 未發表之文稿 撰寫中 無

專利： 已獲得 申請中 無

技轉： 已技轉 洽談中 無

其他：（以200字為限）

3. 請依學術成就、技術創新、社會影響等方面，評估研究成果之學術或應用價值（簡要敘述成果所代表之意義、價值、影響或進一步發展之可能性，以500字為限）

本計畫延伸主持人前幾年之研究到移動性點負載的暫態問題，由於結構承受點負載是屬於二維的問題，在理論解析上相當複雜且困難，本計畫成功解析了反平面和平面的兩個問題，並精確的計算了長時間的相關暫態數值結果，除了學術上有一定的貢獻外，對許多工程上的應用也有實際的參考價值。雖本計畫研究的材料是屬於壓電材料，但是亦可退化成一般工程上常見的金屬材料，所以也提高了相關的應用價值。後續主持人將針對平面負載的多層域結構問題繼續進行研究與計算，若能順利精確計算相關結果，對工程上的應用將有更大的助益。

4. 主要發現

本研究具有政策應用參考價值： 否 是，建議提供機關

（勾選「是」者，請列舉建議可提供施政參考之業務主管機關）

本研究具影響公共利益之重大發現： 否 是

說明：（以150字為限）