

淡江大學電機工程學系碩士班(控制晶片與系統組)
碩士論文

指導教授：周永山 博士

車輛主動式懸吊系統之動態控制器設計
Dynamic Controller Design of Vehicle
Active Suspension Systems

研究生：張家偉 撰

中華民國 105 年 6 月

致謝

碩士班的日子，我從懵懵懂懂的大學生，到學有專精的碩士生，過程中，從習得知識、邏輯思考、程式撰寫、口語表達能力，以及待人處世各方面上，這一整套訓練過程，讓我打下穩固的基礎。在此，致上我最誠摯的心，感謝許多曾經幫助我的人。

首先，感謝我的指導教授周永山教授在這段時間不厭其煩的指導，讓我知道身為一個研究生需具備什麼樣的特質及能力，在研究過程中，遇到不少的困境，但老師總是在緊要關頭給予我寶貴的建議或解決方法，在研究中低潮時，總給我關懷、幫助，讓我在這段期間能夠順利地熬過去。同時，感謝口試委員容志輝教授、吳政郎教授所給予學問上的寶貴意見，使得此論文能更加完善。其次，要感謝學長雲綸，感謝他在學業、論文寫作等所給予的技巧及建議。感謝實驗室的學長文翔、景富、品勳、咨融，同學達太及學弟卓隆、伯勝在這段時間的陪伴，讓我在研究生涯中增添了許多色彩。最後要感謝家中的父母，在這段時間給我非常大的支持，讓我能夠學習的路上無後顧之憂地完成學業。我要將此論文與您們分享，謝謝。

家偉 謹誌

中華民國一百零五年6月 于淡水

論文名稱：車輛主動式懸吊系統之動態控制器設計 頁數：72
校系(所)組別：淡江大學 電機工程學系(研究所)控制晶片與系統組
畢業時間及提要別： 104 學年度第 2 學期 碩士學位論文提要
研究生：張家偉 指導教授：周永山

論文提要內容：

本論文研究車輛主動式懸吊系統之動態控制器設計。本文提出一套控制器設計方法，俾使車輛行駛於凹凸地面時有減震效果。

現存設計方法絕大多數採用靜態狀態回授，不同於以往，本文考慮動態輸出回授。本文提出一特殊轉換，可將動態輸出回授控制器的設計問題等價轉換為靜態狀態回授的設計問題，然後可應用現存方法完成設計。因此，車輛安全性的限制(即抓地能力與懸吊系統最大變形量)以及控制力的限制亦可整合於設計條件之中，此為歷來輸出回授設計方法難以達成的特色。另外，所研究問題可視為一窄頻雜訊之抑制問題。本文所提方法引入了內模型，並結合 GKYP (generalized Kalman-Yakubovich-Popov, GKYP)引理，其能使干擾到控制輸出(即車身垂直方向的加速度)在指定頻段的 H_{∞} 範數儘量小，因此可提高乘坐舒適性。

本論文所提出的設計條件皆為線性矩陣不等式(Linear Matrix Inequalities, LMIs)，故可運用現存的軟體有效求解。本文運用 Matlab 及 Simulink 進行數值模擬，設計出動態控制器，將其與未引入內模型的全頻段 H_{∞} 控制器進行頻域波德圖和時域響應圖之比較，模擬結果證實了所提設計方法之可行性及優越性。

關鍵字：主動懸吊系統、動態輸出回授、控制力限制、 H_{∞} 控制、有限頻段

Title of Thesis :

Total pages:72

Dynamic Controller Design of Vehicle Active Suspension Systems

Key word: Active suspension systems, Dynamic output feedback, Actuator limitation, H_∞ control, Finite frequency

Name of Institute: Department of Electrical Engineering, Tamkang University

Graduate date: June 2016

Degree conferred: Master

Name of student: Jia-Wei Jhang
張家偉

Advisor: Yung-Shan Chou
周永山

Abstract:

In this thesis, the dynamic controller synthesis problem of vehicle active suspension systems is investigated. A controller design method is proposed which is capable of reducing the vibration of the vehicle when driving on uneven ground.

In contrast with the majority of the existing design methods which employ static state feedback, this thesis considers dynamic output feedback. A special transformation is introduced that equivalently converts the dynamic output feedback controller synthesis problem into a static state feedback design problem. Then the design can be completed by applying the available existing methods. The introduced transformation overcomes the difficulty of incorporating the constraints of road holding ability, maximum suspension deflection of the active suspension system, and actuator limitation into a output feedback design. This feature is hardly seen in the existing methods. In addition, the control problem is regarded as a narrow-band disturbance attenuation problem. To enhance ride comfort, the proposed methods introduce internal models into the design, combined with the generalized Kalman-Yakubovich-Popov (GKYP) Lemma in order to minimize the H_∞ gain of the transfer function from the disturbance to the observed output (i.e., the vertical acceleration of the vehicle body) in the desirable restricted frequency range.

Synthesis conditions are derived in terms of linear matrix inequalities (LMIs), which can be efficiently solved by existing LMI solvers. Numerical simulation is conducted using Matlab and Simulink. Dynamic controllers are computed by the proposed methods and compared with the (entire frequency) H_∞ controller design without introducing the internal models. Simulation results demonstrate the feasibility and effectiveness of the proposed design methods in terms of lower Bode diagrams and better time domain responses.

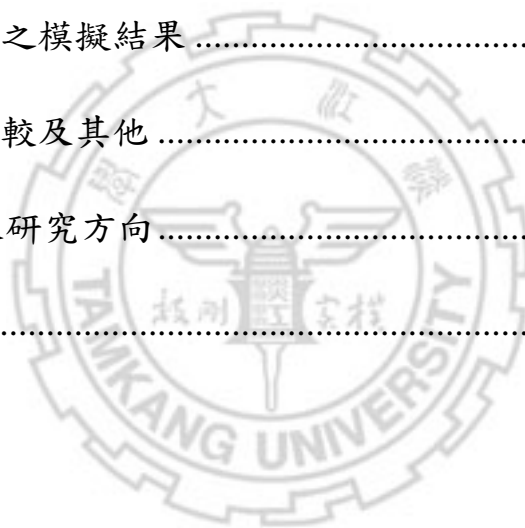
表單編號：ATRX-Q03-001-FM031-01

目 錄

中文摘要.....	I
英文摘要.....	II
目 錄.....	III
圖目錄.....	VI
表目錄.....	IX
第一章 緒論.....	1
1.1 前言.....	1
1.2 懸吊系統的分類.....	2
1.3 懸吊系統舒適度之評價方式.....	4
1.4 文獻回顧與研究動機.....	4
1.5 論文架構.....	5
第二章 背景知識與問題敘述.....	6
2.1 問題敘述.....	7
2.1.1 主動懸吊系統之數學模型.....	7
2.1.2 主動懸吊系統之設計目標.....	10
2.2 背景知識.....	11

第三章 主動懸吊系統動態輸回授控制器設計	15
3.1 前言	15
3.2 方法一：不含內模型	16
3.2.1 系統架構.....	16
3.2.2 動態控制器設計問題之轉換.....	18
3.2.3 合成式條件.....	24
3.2.3.1 指定頻段 H_{∞} 性能條件.....	25
3.2.3.2 區域極點配置條件	28
3.2.3.3 控制力受限及安全性條件	31
3.2.4 動態控制器之還原公式.....	32
3.3 方法二：一般積分器之內模型	33
3.3.1 系統架構.....	33
3.3.2 動態控制器設計問題之轉換.....	36
3.3.3 合成式條件.....	40
3.3.4 動態控制器之還原公式.....	40
3.4 方法三：針對窄頻之內模型	41
3.4.1 系統架構.....	41
3.4.2 動態控制設計問題之轉換.....	44

3.4.3 合成式條件.....	48
3.4.4 動態控制器之還原公式.....	48
第四章 數值模擬及實驗結果.....	51
4.1 前言.....	51
4.2 方法一之模擬結果.....	52
4.3 方法二之模擬結果.....	55
4.4 方法三之模擬結果.....	58
4.5 綜合比較及其他.....	61
第五章 結論與未來研究方向.....	69
參考文獻.....	70



圖目錄

圖 1.1	被動式懸吊系統	2
圖 1.2	半主動式懸吊系統	2
圖 1.3	主動式懸吊系統	3
圖 2.1	主動式懸吊四分之一車體模型	7
圖 2.2	$P-K$ 架構圖	11
圖 3.1	動態輸出回授系統整體架構	16
圖 3.2	動態輸出回授系統之 $P-K$ 架構	17
圖 3.3	動態輸出回授系統架構	19
圖 3.4	靜態狀態回授架構	24
圖 3.5	動態輸出回授系統整體架構	33
圖 3.6	含內模型之受控體模型	34
圖 3.7	動態輸出回授系統之 $P-K$ 架構	35
圖 3.8	動態輸出回授系統架構	37
圖 3.9	靜態狀態回授架構	40
圖 3.10	動態輸出回授系統整體架構	41
圖 3.11	含內模型之受控體模型	42

圖 3.12	動態輸出回授系統之 $P-K$ 架構.....	43
圖 3.13	動態輸出回授系統架構	45
圖 3.14	靜態狀態回授架構	48
圖 4.1	干擾到車身垂直加速度之頻域響應圖(方法一)	53
圖 4.2	懸吊系統之 Simulink 模型.....	54
圖 4.3	懸吊模型之閉迴路控制系統 Simulink 模型	54
圖 4.4	主動懸吊系統之車身垂直加速度的時域響應圖(方法一)	55
圖 4.5	干擾到車身垂直加速度之頻域響應圖(方法二)	57
圖 4.6	主動懸吊系統之車身垂直加速度的時域響應圖(方法二)	57
圖 4.7	干擾到車身垂直加速度之頻域響應圖(方法三)	59
圖 4.8	主動懸吊系統之車身垂直加速度的時域響應圖(方法三)	60
圖 4.9	干擾到車身垂直加速度頻域響應之比較	61
圖 4.10	干擾到車身垂直加速度頻域響應圖之局部放大圖	62
圖 4.11	主動懸吊系統之車身垂直加速度的時域響應比較圖	63
圖 4.12	干擾到車身垂直加速度之頻域響應圖	64
圖 4.13	主動懸吊系統之車身垂直加速度的時域響應圖	65
圖 4.14	主動懸吊的限制條件之時域響應圖(方法三)	66
圖 4.15	干擾到車身垂直加速度之頻域響應比較圖	67

圖 4.16 車身垂直加速度的時域響應比較圖(雜訊一) 68

圖 4.17 車身垂直加速度的時域響應比較圖(雜訊二) 68



表目錄

表 4.1 主動懸吊系統模型參數 51



第一章 緒論

1.1 前言

車輛由於便利性、容易操作的特性，是現在生活中不可或缺的交通工具，隨著科技的發展與生活素質不斷的提升，人們對於交通工具的舒適性、安全性與操控行能的要求也越來越高。為了滿足人類的需求而且使車輛在行駛時，能夠吸收因路面凹凸不平所導致車輪的上下震動，因此優良的車輛懸吊系統(Suspension)是現今所有車輛不可或缺的一個重要裝置，其目的就是要將車身接收到來自地面的震動給削弱，使車內乘客能感到舒適。

懸吊系統是指車身、車架和車輪之間的一個連接結構系統，而這個結構系統包含了避震器(Shock Absorber)、彈簧(Spring)、防傾桿(Anti-Roll Bar)、連桿(Connecting Rod)等部件。當汽車行駛在路面上時因地面的變化而受到震動及衝擊，這些衝擊的力量其中一部份會由輪胎吸收，但絕大部分是依靠輪胎與車身間的懸吊裝置來吸收的。懸吊系統除了支撐車身，吸收震動及衝擊力外，其目的還有保持車輪與路面的接觸，以提供適當的輪胎抓地力以及良好的操控性與安全性，並保持車內乘客的舒適性。

1.2 懸吊系統的分類

一般而言懸吊系統可區分為三類被動式懸吊系統、半主動式懸吊系統、與主動式懸吊系統[1]-[3]：

1. 被動式懸吊系統

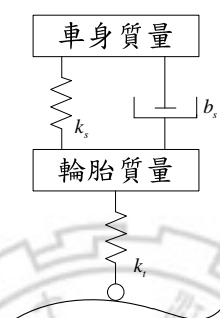


圖 1.1 被動式懸吊系統

被動式懸吊系統如圖 1.1 所示，是由彈簧與阻尼器(Damper)所組成。其中，彈簧為儲能元件，暫時吸收路面傳來之衝擊能量，並加以儲存，阻尼器為耗能元件，依照懸吊系統的伸縮速度提供某種比例之被動反向抵抗力，使得震動干擾漸趨收斂，增進乘坐的舒適性。

2. 半主動式懸吊系統

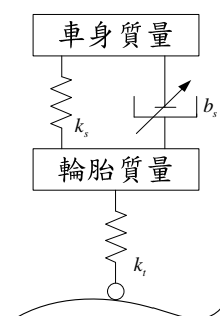


圖 1.2 半主動式懸吊系統

半主動式懸吊系統如圖 1.2 所示，是由彈簧與可調節阻尼器、電子裝置(Electronic Device)等元件組成所組成。其中，電子裝置為量測訊號、計算訊號和傳遞訊號等功用。半主動式懸吊系統可利用裝在車身的各種感測器獲得車體本身運動狀況及行駛路面狀況，再經由控制器輸出控制訊號來改變系統的阻尼常數，適時消散車體的震動，進而改善乘坐的舒適性。

3. 主動式懸吊系統



圖 1.3 主動式懸吊系統

主動式懸吊系統如圖 1.3 所示，是由彈簧、阻尼器、致動器(Actuator)、電子裝置、感測器(Sensor)等元件組成所組成，其針對車輛行駛於凹凸地面所造成的振動干擾，經由感測器獲得路面狀況訊號及量測車體與懸吊系統的位移、速度或加速度，將這些資訊回授至控制器，再藉由致動器提供額外的控制力量，以有效抑制外部傳來的震動，進而改善乘坐的舒適性。

1.3 懸吊系統舒適度之評價方式

關於懸吊系統的表現，最明顯的指標，就是車輛振動的情形，此涉及乘客的舒適度。針對車輛的乘坐品質有許多研究，在眾多研究成果中都有一個共通點，那就是降低人類最容易感到不適的振動頻率分量。內臟在垂直方向振動時，其頻率在 4-8Hz 會發生共振，而在 8-12.5Hz 的振動頻率下對脊椎會有較大的影響，故降低車輛此頻段的振動分量為我們主要的目標。Meister(1926)[4]研究人體受震動影響的反應，發現人體在垂直震動時，對 4-8Hz 的分量最敏感，在這個頻段中加速度越大，人所能忍受的時間就越少，因此懸吊系統應儘可能使車身在此頻段的加速度降至最低，此為國際標準組織(ISO)採用於舒適性之評比。

1.4 文獻回顧與研究動機

過去主動懸吊系統已有許多相關研究，其所使用的控制方法也很多，如線性最佳化控制(Linear Optimal Control)[5]、模糊控制(Fuzzy Control)[6]-[7]、類神經網路(Neural Network)[8]、適應控制(Adaptive Control)[9]等。而強健控制(Robust Control)中的 H_{∞} 控制也是許多文獻曾研究過，但絕大多數討論靜態狀態回授的控制法則[10]-[14]，對於輸出回授的控制法則則相對稀少[15]-[16]。

本論文針對汽車主動懸吊系統提出一套控制器設計，以使車輛行駛於凹凸地面時有減震效果。所提方法引入了內模型，並結合 GKYP (generalized Kalman-Yakubovich-Popov, GKYP)引理，其能使干擾到控制輸出(即車身垂直方向的加速度)在指定頻段的 H_{∞} 範數儘量小，因此可提高乘坐舒適性。

本方法提之方法，可將動態輸出回授控制器的設計問題等價轉換為靜態狀態回授的設計問題，然後可應用現存相關方法完成設計。因此，控制力大小以及車輛安全性的限制亦可整合於設計條件之中，此為歷來設計方法所少有的特色。

1.5 論文架構

本論文共有五章，第一章為緒論，簡介懸吊系統與文獻回顧。第二章為背景知識與問題敘述，提供符號之定義以及第三章推導控制器設計條件所需引理。第三章所提出的設計方法乃動態輸出回授控制器設計，先將動態回授控制器的設計問題轉成靜態回授的設計問題，然後針對設計目標推導出設計條件。第四章依據本文提出的動態控制器設計方法進行數值模擬，驗證確實可達到設計目標。第五章為結論與未來研究方向。

第二章 背景知識與問題敘述

本章介紹本論文中欲研究的問題，以及所需要的背景知識，包括符號意義、定義與後面章節將引用的重要引理。

符號意義

\mathbb{R}^n	n 維實數行向量所成集合
$\mathbb{R}^{m \times n}$	$m \times n$ 實係數矩陣所成集合
$\bar{\sigma}(X)$	矩陣 X 之最大奇異值(singular value)
$\{X\}_i, (i=1,2,\dots)$	矩陣 X 之第 i 列
H_∞	在連續時域， H_∞ 代表在複數平面右半部(即 $\text{Re}(s) > 0$)為可解析(analytic)且在虛軸上(含 ∞)為有界的函數所成的集合。
RH_∞	實係數有理(real-rational)且正則(proper)的穩定(stable)函數所成集合(註: 在連續時域，穩定函數係指其極點(poles)皆在左半開複數平面的函數)
*	於一個矩陣中，用以表示對稱之結構
$\text{He}\{X\}$	$\text{He}\{X\} := (X + X^*)$

2.1 問題敘述

本論文研究問題是以主動懸吊系統為設計對象，設計動態控制器，以使車輛行駛於凹凸地面時有減振效果，使車內乘客感到舒適，以提高乘坐之品質。本小節將介紹主動懸吊系統之數學模型，並且列出設計目標。

2.1.1 主動懸吊系統之數學模型[17]

本文考慮圖 2.1 之主動式懸吊四分之一車體模型，其中 m_s 為四分之一車體質量(sprung mass)， m_u 為車輪與其他懸吊部分質量(unsprung mass)， k_s 為懸吊系統之彈簧係數， c_s 為懸吊系統之阻尼係數， k_t 為輪胎之彈簧係數， c_t 為輪胎阻尼係數， z_s 、 z_u 、 z_r 分別為車身、輪胎與路面在垂直方向之位移， u 是懸吊系統的控制輸入。

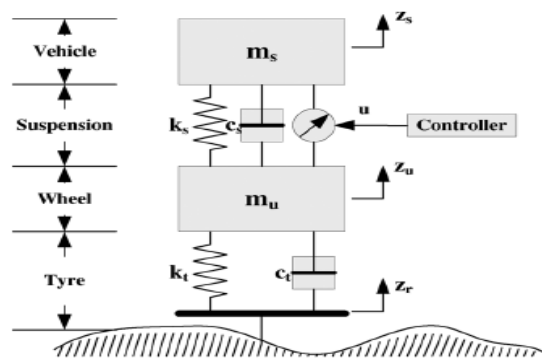


圖 2.1 主動式懸吊四分之一車體模型

根據圖 2.1 的符號定義與牛頓第二運動定律可推導出車輛主動式懸吊系統之動態方程式。

$$m_s \ddot{z}_s(t) = k_s [z_u(t) - z_s(t)] + c_s [\dot{z}_u(t) - \dot{z}_s(t)] + u(t) \quad (2.1)$$

$$m_u \ddot{z}_u(t) = k_s [z_s(t) - z_u(t)] + c_s [\dot{z}_s(t) - \dot{z}_u(t)] + k_t [z_r(t) - z_u(t)] + c_t [\dot{z}_r(t) - \dot{z}_u(t)] - u(t) \quad (2.2)$$

接著定義狀態變數如下：

$x_1(t) = z_s(t) - z_u(t)$ 為懸吊變化量、 $x_2(t) = z_u(t) - z_r(t)$ 為輪胎變化量、 $x_3(t) = \dot{z}_s(t)$ 為車身速度、 $x_4(t) = \dot{z}_u(t)$ 為輪胎速度。

由上述及(2.1)、(2.2)式整理可得懸吊系統狀態方程式，描述如下：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_1 w(t) \quad (2.3)$$

詳細矩陣內容如下：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & 0 & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} \\ \frac{k_s}{m_u} & -\frac{k_t}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{c_s + c_t}{m_u} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{m_s} & -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}^T \quad (2.4)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{c_t}{m_u} \end{bmatrix}^T$$

而 $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$ ， $u(t)$ 是懸吊系統的控制輸入， $w(t) = \dot{z}_r(t)$ 代表振動干擾。

為了確保汽車的安全性，我們應確保車輪不間斷地接觸地面以及輪

胎負荷要儘量小，相當於 $k_t(z_u(t) - z_r(t)) < (m_s + m_u)g$ ，其中 g 是重力加速度。而從車輛機械結構限制的觀點來看，懸吊的位移量也有限制，相當於 $|z_s(t) - z_u(t)| \leq z_{\max}$ ，其中， z_{\max} 代表為懸吊最大位移量。另外，控制力受限條件相當於 $|u(t)| \leq u_{\max}$ ，其中， u_{\max} 是懸吊系統的最大控制輸入。

根據以上敘述，為了滿足性能要求(相當於抑制車身之振動問題)及安全性限制，將待控制的輸出定義如下：

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \ddot{z}_s(t) \\ z_2(t) &= \begin{bmatrix} \frac{z_s(t) - z_u(t)}{z_{\max}} & \frac{k_t(z_u(t) - z_r(t))}{(m_s + m_u)g} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.5)$$

因此，根據(2.5)之控制輸出，車輛懸吊控制系統的動態方程式可描述如下：

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_1w(t) \\ z_1(t) &= C_1x(t) + D_1u(t) \\ z_2(t) &= C_2x(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中， A 、 B 、 B_1 定義如(2.4)，而 C_1 、 D_1 、 C_2 內容如下：

$$\begin{aligned} C_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & 0 & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} \end{bmatrix} \\ D_1 &= \frac{1}{m_s} \\ C_2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{z_{\max}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_t}{(m_s + m_u)g} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.7)$$

若 $u(t) = Kx(t)$ ，則閉迴路系統 H 可表示如下：

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{A}x(t) + \bar{B}w(t) \\ z_1(t) &= \bar{C}x(t) + \bar{D}w(t) \\ z_2(t) &= C_2x(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

其中

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & B_1 \\ C_1 + D_1K & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

2.1.2 主動懸吊系統之設計目標

不同於[17]採用狀態回授，本論文考慮動態控制器之設計。定義 $G(s)$ 代表干擾輸入 w 到控制輸出 z_1 的轉移函數。因此抑制車身之振動問題相當於要求閉迴路系統達到如下指定頻段之性能：

$$\sup_{\omega_1 < \omega < \omega_2} \bar{\sigma}(G(j\omega)) < \gamma \quad (2.10)$$

其中， $\omega_1 = 4\text{Hz}$ 、 $\omega_2 = 8\text{Hz}$ ， $\gamma > 0$ 儘量小。

另外，控制力受限條件如下：

$$|u(t)| \leq u_{\max} \quad (2.11)$$

而從車輛安全性及機械結構的觀點來看，限制條件如下：

$$|\{z_2(t)\}_i| \leq 1, i = 1, 2 \quad (2.12)$$

2.2 背景知識

廣義受控體定義

在此節將先介紹常用控制器設計架構，即 $P-K$ 架構，並且定義單輸入單輸出系統 G 的 H_∞ 範數。若 $G(s)$ 為實係數有理且正則的穩定函數(註：在連續時域，穩定函數係指其極點皆在左半開複數平面的函數)，則 G 的 H_∞ 範數定義如下：

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}} |G(j\omega)| \text{ (連續時域)}$$

考慮強健控制理論常用的 $P-K$ 架構，如圖 2.2 所示

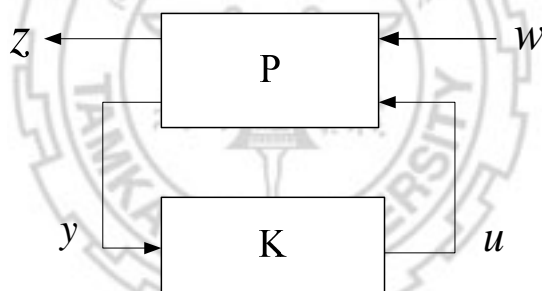


圖 2.2 $P-K$ 架構圖

其中 P 為廣義受控體 (generalized plant) 由下列數學方程式描述：

$$P \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ 為系統的狀態向量， $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ 為外部擾動組成的輸入， $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ 為待觀測或待控制的輸出， $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ 為控制器的控制訊號， $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ 為系統的回

授訊號，而 $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ， $B_1 \in \mathcal{R}^{n \times n_w}$ ， $B_2 \in \mathcal{R}^{n \times n_u}$ ， $C_1 \in \mathcal{R}^{n_z \times n}$ ， $C_2 \in \mathcal{R}^{n_y \times n}$ ，

$D_{11} \in \mathcal{R}^{n_z \times n_w}$ ， $D_{12} \in \mathcal{R}^{n_z \times n_u}$ ， $D_{21} \in \mathcal{R}^{n_y \times n_w}$ 。

靜態狀態回授設計

若考慮靜態狀態回授控制法則， $u = Kx$ ，其中 $K \in \mathcal{R}^{n_u \times n}$ 為狀態回授增益。所以從 w 到 z 的閉迴路系統 T_{zw} 可表示為

$$T_{zw} \begin{cases} \dot{x} = A_{cl}x + B_{cl}w \\ z = C_{cl}x + D_{cl}w \end{cases} \quad (2.13)$$

其中

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A + B_2K & B_1 \\ \hline C_1 + D_{12}K & D_{11} \end{array} \right] \quad (2.14)$$

訊號 w 到 z 各通道(channel)的性能要求有時不盡相同，所以可定義閉迴路子系統

$$T_{ij} := L_i T_{zw} R_j$$

其中矩陣 $L_i \in \mathcal{R}^{n_{L_i} \times n_z}$ 與 $R_j \in \mathcal{R}^{n_w \times n_{R_j}}$ 是用來選擇不同的輸出/輸入通道。因此，從 w_j (維度 n_{R_j}) 到 z_i (維度 n_{L_i}) 的閉迴路系統 T_{ij} 的狀態空間矩陣可表示如下：

下：

$$T_{ij} = L_i T_{zw} R_j = \left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl}R_j \\ \hline L_i C_{cl} & L_i D_{cl}R_j \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A + B_2K & B_{\alpha j} \\ \hline C_{\alpha i} + E_{\alpha i}K & D_{\alpha ij} \end{array} \right]$$

其中 $B_{\alpha_j} \equiv B_1 R_j$ ， $C_{\alpha_i} \equiv L_i C_1$ ， $D_{\alpha_{ij}} \equiv L_i D_{11} R_j$ ， $E_{\alpha_i} \equiv L_i D_{12}$ 。

底下列出後續推論所需之引理。引理一乃關於一系統於指定頻段 H_∞ 性能之數學式。而引理二則關於閉迴路系統(2.8)之穩定性、控制力受限條件與安全性條件。

引理 1[18]：給予正數 γ 。假設 H 為一連續系統之轉移函數，其狀態空間實現為 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ 。函數 H 在低頻段 $\Theta = [0, \omega_l]$ 內的增益小於 γ ，即 $\bar{\sigma}(H(j\omega)) < \gamma$ ， $\forall \omega \in \Theta$ ，若且唯若，存在對稱實數矩陣 P 、 Q 和實數矩陣 W ，滿足 $Q > 0$ 以及

$$\begin{bmatrix} -Q & -P - W^T & 0 & 0 \\ * & \omega_l^2 Q - \text{He}\{W\bar{A}\} & W\bar{B} & \bar{C}^T \\ * & * & -\gamma I & -\bar{D}^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.15)$$

若考慮中頻段時，則 $\Theta = [\omega_1, \omega_2]$ ，並且 $\omega_c = (\omega_1 + \omega_2)/2$ ，而且(2.15)更改為(2.16)。

$$\begin{bmatrix} -Q & -P - j\omega_c Q - W^T & 0 & 0 \\ * & -\omega_1 \omega_2 Q - \text{He}\{W\bar{A}\} & W\bar{B} & \bar{C}^T \\ * & * & -\gamma I & -\bar{D}^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.16)$$

若考慮高頻段時，則 $\Theta = [\varpi_h, \infty]$ ，而且(2.15)更改為(2.17)。

$$\begin{bmatrix} Q + \text{He}\{W\} & -P + W\bar{A} & -W\bar{B} & 0 \\ * & -\varpi_h^2 Q & 0 & \bar{C}^T \\ * & * & -\gamma I & -\bar{D}^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.17)$$

引理 2[17]：給予正數 η 、 ρ 、 u_{\max} 、 z_{\max} 。令 $V(0) = x^T(0)P_1x(0)$ ， $\int_0^t w^T(t)w(t)dt \leq w_{\max}$ ， $\forall t \geq 0$ ，以及 $w_{\max} = (\rho - V(0))/\eta$ 。若存在對稱實數矩陣 P_1 和實數矩陣 W 、 K ，滿足 $P_1 > 0$ 以及下列 LMI(2.18)-(2.20)，則閉迴路系統(2.8)穩定，並且滿足設計目標(2.11)-(2.12)。

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{W^T\} & W\bar{A} + P_1 & W & W\bar{B} \\ * & -P_1 & 0 & 0 \\ * & * & -P_1 & 0 \\ * & * & * & -\eta I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.18)$$

$$\begin{bmatrix} -I & \sqrt{\rho}K \\ * & -u_{\max}^2 P_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.19)$$

$$\begin{bmatrix} -I & \sqrt{\rho}\{C_2\}_i \\ * & -P_1 \end{bmatrix} < 0, i = 1, 2 \quad (2.20)$$

第三章 主動式懸吊系統之動態輸出回授控制器設計

3.1 前言

就我們所知，現存主動懸吊系統的控制大多考慮靜態狀態回授，而考慮輸出回授相當稀少，故本論文研究動態輸出回授設計，僅擷取車體上下震盪的加速度資訊作回授控制。本文改良[19]發展出一套方法，可將動態控制器的設計問題轉換為靜態狀態回授增益的設計問題。應用 GKYP 引理，推導出一組符合本文指定頻段性能要求的充分有解條件。由於控制力大小及安全性的限制條件亦可表為線性矩陣不等式[20]，故可同時求解，以達到設計之目的。

由於問題本質為窄頻雜訊之抑制，除了上述指定頻段的控制方法，本文也引入內模型來輔助設計。本論文提出了三種方法來抑制特定頻段干擾到車身垂直加速度之影響，其可區分為不含內模型、一般積分器之內模型，以及針對極窄頻段之內模型，細節請見 3.2 節至 3.4 節。

本論文先將內模型併入主動式懸吊系統之數學模型，將動態輸出回授的設計問題等價轉換為靜態狀態回授的設計問題，推導出滿足設計目標的條件，然後求解靜態狀態回授增益，透過轉換公式，還原動態控制器。最後以數值模擬驗證所提方法的可行性，並且比較其效能。

3.2 方法一：不含內模型

本小節提供不含內模型的設計方法。

3.2.1 系統架構

本論文考慮的動態輸出回授系統整體架構如圖 3.1 所示，而 $K_0^{(1)}$ 為待設計之動態控制器。

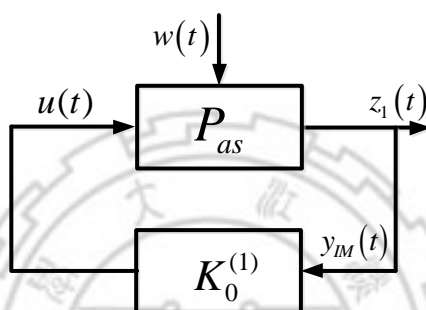


圖 3.1 動態輸出回授系統整體架構

P_{as} 為主動懸吊系統之小訊號模型，表示如下：

$$P_{as} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_1 w(t) \\ z_1(t) = C_1 x(t) + D_1 u(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

其中， $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$ 為狀態變數， $u(t)$ 是懸吊系統的控制輸入， $w(t)$ 代表震動干擾。 P_{as} 之係數矩陣可由 2.1 節的(2.4)與(2.7)得知：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & 0 & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} \\ \frac{k_s}{m_u} & -\frac{k_t}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{c_s + c_t}{m_u} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{c_t}{m_u} \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & 0 & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ m_s \end{bmatrix}$$

欲得到圖 3.1 系統之 P - K 架構，定義連續時間之廣義受控體 $P^{(1)}$ ，表示如下：

$$P^{(1)} \begin{cases} \dot{x}_c(t) = A^{(1)}x_c(t) + B_1^{(1)}w_c(t) + B_2^{(1)}u_c(t) \\ z_c(t) = C_1^{(1)}x_c(t) + D_{11}^{(1)}w_c(t) + D_{12}^{(1)}u_c(t) \\ y_c(t) = C_2^{(1)}x_c(t) + D_{21}^{(1)}w_c(t) + D_{22}^{(1)}u_c(t) \end{cases}$$

接著將 P - K 架構之符號與圖 3.1 做對應，如圖 3.2，

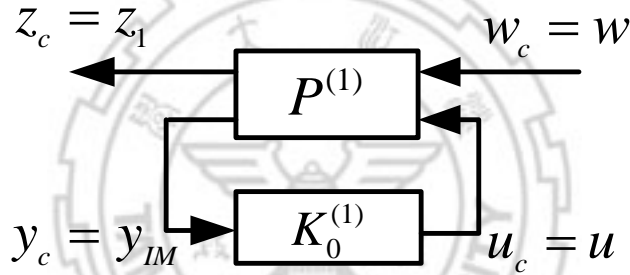


圖 3.2 動態輸出回授系統之 P - K 架構

其中廣義受控體之狀態變數 $x_c(t) = x(t)$ ，而 $w_c(t) = w(t)$ ， $u_c(t) = u(t)$ ， $y_c(t) = y_{IM}(t)$ 。因此，

$$z_c(t) = z_1(t) = C_1x(t) + D_1u(t)$$

$$y_c(t) = y_{IM}(t) = z_1(t) = C_1x(t) + D_1u(t)$$

所以 $P^{(1)}$ 狀態空間矩陣為

$$A^{(1)} = A, B_1^{(1)} = B_1, B_2^{(1)} = B, C_1^{(1)} = C_1, C_2^{(1)} = C_1, D_{11}^{(1)} = 0, D_{12}^{(1)} = D_1, D_{21}^{(1)} = 0,$$

$D_{22}^{(1)} = D_1$ ，具體內容如下：

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & 0 & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} \\ \frac{k_s}{m_u} & -\frac{k_t}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{c_s + c_t}{m_u} \end{bmatrix}, B_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{c_t}{m_u} \end{bmatrix}, B_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}$$

$$C_1^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & 0 & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} \end{bmatrix}, C_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & 0 & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} \end{bmatrix}, D_{11}^{(1)} = 0,$$

$$D_{12}^{(1)} = D_1, D_{21}^{(1)} = 0, D_{22}^{(1)} = D_1。$$

因此廣義受控體狀態空間矩陣如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	w	u
\dot{x}_1	0	0	1	-1	0	0
\dot{x}_2	0	0	0	1	-1	0
\dot{x}_3	$-\frac{k_s}{m_s}$	0	$-\frac{c_s}{m_s}$	$\frac{c_s}{m_s}$	0	$\frac{1}{m_s}$
\dot{x}_4	$\frac{k_s}{m_u}$	$-\frac{k_t}{m_u}$	$\frac{c_s}{m_u}$	$-\frac{c_s + c_t}{m_u}$	$\frac{c_t}{m_u}$	$-\frac{1}{m_u}$
z_1	$-\frac{k_s}{m_s}$	0	$-\frac{c_s}{m_s}$	$\frac{c_s}{m_s}$	0	D_1
y_{IM}	$-\frac{k_s}{m_s}$	0	$-\frac{c_s}{m_s}$	$\frac{c_s}{m_s}$	0	D_1

3.2.2 動態控制器設計問題之轉換

本小節將介紹動態輸出回授控制器設計問題如何轉換為靜態狀態回授增益設計問題。圖 3.3 為動態回授閉迴路系統架構圖，其中主動懸吊小訊號模型如(3.1)， $K_0^{(1)}$ 為待設計之動態控制器。

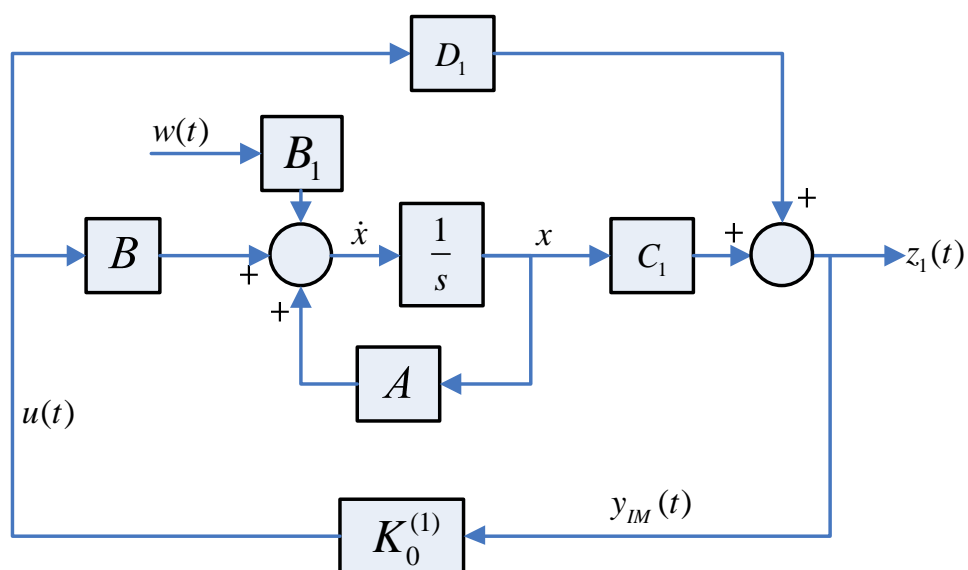


圖 3.3 動態輸出回授系統架構

根據圖 3.3 重新建模。將(3.1)取拉氏轉換可得

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s) + B_1W(s)$$

令初始值 $X(0)$ 為 0 且移項，可得

$$(sI - A)X(s) = BU(s) + B_1W(s)$$

假設 $(sI - A)^{-1}$ 存在，則

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s) + (sI - A)^{-1} B_1W(s)$$

$$\begin{aligned} Z_1(s) &= C_1X(s) + D_1U(s) = C_1(sI - A)^{-1} BU(s) + C_1(sI - A)^{-1} B_1W(s) + D_1U(s) \\ &= \left[C_1(sI - A)^{-1} B + D_1 \right] U(s) + C_1(sI - A)^{-1} B_1W(s) \end{aligned}$$

根據圖 3.3 及上述推導得知

$$Y_{IM}(s) = Z_1(s) = \left[C_1(sI - A)^{-1} B + D_1 \right] U(s) + C_1(sI - A)^{-1} B_1W(s)$$

其中 $Y_{IM}(s)$ 、 $Z_1(s)$ 、 $U(s)$ 及 $W(s)$ 分別代表時域訊號 $y_{IM}(t)$ 、 $z_1(t)$ 、 $u(t)$ 以及 $w(t)$ 之拉氏轉換。令

$$C_1(sI - A)^{-1}B + D_1 = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}, \quad C_1(sI - A)^{-1}B_1 = \frac{N_w(s)}{D_p(s)}$$

其中 $N_p(s)$ 、 $N_w(s)$ 以及 $D_p(s)$ 為多項式且 $D_p(s) = \det(sI - A)$ ，則

$$Y_{IM}(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}U(s) + \frac{N_w(s)}{D_p(s)}W(s)$$

將上式兩邊同乘 $D_p(s)$ 可得

$$D_p(s)Y_{IM}(s) = N_p(s)U(s) + N_w(s)W(s) \quad (3.2)$$

假設 $\deg(N_w(s)) = \deg(D_p(s)) - 1 = \bar{n}$ 。令 n_p 為多項式 $\det(sI - A)$ 之次數，則 $\bar{n} = n_p - 1$ ，亦即 T_{z_1w} 為相對次數等於 1 之轉移函數（註：因為 $C_1B_1 \neq 0$ ，此假設成立）。另外，假設 $N_w(s)$ 之根皆為相異實數。

將(3.2)式左右各除以多項式 $\bar{N}_w(s)$ ，其中 $\bar{N}_w(s) = \prod_{i=1}^{\bar{n}}(s + |\beta_i|)$ ，而 β_i 為

$N_w(s) = 0$ 之根， $i = 1, \dots, \bar{n}$ ，可得

$$\left(s + a_0 + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{a_i}{s + |\beta_i|} \right) Y_{IM}(s) = \left(D_1 s + b_0 + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{b_i}{s + |\beta_i|} \right) U(s) + H(s)W(s)$$

其中 $H(s) = \frac{N_w(s)}{\bar{N}_w(s)} = \prod_{i=1}^{\bar{n}} \frac{s - \beta_i}{s + |\beta_i|}$ 為穩定的全通函數 (All Pass Function)。移

項整理可得

$$s(Y_{IM}(s) - D_1U(s)) = -\left(a_0 + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{a_i}{s + |\beta_i|}\right)Y_{IM}(s) + \left(b_0 + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{b_i}{s + |\beta_i|}\right)U(s) + H(s)W(s)$$

在頻域中定義新的狀態向量

$$\hat{\xi}(s) \triangleq \left[\hat{\xi}_1(s), \hat{\xi}_2(s), \hat{\xi}_3(s), \hat{\xi}_4(s), \dots, \hat{\xi}_{2(\bar{n})+1}(s) \right]$$

$$\text{其中 } \hat{\xi}_1(s) = Y_{IM}(s) - D_1U(s) \quad , \quad \hat{\xi}_{2i}(s) = \frac{1}{s + |\beta_i|}Y_{IM}(s) \quad ,$$

$$\hat{\xi}_{2i+1}(s) = \frac{1}{s + |\beta_i|}U(s) \quad ,$$

$$i=1, 2, \dots, \bar{n} \quad , \quad \text{而 } Y_{IM}(s) = \hat{\xi}_1(s) + D_1U(s)$$

可得頻域的狀態方程式

$$\begin{aligned} s\hat{\xi}_1 &= -\left(a_0 + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{a_i}{s + |\beta_i|}\right)Y_{IM}(s) + \left(b_0 + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{b_i}{s + |\beta_i|}\right)U(s) + H(s)W(s) \\ &= -a_0Y_{IM}(s) + \left\{ \left(\sum_{i=1}^{\bar{n}} (-a_i) \times \frac{1}{s + |\beta_i|}Y_{IM}(s) + \sum_{i=1}^{\bar{n}} b_i \times \frac{1}{s + |\beta_i|}U(s) \right) + b_0U(s) \right\} \\ &\quad + H(s)W(s) \end{aligned}$$

$$= -a_0\left(\hat{\xi}_1(s) + D_1U(s)\right) + \sum_{i=1}^{\bar{n}}\left(-a_i\hat{\xi}_{2i} + b_i\hat{\xi}_{2i+1}\right) + b_0U(s) + H(s)W(s)$$

$$= -a_0\hat{\xi}_1(s) + \sum_{i=1}^{\bar{n}}\left(-a_i\hat{\xi}_{2i} + b_i\hat{\xi}_{2i+1}\right) + (b_0 - a_0D_1)U(s) + H(s)W(s)$$

$$\begin{aligned} s\hat{\xi}_2 &= \frac{s}{s + |\beta_1|}Y_{IM}(s) = \frac{s + |\beta_1| - |\beta_1|}{s + |\beta_1|}Y_{IM}(s) = Y_{IM}(s) - \frac{|\beta_1|}{s + |\beta_1|}Y_{IM}(s) \\ &= \hat{\xi}_1 + D_1U(s) - |\beta_1|\hat{\xi}_2 \end{aligned}$$

$$s\hat{\xi}_3 = \frac{s}{s + |\beta_1|}U(s) = \frac{s + |\beta_1| - |\beta_1|}{s + |\beta_1|}U(s) = U(s) - \frac{|\beta_1|}{s + |\beta_1|}U(s) = U(s) - |\beta_1|\hat{\xi}_3$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ s\hat{\xi}_{2\bar{n}} &= \frac{s}{s+|\beta_{\bar{n}}|} Y_{IM}(s) = Y_{IM}(s) - \frac{|\beta_{\bar{n}}|}{s+|\beta_{\bar{n}}|} Y_{IM}(s) = \hat{\xi}_1 + D_1 U(s) - |\beta_{\bar{n}}| \hat{\xi}_{2\bar{n}} \\ s\hat{\xi}_{2\bar{n}+1} &= \frac{s}{s+|\beta_{\bar{n}}|} U(s) = U(s) - \frac{|\beta_{\bar{n}}|}{s+|\beta_{\bar{n}}|} U(s) = U(s) - |\beta_{\bar{n}}| \hat{\xi}_{2\bar{n}+1} \end{aligned}$$

另外，由圖 3.3 可知 $Y_{IM}(s) = Z_1(s)$ ，則輸出方程式為

$$Z_1(s) = Y_{IM}(s) = \hat{\xi}_1(s) + D_1 U(s) =: C_s \hat{\xi}(s) + D_1 U(s)$$

其中 $C_s \in \mathbb{R}^{1 \times (2\bar{n}+1)}$ ，除了元素 $C_s(1,1) = 1$ ，其他元素皆為 0。

當定義出新的狀態向量後，可將式子整理如下

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= A_s x_s + B_{\bar{w}} \bar{w} + B_s u \\ z_1 &= C_s x_s + D_s u \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中 $x_s(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{\xi}(s)]$ ， $\bar{w}(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)W(s)]$ ， $z_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[Z_1(s)]$ ，

$$A_s = \begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 & b_1 & \cdots & -a_{\bar{n}} & b_{\bar{n}} \\ 1 & -|\beta_1| & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -|\beta_1| & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -|\beta_{\bar{n}}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -|\beta_{\bar{n}}| \end{bmatrix},$$

$$B_{\bar{w}} = [1 \quad 0_{1 \times 2\bar{n}}]^T, \quad B_s = [b_0 - a_0 D_1 \quad D_1 \quad 1 \quad \cdots \quad D_1 \quad 1]^T,$$

$C_s = [1 \quad 0_{1 \times 2\bar{n}}]$ ， $D_s = D_1$ ，其中 $\bar{n} = n_p - 1$ ($n_p = \deg(sI - A)$ ，即主動懸吊系統

小訊號模型之階數)

考慮新狀態變數架構下之靜態狀態回授 $u = K_s^{(1)} x_s$ ，其中 $K_s^{(1)}$ 為欲設

計之靜態增益表示如下：

$$K_s^{(1)} = [K_1 \quad K_2 \quad \cdots \quad K_{2\bar{n}} \quad K_{2\bar{n}+1}] \quad (3.4)$$

由其拉氏轉換及狀態向量之定義可得知：

$$U(s) = K_1 \hat{\xi}_1(s) + K_{2i} \hat{\xi}_{2\bar{n}}(s) + K_{2i+1} \hat{\xi}_{2\bar{n}+1}(s)$$

$$U(s) = K_1 (Y_{IM}(s) - D_1 U(s)) + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{K_{2i}}{s + |\beta_i|} Y_{IM}(s) + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{K_{2i+1}}{s + |\beta_i|} U(s)$$

移項整理可得

$$\left(1 + K_1 D_1 + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{-K_{2i+1}}{s + |\beta_i|} \right) U(s) = \left(K_1 + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{K_{2i}}{s + |\beta_i|} \right) Y_{IM}(s) \circ$$

當上述數據已知，令

$$\left(1 + K_1 D_1 + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{-K_{2i+1}}{s + |\beta_i|} \right) = \frac{\bar{a}_{\bar{n}} s^{\bar{n}} + \cdots + \bar{a}_0}{(s + |\beta_1|)(s + |\beta_2|) \cdots (s + |\beta_{\bar{n}}|)},$$

$$\left(K_1 + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{K_{2i}}{s + |\beta_i|} \right) = \frac{\bar{b}_{\bar{n}} s^{\bar{n}} + \cdots + \bar{b}_0}{(s + |\beta_1|)(s + |\beta_2|) \cdots (s + |\beta_{\bar{n}}|)},$$

則可得

$$K_0^{(1)}(s) = \frac{U(s)}{Y_{IM}(s)} = \frac{\bar{b}_{\bar{n}} s^{\bar{n}} + \cdots + \bar{b}_0}{\bar{a}_{\bar{n}} s^{\bar{n}} + \cdots + \bar{a}_0} \quad (3.5)$$

其中 $\bar{n} = n_p - 1$ ，較主動懸吊系統小訊號模型少一階。

由以上推導可知在新定義的狀態變數架構下，靜態狀態回授等價於一動態控制器，反之亦然；因此，原先動態控制器 $K_0^{(1)}$ 的設計問題可轉換為圖 3.4 之靜態狀態回授增益 $K_s^{(1)}$ 設計問題。由於 H 為穩定的全通函數，可得

(i) $\|T_{z_1 w}\|_{\infty} = \|T_{z_1 \bar{w}}\|_{\infty}$ 。

(ii) 系統 $T_{z_1 \bar{w}}$ 的閉迴路極點亦為系統 $T_{z_1 w}$ 的閉迴路極點。

所以問題可進一步簡化為對系統 $T_{z_1 \bar{w}}$ 的 H_{∞} 性能、狀態回授控制力及閉迴路極點做設計。而且依 $P-K$ 架構而論，控制器 $K_0^{(1)}$ 之階數較廣義受控體少一階。

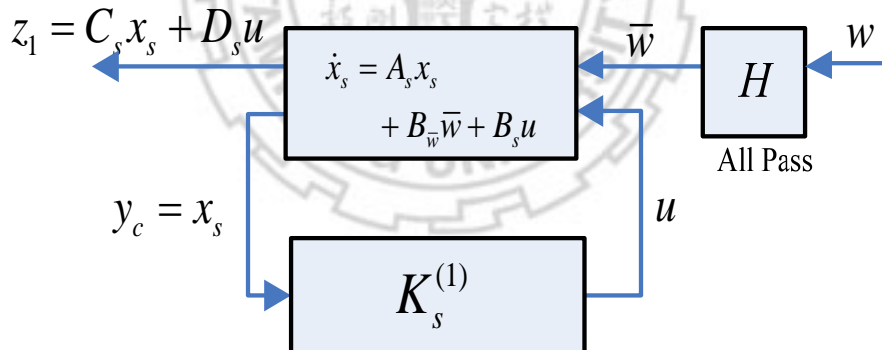


圖 3.4 靜態狀態回授架構

3.2.3 合成式條件

經由 3.2.2 節的問題轉換，動態控制器之設計，相當於靜態回授增益 $K_s^{(1)}$ 之設計。根據(3.3)及(3.4)式，可得閉迴路系統如下：

$$\begin{aligned}\dot{x}_s(t) &= A_{cl}x_s(t) + B_{cl}\bar{w}(t) \\ z_1(t) &= C_{cl}x_s(t) + D_{cl}\bar{w}(t)\end{aligned}\quad (3.6)$$

其中，

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_s + B_s K_s^{(1)} & B_{\bar{w}} \\ \hline C_s + D_s K_s^{(1)} & 0 \end{array} \right] \quad (3.7)$$

3.2.3.1 指定頻段 H_∞ 性能條件

由於車輛主動式懸吊系統設計目標之一即是針對頻段 4-8Hz 進行控制，只要能有效抑制此頻段的震動，對於乘坐的舒適度可說是大大地增加。故在指定頻段 H_∞ 性能方面，應用引理 1 之中頻段 $[\omega_1, \omega_2]$ 分析式(2.16)，經由全等轉換、變數變化等技巧，可推導出合成式條件。

式(2.16)如下：

$$Q > 0$$

$$\begin{bmatrix} -Q & -P - j\omega_c Q - W^T & 0 & 0 \\ * & -\omega_1 \omega_2 Q - \text{He}\{W\bar{A}\} & W\bar{B} & \bar{C}^T \\ * & * & -\gamma I & -\bar{D}^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

為了推導合成式，首先，先將分析式中 \bar{A} 、 \bar{B} 、 \bar{C} 、 \bar{D} 代換為 A_{cl} 、 B_{cl} 、 C_{cl} 、 D_{cl} ，可得

$$\begin{bmatrix} -Q & -P - j\omega_c Q - W^T & 0 & 0 \\ * & -\omega_1 \omega_2 Q - \text{He}\{WA_{cl}\} & WB_{cl} & C_{cl}^T \\ * & * & -\gamma I & -D_{cl}^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

根據(3.7)可知 $A_{cl} = A_s + B_s K_s^{(1)}$ ，如果直接代入上式，將會造成 WA_{cl} 含有兩個變數，此並非線性矩陣不等式。故利用全等轉換技巧，將分析式中的 WA_{cl} 轉換為 $A_{cl}W$ 之格式，推導過程如下：

$$\begin{bmatrix} W^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Q & -P - j\omega_c Q & 0 & 0 \\ * & -\omega_1 \omega_2 Q - \\ * & WA_{cl} - A_{cl}^T W^T & WB_{cl} & C_{cl}^T \\ * & * & -\gamma I & -D_{cl}^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^{-T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} -W^{-1}QW^{-T} & -W^{-1}PW^{-T} & 0 & 0 \\ * & -j\omega_c W^{-1}QW^{-T} - W^{-1}W^T W^{-T} & 0 & 0 \\ * & -\omega_1 \omega_2 W^{-1}QW^{-T} & W^{-1}WB_{cl} & W^{-1}C_{cl}^T \\ * & -W^{-1}WA_{cl}W^{-T} - W^{-1}A_{cl}^T W^T W^{-T} & -\gamma I & -D_{cl}^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} -W^{-1}QW^{-T} & -W^{-1}PW^{-T} - j\omega_c W^{-1}QW^{-T} - W^{-1} & 0 & 0 \\ * & -\omega_1 \omega_2 W^{-1}QW^{-T} - A_{cl}W^{-T} - W^{-1}A_{cl}^T & B_{cl} & W^{-1}C_{cl}^T \\ * & * & -\gamma I & -D_{cl}^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} -W^{-1}QW^{-T} & -W^{-1}PW^{-T} - j\omega_c W^{-1}QW^{-T} - W^{-1} & 0 & 0 \\ * & -\omega_1\omega_2 W^{-1}QW^{-T} - \text{He}\{A_{cl}W^{-T}\} & B_{cl} & W^{-1}C_{cl}^T \\ * & * & -\gamma I & -D_{cl}^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

令 $\bar{P} = W^{-1}PW^{-T}$ 、 $\bar{Q} = W^{-1}QW^{-T}$ ，且 $G = W^{-T}$ (即 $G^T = W^{-1}$)。如此，上式

可改寫如下：

$$\begin{bmatrix} -\bar{Q} & -\bar{P} - j\omega_c \bar{Q} - G^T & 0 & 0 \\ * & -\omega_1\omega_2 \bar{Q} - \text{He}\{A_{cl}G\} & B_{cl} & G^T C_{cl}^T \\ * & * & -\gamma I & -D_{cl}^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

接著，將(3.7)帶入上式

$$\begin{bmatrix} -\bar{Q} & -\bar{P} - j\omega_c \bar{Q} - G^T & 0 & 0 \\ * & -\omega_1\omega_2 \bar{Q} - \text{He}\{(A_s + B_s K_s^{(1)})G\} & B_{\bar{w}} & G^T (C_s + D_s K_s^{(1)})^T \\ * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

利用變數變換技巧，設定新變數， $Y = K_s^{(1)}G$ ，可得合成式如下：

$$\begin{bmatrix} -\bar{Q} & -\bar{P} - j\omega_c \bar{Q} - G^T & 0 & 0 \\ * & -\omega_1\omega_2 \bar{Q} - \text{He}\{A_s G + B_s Y\} & B_{\bar{w}} & G^T C_s^T + Y^T D_s^T \\ * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.8)$$

由於(3.8)中具有複數 $j\omega_c \bar{Q}$ ，故根據[18]，可將此矩陣不等式轉換為較大

尺寸的實係數線性矩陣不等式，亦即 $X_1 + jX_2 < 0$ 等價於 $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ -X_2 & X_1 \end{bmatrix} < 0$ 。

故(3.8)可轉換成下式

$$\left[\begin{array}{c|c} S_1 & S_2 \\ \hline -S_2 & S_1 \end{array} \right] < 0 \quad (3.9)$$

其中，

$$S_1 = \begin{bmatrix} -\bar{Q} & -\bar{P} - G^T & 0 & 0 \\ * & -\omega_1 \omega_2 \bar{Q} - \text{He}\{A_s G + B_s Y\} & B_w & G^T C_s^T + Y^T D_s^T \\ * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_c \bar{Q} & 0 & 0 \\ \omega_c \bar{Q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最後，指定頻段 H_∞ 性能條件之合成式如下：

$$\bar{Q} > 0, \quad \left[\begin{array}{c|c} S_1 & S_2 \\ \hline -S_2 & S_1 \end{array} \right] < 0 \quad (3.10)$$

3.2.3.2 區域極點配置條件

為了增強閉迴路系統相對穩定性，而且縮短安定時間，研擬使閉迴路極點落在複數平面垂直線 $s = -\alpha$ 以左區域 ($\alpha > 0$)。可應用引理 2 式 (2.18)，經由全等轉換、變數變換等技巧，推導出合成式條件。

式(2.18)如下：

$$P_1 > 0$$

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{W^T\} & W\bar{A} + P_1 & W & W\bar{B} \\ * & -P_1 & 0 & 0 \\ * & * & -P_1 & 0 \\ * & * & * & -\eta I \end{bmatrix} < 0$$

為了推導合成式，首先，先將分析式中 \bar{A} 、 \bar{B} 、 \bar{C} 、 \bar{D} 代換為 A_{cl} 、 B_{cl} 、

C_{cl} 、 D_{cl}

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{W^T\} & WA_{cl} + P_1 & W & WB_{cl} \\ * & -P_1 & 0 & 0 \\ * & * & -P_1 & 0 \\ * & * & * & -\eta I \end{bmatrix} < 0$$

同樣地，先利用全等轉換技巧，將分析式中的 WA_{cl} 轉換為 $A_{cl}W$ 之格式，

推導過程如下：

$$[\Xi] \begin{bmatrix} -\text{He}\{W^T\} & WA_{cl} + P_1 & W & WB_{cl} \\ * & -P_1 & 0 & 0 \\ * & * & -P_1 & 0 \\ * & * & * & -\eta I \end{bmatrix} [\Xi^T] < 0$$

其中，

$$\Xi = \begin{bmatrix} W^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{W^{-1}W^TW^{-T}\} & W^{-1}WA_{cl}W^{-T} + W^{-1}P_1W^{-T} & W^{-1}WW^{-T} & W^{-1}WB_{cl} \\ * & -W^{-1}P_1W^{-T} & 0 & 0 \\ * & * & -W^{-1}P_1W^{-T} & 0 \\ * & * & * & -\eta I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{W^{-1}\} & A_{cl}W^{-T} + W^{-1}P_1W^{-T} & W^{-T} & B_{cl} \\ * & -W^{-1}P_1W^{-T} & 0 & 0 \\ * & * & -W^{-1}P_1W^{-T} & 0 \\ * & * & * & -\eta I \end{bmatrix} < 0$$

令 $G = W^{-T}$ ，故上式可改寫如下：

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{G^T\} & A_{cl}G + G^T P_1 G & G & B_{cl} \\ * & -G^T P_1 G & 0 & 0 \\ * & * & -G^T P_1 G & 0 \\ * & * & * & -\eta I \end{bmatrix} < 0$$

接著，將(3.7)帶入上式

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{G^T\} & (A_s + B_s K_s^{(1)})G + G^T P_1 G & G & B_{\bar{w}} \\ * & -G^T P_1 G & 0 & 0 \\ * & * & -G^T P_1 G & 0 \\ * & * & * & -\eta I \end{bmatrix} < 0$$

為了要結合區域極點配置，因此更改設計條件，將上式 A_s 更改為 $A_s + \alpha I$ ，

可得

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{G^T\} & (A_s + \alpha I)G + B_s K_s^{(1)}G + G^T P_1 G & G & B_{\bar{w}} \\ * & -G^T P_1 G & 0 & 0 \\ * & * & -G^T P_1 G & 0 \\ * & * & * & -\eta I \end{bmatrix} < 0$$

如前所設定新變數， $Y = K_s^{(1)}G$ ， $\bar{P}_1 = G^T P_1 G$ 。將新變數代入上式，得到

合成式如下：

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{G\} & (A_s + \alpha I)G + B_s Y + \bar{P}_1 & G & B_w \\ * & -\bar{P}_1 & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{P}_1 & 0 \\ * & * & * & -\eta I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.11)$$

最後，區域極點配置要求之合成條件如下：

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{G\} & (A_s + \alpha I)G + B_s Y + \bar{P}_1 & G & B_w \\ * & -\bar{P}_1 & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{P}_1 & 0 \\ * & * & * & -\eta I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.12)$$

3.2.3.3 控制力受限及安全性條件

為了達到設計目標(2.11)及(2.12)，應用引理 2 之(2.19)及(2.20)式，經由全等轉換、變數變換等技巧，可推導出合成式條件。

分析式如下：

$$\begin{bmatrix} -I & \sqrt{\rho} K \\ * & -u_{\max}^2 P_1 \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} -I & \sqrt{\rho} \{C_2\}_i \\ * & -P_1 \end{bmatrix} < 0, i = 1, 2$$

經由 3.2.2 節的問題轉換，相當於考慮設計靜態回授增益 $K_s^{(1)}$ ，故分析式

中的 K 更改為 $K_s^{(1)}$ 。接著，執行全等轉換：

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & W^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & \sqrt{\rho} K_s^{(1)} \\ * & -u_{\max}^2 P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & W^{-T} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & W^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & \sqrt{\rho} \{C_2\}_i \\ * & -P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & W^{-T} \end{bmatrix} < 0, i=1,2$$

可得

$$\begin{bmatrix} -I & \sqrt{\rho} K_s^{(1)} W^{-T} \\ * & -u_{\max}^2 W^{-1} P_1 W^{-T} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} -I & \sqrt{\rho} \{C_2\}_i W^{-T} \\ * & -W^{-1} P_1 W^{-T} \end{bmatrix} < 0, i=1,2$$

如前之設定 $G=W^{-T}$ ， $Y=K_s^{(1)}G$ ， $\bar{P}_1=G^T P_1 G$ ，可得控制力受限與安全性限制之合成式如下：

$$\begin{bmatrix} -I & \sqrt{\rho} Y \\ * & -u_{\max}^2 \bar{P}_1 \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} -I & \sqrt{\rho} \{C_2\}_i G \\ * & -\bar{P}_1 \end{bmatrix} < 0, i=1,2$$
(3.13)

3.2.4 動態控制器之還原公式

當上述線性矩陣不等式(3.10)、(3.12)、(3.13)有解時，則可利用下列

公式還原靜態增益 $K_s^{(1)}$ ：

$$K_s^{(1)} = YG^{-1} \quad (3.14)$$

然後，可根據 3.2.2 節之公式(3.5)還原動態控制器 $K_0^{(1)}$ 。

3.3 方法二：一般積分器之內模型

本小節提供一種含內模型的設計方法，其中內模型為 $K_{IM}^{(2)} = \frac{s + K_I}{s}$ ，

並且設定 $K_I > 0$ 。引入此內模型即是在控制迴路中加入積分器，目的要消除步階式外擾所造成的影響。

3.3.1 系統架構

方法二考慮的動態輸出回授系統整體架構如圖 3.5 所示，而 $K_0^{(2)}$ 為待設計之動態控制器。

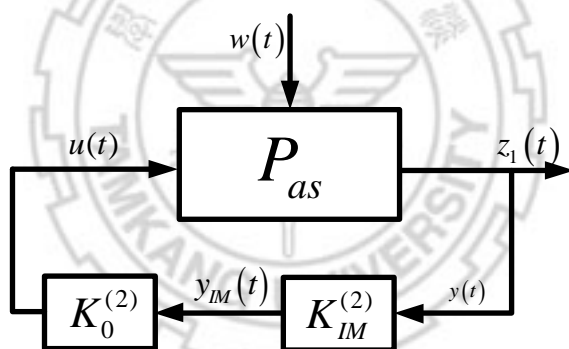


圖 3.5 動態輸出回授系統整體架構

P_{as} 為主動懸吊系統之小訊號模型，表示如下：

$$P_{as} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_1w(t) \\ z_1(t) = C_1x(t) + D_1u(t) \end{cases}$$

其中， $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$ 為狀態變數， $u(t)$ 是懸吊系統的控制輸入， $w(t)$ 代表振動干擾。 P_{as} 之係數矩陣可由 2.1 節的(2.4)與(2.7)得知。

內模型 $K_{IM}^{(2)}$ 的轉移函數設定為 $K_{IM}^{(2)} = \frac{s + K_I}{s}$ ，其狀態空間表示如下

$$K_{IM}^{(2)} \begin{cases} \dot{x}_m = z_1 \\ y_{IM} = K_I x_m + z_1 \end{cases}$$

其中 x_m 為內模型的狀態變數， y_{IM} 為內模型的輸出， K_I 為大於 0 之參數。

下圖所示為含內模型 $K_{IM}^{(2)}$ 之受控體模型

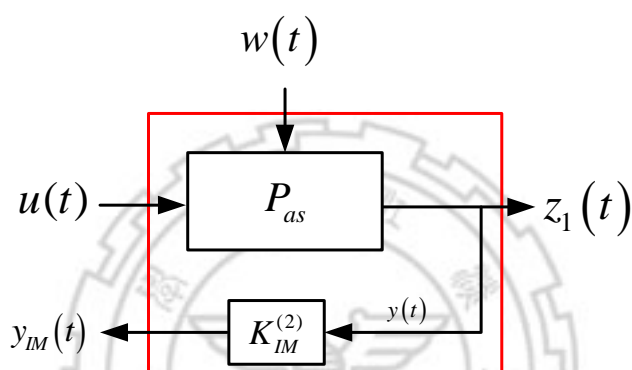


圖 3.6 含內模型之受控體模型

欲將圖 3.5 系統轉換為如圖 3.7 之 P - K 架構

$$\text{令 } x_c = [x \quad x_m]^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_m]^T, \quad w_c(t) = w(t), \quad u_c(t) = u(t),$$

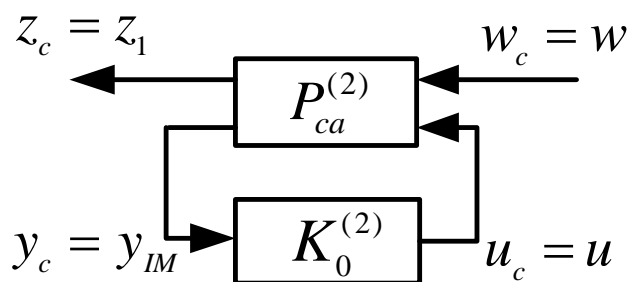
$$y_c(t) = y_{IM}(t)$$

則

$$\dot{x}_c = [\dot{x} \quad \dot{x}_m]^T = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \dot{x}_3 \quad \dot{x}_4 \quad \dot{x}_m]^T$$

$$z_c(t) = z_1(t) = C_1 x(t) + D_1 u(t) = [C_1 \quad 0] x_c + [D_1] u$$

$$y_c(t) = y_{IM}(t) = K_I x_k + z_1 = K_I x_k + [C_1 \quad 0] x_c + [D_1] u$$


 圖 3.7 動態輸出回授系統之 P - K 架構

因此 $P^{(2)}$ 有如下狀態方程式表示式：

$$P^{(2)} \begin{cases} \dot{x}_c(t) = A^{(2)}x_c(t) + B_1^{(2)}w_c(t) + B_2^{(2)}u_c(t) \\ z_c(t) = C_1^{(2)}x_c(t) + D_{11}^{(2)}w_c(t) + D_{12}^{(2)}u_c(t) \\ y_c(t) = C_2^{(2)}x_c(t) + D_{21}^{(2)}w_c(t) + D_{22}^{(2)}u_c(t) \end{cases}$$

其中

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}, B_1^{(2)} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2^{(2)} = \begin{bmatrix} B \\ D_1 \end{bmatrix}, C_1^{(2)} = [C_1 \quad 0], C_2^{(2)} = [C_1 \quad K_I],$$

$$D_{11}^{(2)} = 0, D_{12}^{(2)} = D_1, D_{21}^{(2)} = 0, D_{22}^{(2)} = D_1$$

更進一步細節如下：

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_s} & 0 & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} & 0 \\ \frac{k_s}{m_u} & -\frac{k_t}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{c_s + c_t}{m_u} & 0 \\ -\frac{k_s}{m_s} & 0 & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} & 0 \end{bmatrix}, B_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{c_t}{m_u} \\ 0 \end{bmatrix}, B_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ -\frac{1}{m_u} \\ D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_1^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & 0 & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & 0 & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} & K_I \end{bmatrix},$$

$$D_{11}^{(2)} = 0, \quad D_{12}^{(2)} = D_1, \quad D_{21}^{(2)} = 0, \quad D_{22}^{(2)} = D_1。$$

因此廣義受控體狀態空間矩陣如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_m	w	u
\dot{x}_1	0	0	1	-1	0	0	0
\dot{x}_2	0	0	0	1	0	-1	0
\dot{x}_3	$-\frac{k_s}{m_s}$	0	$-\frac{c_s}{m_s}$	$\frac{c_s}{m_s}$	0	0	$\frac{1}{m_s}$
\dot{x}_4	$\frac{k_s}{m_u}$	$-\frac{k_t}{m_u}$	$\frac{c_s}{m_u}$	$-\frac{c_s + c_t}{m_u}$	0	$\frac{c_t}{m_u}$	$-\frac{1}{m_u}$
\dot{x}_m	$-\frac{k_s}{m_s}$	0	$-\frac{c_s}{m_s}$	$\frac{c_s}{m_s}$	0	0	D_1
z_1	$-\frac{k_s}{m_s}$	0	$-\frac{c_s}{m_s}$	$\frac{c_s}{m_s}$	0	0	D_1
y_{IM}	$-\frac{k_s}{m_s}$	0	$-\frac{c_s}{m_s}$	$\frac{c_s}{m_s}$	K_I	0	D_1

3.3.2 動態控制器設計問題之轉換

本小節將介紹動態輸出回授控制器設計問題如何轉換為靜態狀態回授增益設計問題。圖 3.8 為動態回授閉迴路系統架構圖，其中主動懸吊小訊號模型如(3.1)所述， $K_0^{(2)}$ 為待設計之動態控制器。

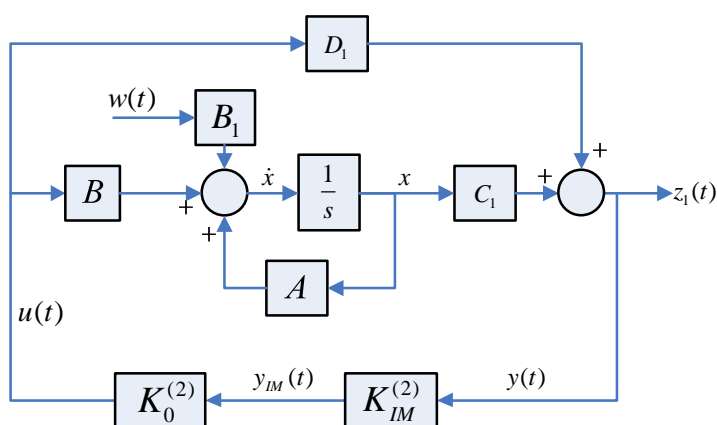


圖 3.8 動態輸出回授系統架構

根據圖 3.8 可得

$$\begin{aligned}
 Y_{IM}(s) &= K_{IM}^{(2)}(s) \times Z_1(s) \\
 &= K_{IM}^{(2)}(s) \left[\left(C_1(sI - A)^{-1} B + D_1 \right) U(s) + C_1(sI - A)^{-1} B_1 W(s) \right] \\
 &= K_{IM}^{(2)}(s) \left[C_1(sI - A)^{-1} B + D_1 \right] U(s) + K_{IM}^{(2)}(s) C_1(sI - A)^{-1} B_1 W(s)
 \end{aligned}$$

其中 $Y_{IM}(s)$ 、 $Z_1(s)$ 、 $U(s)$ 及 $W(s)$ 分別代表時域訊號 $y_{IM}(t)$ 、 $z_1(t)$ 、 $u(t)$ 以及 $w(t)$ 之拉氏轉換。令

$$K_{IM}^{(2)}(s) \left[C_1(sI - A)^{-1} B + D_1 \right] = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}, \quad K_{IM}^{(2)}(s) C_1(sI - A)^{-1} B_1 = \frac{N_w(s)}{D_p(s)}$$

其中 $N_p(s)$ 、 $N_w(s)$ 以及 $D_p(s)$ 為多項式且 $D_p(s) = s \times \det(sI - A)$ ，則

$$Y_{IM}(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} U(s) + \frac{N_w(s)}{D_p(s)} W(s)$$

底下定義新狀態變數以及推導狀態方程式的過程與 3.2.2 小節類似，

只需將 \bar{n} 中的 $n_p - 1$ 更改為 n_p ，故在此不再詳細說明。

至於輸出方程式，由圖 3.8 可知

$$Y_{IM}(s) = K_{IM}^{(2)} Z_1(s) = \frac{s + K_I}{s} Z_1(s)$$

因為 $N_w(s)$ 必含因式 $(s + K_I)$ ，若內定 $K_I = |\beta_1|$ ，則輸出方程式為

$$\begin{aligned} Z_1(s) &= \frac{s}{s + K_I} Y_{IM}(s) = \frac{s}{s + |\beta_1|} Y_{IM}(s) \\ &= \frac{s + |\beta_1| - |\beta_1|}{s + |\beta_1|} Y_{IM}(s) = Y_{IM}(s) - \frac{|\beta_1|}{s + |\beta_1|} Y_{IM}(s) \\ &= \hat{\xi}_1(s) + D_1 U(s) - |\beta_1| \hat{\xi}_2(s) =: C_s \hat{\xi}(s) + D_1 U(s) \end{aligned}$$

其中 $C_s \in \mathbb{R}^{1 \times (2\bar{n}+1)}$ ，除了元素 $C_s(1,1) = 1$ 及 $C_s(1,2) = -|\beta_1|$ ，其他元素皆為 0。

因此，在新的狀態向量定義下，可將式子整理如下：

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= A_s x_s + B_{\bar{w}} \bar{w} + B_s u \\ z_1 &= C_s x_s + D_s u \end{aligned} \quad (3.15)$$

其中 $x_s(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{\xi}(s)]$ ， $\bar{w}(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)W(s)]$ ， $z_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[Z_1(s)]$ ，

$$A_s = \begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 & b_1 & \cdots & -a_{\bar{n}} & b_{\bar{n}} \\ 1 & -|\beta_1| & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -|\beta_1| & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -|\beta_{\bar{n}}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -|\beta_{\bar{n}}| \end{bmatrix},$$

$$B_{\bar{w}} = [1 \quad 0_{1 \times 2\bar{n}}]^T, \quad B_s = [b_0 - a_0 D_1 \quad D_1 \quad 1 \quad \cdots \quad D_1 \quad 1]^T,$$

$$C_s = [1 \quad -|\beta_1| \quad 0_{1 \times (2\bar{n}-1)}], \quad D_s = D_1, \quad \text{其中 } \bar{n} = n_p \text{ (} n_p = \deg(sI - A) \text{, 即主動懸}$$

吊系統小訊號模型之階數)

如同方法一，考慮新狀態變數架構下之靜態狀態回授 $u = K_s^{(2)} x_s$ ，其中 $K_s^{(2)}$ 為欲設計之靜態增益表示如下：

$$K_s^{(2)} = [K_1 \quad K_2 \quad \cdots \quad K_{2\bar{n}} \quad K_{2\bar{n}+1}] \quad (3.16)$$

當上述數據已知，令

$$\left(1 + K_1 D_1 + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{-K_{2i+1}}{s + |\beta_i|} \right) = \frac{\bar{a}_{\bar{n}} s^{\bar{n}} + \cdots + \bar{a}_0}{(s + |\beta_1|)(s + |\beta_2|) \cdots (s + |\beta_{\bar{n}}|)},$$

$$\left(K_1 + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{K_{2i}}{s + |\beta_i|} \right) = \frac{\bar{b}_{\bar{n}} s^{\bar{n}} + \cdots + \bar{b}_0}{(s + |\beta_1|)(s + |\beta_2|) \cdots (s + |\beta_{\bar{n}}|)},$$

則可得動態控制器如下

$$K_0^{(2)}(s) = \frac{U(s)}{Y_{IM}(s)} = \frac{\bar{b}_{\bar{n}} s^{\bar{n}} + \cdots + \bar{b}_0}{\bar{a}_{\bar{n}} s^{\bar{n}} + \cdots + \bar{a}_0} \quad (3.17)$$

其中 $\bar{n} = n_p$ 。

由以上推導可知在新定義的狀態變數架構下，靜態狀態回授等價於一動態控制器，反之亦然；因此，原先動態控制器 $K_0^{(2)}$ 的設計問題可轉換為圖 3.9 之靜態狀態回授增益 $K_s^{(2)}$ 設計問題。由於 H 為穩定的全通函數，可得

(i) $\|T_{z_1 w}\|_{\infty} = \|T_{z_1 \bar{w}}\|_{\infty}$ 。

(ii) 系統 $T_{z_1 \bar{w}}$ 的閉迴路極點亦為系統 $T_{z_1 w}$ 的閉迴路極點。

所以問題可進一步簡化為對系統 $T_{z_1 \bar{w}}$ 的 H_{∞} 性能、狀態回授控制力及

閉迴路極點做設計。而依 $P-K$ 架構而論，控制器 $K_0^{(2)}$ 之階數較廣義受控體少一階。

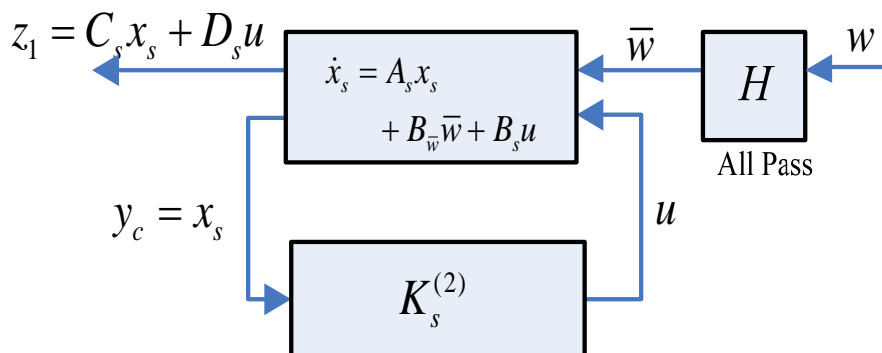


圖 3.9 靜態狀態回授架構

3.3.3 合成式條件

控制器之設計條件比照 3.2.3 節，只需將 $K_s^{(1)}$ 更改為 $K_s^{(2)}$ 。

3.3.4 動態控制器之還原公式

當 3.2.3 節之線性矩陣不等式(3.10)、(3.12)、(3.13)有解時，則可利用(3.14)還原靜態增益 $K_s^{(2)}$ 。然後，可根據 3.3.2 節之公式(3.17)推導還原動態控制器 $K_0^{(2)}$ 。

3.4 方法三：針對窄頻段之內模型

本小節提供另一種含內模型的設計方法，其中內模型為

$$K_{IM}^{(3)} = \frac{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)}{s^2 + \omega_c^2}$$

，並且設定 $\lambda_1 > 0$ 、 $\lambda_2 > 0$ 、 $\omega_c = 6\text{Hz}$ 。引入此內模型可

將閉迴路系統在 6Hz 之振幅響應強制降為 0。

3.4.1 系統架構

方法三考慮的動態輸出回授系統整體架構如圖 3.10 所示，而 $K_0^{(3)}$ 為待設計之動態控制器。

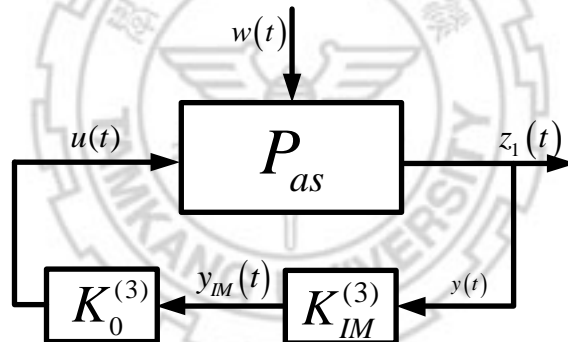


圖 3.10 動態輸出回授系統整體架構

P_{as} 為主動懸吊系統之小訊號模型，表示如下：

$$P_{as} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_1w(t) \\ z_1(t) = C_1x(t) + D_1u(t) \end{cases}$$

其中， $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$ 為狀態變數， $u(t)$ 是懸吊系統的控制輸入， $w(t)$ 代表振動干擾。 P_{as} 之係數矩陣可由 2.1 節的(2.4)與(2.7)得知。

內模型 $K_{IM}^{(3)}$ 的轉移函數設定為 $K_{IM}^{(3)} = \frac{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)}{s^2 + \omega_c^2}$ ，其狀態空間表示如下

下

$$K_{IM}^{(3)} \begin{cases} \dot{x}_M = A_M x_M + B_M z_1 \\ y_{IM} = C_M x_M + D_M z_1 \end{cases}$$

其中 x_M 為內模型的狀態變數， $x_M = [x_{M1} \quad x_{M2}]^T$ ， y_{IM} 為內模型的輸出。

下圖所示為含內模型 $K_{IM}^{(3)}$ 之受控體模型：

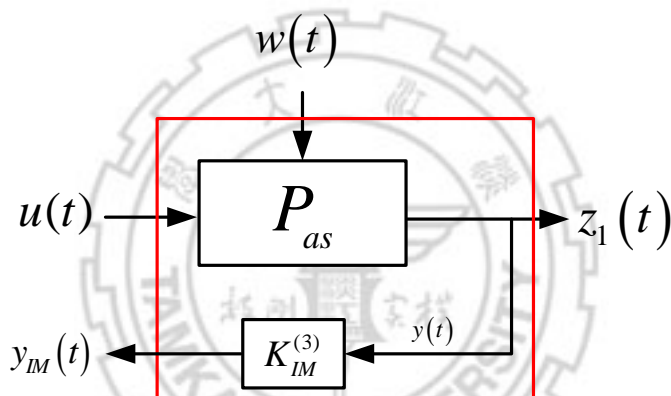


圖 3.11 含內模型之受控體模型

欲將圖 3.10 系統轉換為如圖 3.12 之 P - K 架構

令 $x_c = [x \quad x_M]^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_{M1} \quad x_{M2}]^T$ ， $w_c(t) = w(t)$ ， $u_c(t) = u(t)$ ，

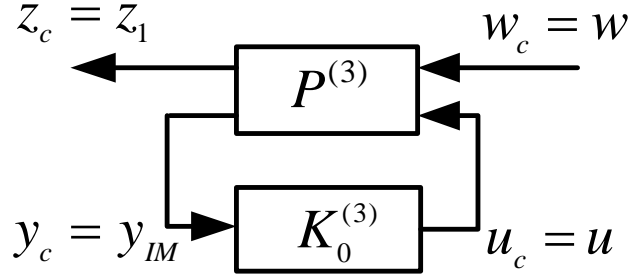
$y_c(t) = y_{IM}(t)$ ，

則

$$\dot{x}_c = [\dot{x} \quad \dot{x}_M]^T = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \dot{x}_3 \quad \dot{x}_4 \quad \dot{x}_{M1} \quad \dot{x}_{M2}]^T$$

$$z_c(t) = z_1(t) = C_1 x(t) + D_1 u(t) = [C_1 \quad 0 \quad 0] x_c + [D_1] u$$

$$\begin{aligned} y_c(t) = y_{IM}(t) &= C_M x_k + D_M z_1 = C_M x_k + D_M ([C_1 \ 0 \ 0] x_c + [D_1] u) \\ &= [D_M C_1 \ C_M] x_c + D_M [D_1] u \end{aligned}$$


 圖 3.12 動態輸出回授系統之 P - K 架構

因此 $P^{(3)}$ 有如下狀態空間表示式：

$$P^{(3)} \begin{cases} \dot{x}_c(t) = A^{(3)} x_c(t) + B_1^{(3)} w_c(t) + B_2^{(3)} u_c(t) \\ z_c(t) = C_1^{(3)} x_c(t) + D_{11}^{(3)} w_c(t) + D_{12}^{(3)} u_c(t) \\ y_c(t) = C_2^{(3)} x_c(t) + D_{21}^{(3)} w_c(t) + D_{22}^{(3)} u_c(t) \end{cases}$$

其中

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_M C_1 & A_M \end{bmatrix}, \quad B_1^{(3)} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2^{(3)} = \begin{bmatrix} B \\ B_M D_1 \end{bmatrix}, \quad C_1^{(3)} = [C_1 \ 0],$$

$$C_2^{(3)} = [D_M C_1 \ C_M], \quad D_{11}^{(3)} = 0, \quad D_{12}^{(3)} = D_1, \quad D_{21}^{(3)} = 0, \quad D_{22}^{(3)} = D_M D_1,$$

更進一步細節如下：

$$A^{(3)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ -\frac{k_s}{m_s} & 0 & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} & 0_{4 \times 2} \\ \frac{k_s}{m_u} & -\frac{k_t}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{c_s + c_t}{m_u} & \\ \hline & & [B_M C_1]_{2 \times 4} & & [A_M]_{2 \times 2} \end{array} \right], \quad B_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{c_t}{m_u} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{c_t}{m_u} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1^{(3)} = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & 0 & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2^{(3)} = [D_M C_1 \quad C_M], D_{11}^{(3)} = 0, D_{12}^{(3)} = D_1,$$

$$D_{21}^{(3)} = 0, D_{22}^{(3)} = D_M D_1。$$

因此廣義受控體狀態空間矩陣如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_{M1}	x_{M2}	w	u
\dot{x}_1	0	0	1	-1	0	0	0	0
\dot{x}_2	0	0	0	1	0	0	-1	0
\dot{x}_3	$-\frac{k_s}{m_s}$	0	$-\frac{c_s}{m_s}$	$\frac{c_s}{m_s}$	0	0	0	$\frac{1}{m_s}$
\dot{x}_4	$\frac{k_s}{m_u}$	$-\frac{k_t}{m_u}$	$\frac{c_s}{m_u}$	$-\frac{c_s + c_t}{m_u}$	0	0	$\frac{c_t}{m_u}$	$-\frac{1}{m_u}$
\dot{x}_{M1}	$B_M C_1$				A_M		0	0
\dot{x}_{M2}							0	$B_M D_1$
z_1	$-\frac{k_s}{m_s}$	0	$-\frac{c_s}{m_s}$	$\frac{c_s}{m_s}$	0	0	0	D_1
y_{IM}	$D_M C_1$				C_M		0	$D_M D_1$

3.4.2 動態控制器設計問題之轉換

本小節將介紹動態輸出回授控制器設計問題如何轉換為靜態狀態回授增益設計問題。圖 3.13 為動態回授閉迴路系統架構圖，其中主動懸吊小訊號模型如(3.1)所述， $K_0^{(3)}$ 為待設計之動態控制器。

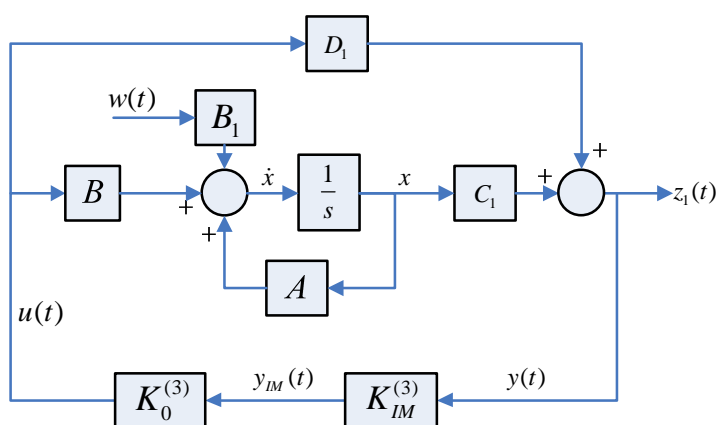


圖 3.13 動態輸出回授系統架構

根據圖 3.13 可得

$$\begin{aligned}
 Y_{IM}(s) &= K_{IM}^{(3)}(s) \times Z_1(s) \\
 &= K_{IM}^{(3)}(s) \left[\left(C_1(sI - A)^{-1} B + D_1 \right) U(s) + C_1(sI - A)^{-1} B_1 W(s) \right] \\
 &= K_{IM}^{(3)}(s) \left[C_1(sI - A)^{-1} B + D_1 \right] U(s) + K_{IM}^{(3)}(s) C_1(sI - A)^{-1} B_1 W(s)
 \end{aligned}$$

其中 $Y_{IM}(s)$ 、 $Z_1(s)$ 、 $U(s)$ 及 $W(s)$ 分別代表時域訊號 $y_{IM}(t)$ 、 $z_1(t)$ 、 $u(t)$ 以及 $w(t)$ 之拉氏轉換。令

$$K_{IM}^{(3)}(s) \left[C_1(sI - A)^{-1} B + D_1 \right] = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}, \quad K_{IM}^{(3)}(s) C_1(sI - A)^{-1} B_1 = \frac{N_w(s)}{D_p(s)}$$

其中 $N_p(s)$ 、 $N_w(s)$ 以及 $D_p(s)$ 為多項式且 $D_p(s) = (s^2 + \omega_c^2) \times \det(sI - A)$ ，

則

$$Y_{IM}(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} U(s) + \frac{N_w(s)}{D_p(s)} W(s)$$

底下定義新狀態變數以及推導狀態方程式的過程與3.2.2小節類似，只需將 \bar{n} 中的 $n_p - 1$ 更改為 $n_p + 1$ ，故在此不再詳細說明。

至於輸出方程式，由圖 3.13 可知

$$Y_{IM}(s) = K_{IM}^{(3)} Z_1(s) = \frac{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)}{s^2 + \omega_c^2} Z_1(s)$$

因為 $N_w(s)$ 必含因式 $(s + \lambda_1)$ 、 $(s + \lambda_2)$ ，設定兩根為 $\beta_1 = -\lambda_1$ ，而 $\beta_2 = -\lambda_2$ ，則輸出方程式為

$$\begin{aligned} Z_1(s) &= \frac{s^2 + \omega_c^2}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} Y_{IM}(s) = \frac{s^2 + \omega_c^2}{(s + |\beta_1|)(s + |\beta_2|)} Y_{IM}(s) \\ &= \left(1 + \frac{f_1}{(s + |\beta_1|)} + \frac{f_2}{(s + |\beta_2|)} \right) Y_{IM}(s) \\ &= Y_{IM}(s) + f_1 \times \frac{1}{(s + |\beta_1|)} \times Y_{IM}(s) + f_2 \times \frac{1}{(s + |\beta_2|)} \times Y_{IM}(s) \\ &= \hat{\xi}_1(s) + D_1 U(s) + f_1 \times \hat{\xi}_2(s) + f_2 \times \hat{\xi}_4(s) =: C_s \hat{\xi}(s) + D_1 U(s) \end{aligned}$$

其中 $C_s \in \mathbb{R}^{1 \times (2\bar{n}+1)}$ ，除了元素 $C_s(1,1) = 1$ 及 $C_s(1,2) = f_1$ 、 $C_s(1,4) = f_2$ ，其他元素皆為 0。

因此，在新的狀態向量定義下，可將式子整理如下

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= A_s x_s + B_w \bar{w} + B_s u \\ z_1 &= C_s x_s + D_s u \end{aligned} \quad (3.18)$$

其中 $x_s(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{\xi}(s)]$ ， $\bar{w}(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)W(s)]$ ， $z_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[Z_1(s)]$ ，

$$A_s^{(3)} = \begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 & b_1 & \cdots & -a_{\bar{n}} & b_{\bar{n}} \\ 1 & -|\beta_1| & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -|\beta_1| & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -|\beta_{\bar{n}}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -|\beta_{\bar{n}}| \end{bmatrix},$$

$$B_w^{(3)} = [1 \quad 0_{1 \times 2(\bar{n})}]^T, \quad B_s^{(3)} = [b_0 - a_0 D_1 \quad D_1 \quad 1 \quad \cdots \quad D_1 \quad 1]^T,$$

$$C_s^{(3)} = [1 \quad f_1 \quad 0 \quad f_2 \quad 0_{1 \times 7}], \quad D_s^{(3)} = [D_1], \quad \text{其中 } \bar{n} = n_p + 1 (n_p = \deg(sI - A)),$$

即主動懸吊系統小訊號模型之階數)

如同方法一，考慮新狀態變數架構下之靜態狀態回授 $u = K_s^{(3)} x_s$ ，其中

$K_s^{(3)}$ 為欲設計之靜態增益表示如下：

$$K_s^{(3)} = [K_1 \quad K_2 \quad \cdots \quad K_{2\bar{n}} \quad K_{2\bar{n}+1}] \quad (3.19)$$

當上述數據已知，令

$$\left(1 + K_1 D_1 + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{-K_{2i+1}}{s + |\beta_i|} \right) = \frac{\bar{a}_{\bar{n}} s^{\bar{n}} + \cdots + \bar{a}_0}{(s + |\beta_1|)(s + |\beta_2|) \cdots (s + |\beta_{\bar{n}}|)},$$

$$\left(K_1 + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{K_{2i}}{s + |\beta_i|} \right) = \frac{\bar{b}_{\bar{n}} s^{\bar{n}} + \cdots + \bar{b}_0}{(s + |\beta_1|)(s + |\beta_2|) \cdots (s + |\beta_{\bar{n}}|)},$$

則可得動態控制器如下

$$K_0^{(3)}(s) = \frac{U(s)}{Y_{IM}(s)} = \frac{\bar{b}_{\bar{n}} s^{\bar{n}} + \cdots + \bar{b}_0}{\bar{a}_{\bar{n}} s^{\bar{n}} + \cdots + \bar{a}_0} \quad (3.20)$$

其中 $\bar{n} = n_p + 1$ 。

由以上推導可知在新定義的狀態變數架構下，靜態狀態回授等價於一動態控制器，反之亦然；因此，原先動態控制器 $K_0^{(3)}$ 的設計問題可轉換為圖 3.14 之靜態狀態回授增益 $K_s^{(3)}$ 設計問題。由於 H 為穩定的全通函數，可得

(i) $\|T_{z_1 w}\|_{\infty} = \|T_{z_1 \bar{w}}\|_{\infty}$ 。

(ii) 系統 $T_{z_1 \bar{w}}$ 的閉迴路極點亦為系統 $T_{z_1 w}$ 的閉迴路極點。

所以問題可進一步簡化為對系統 $T_{z_1 \bar{w}}$ 的 H_{∞} 性能、狀態回授控制力及閉迴路極點做設計。而依 P - K 架構而論，控制器 $K_0^{(3)}$ 之階數較廣義受控體少一階。

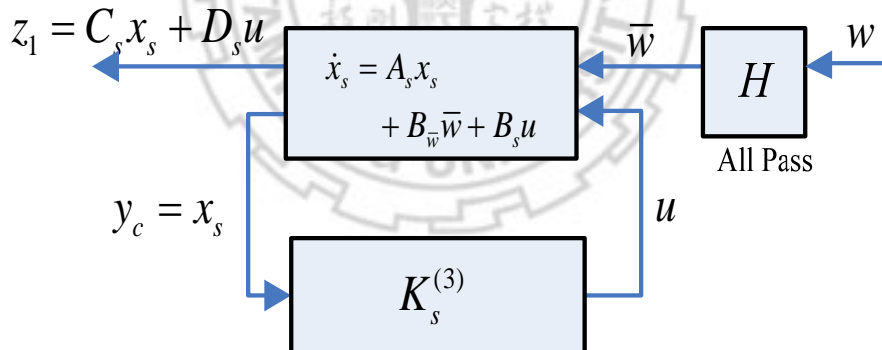


圖 3.14 靜態狀態回授架構

3.4.3 合成式條件

控制器之設計條件比照 3.2.3 節，只需將 $K_s^{(1)}$ 更改為 $K_s^{(3)}$ 。

3.4.4 動態控制器之還原公式

當 3.2.3 節之線性矩陣不等式(3.10)、(3.12)、(3.13)有解時，則可利用

(3.14) 還原靜態增益 $K_s^{(3)}$ 。然後，可根據 3.4.2 節之公式(3.20)推導還原動態控制器 $K_0^{(3)}$ 。



底下列出本文動態控制器之設計演算法(適用於方法一、二、三)。

步驟一：選定系統元件參數及計算主動懸吊小訊號模型各狀態空間矩陣

A 、 B 、 B_1 、 C_1 、 D_1 、 C_2 (根據(2.4)、(2.7))。

步驟二：根據 3.2.2 節(或 3.3.2 或 3.4.2 節)作法，將動態設計架構轉換為

靜態設計架構，計算 A_s 、 B_w 、 B_s 、 C_s 、 D_s 。

步驟三：選擇設計參數 ω_1 、 ω_2 、 γ 、 η 、 ρ 、 u_{\max} 、 z_{\max} 、 α 、(方法二

增加 K_f ；方法三增加 λ_1 、 λ_2)。

步驟四：同時求解線性矩陣不等式(3.10)、(3.12)、(3.13)，使 γ 儘量小。

步驟五：將所求得之變數 Y 、 G 利用(3.14)還原成靜態增益 $K_s^{(1)}$ (或 $K_s^{(2)}$ 或 $K_s^{(3)}$)。

步驟六：利用(3.5)或(3.17)或(3.20)將所求得靜態增益 $K_s^{(1)}$ (或 $K_s^{(2)}$ 或 $K_s^{(3)}$) 還原成動態控制器 $K_0^{(1)}$ (或 $K_0^{(2)}$ 或 $K_0^{(3)}$)。

第四章數值模擬及實驗結果

4.1 前言

為了驗證本論文方法之可行性，本節陳述三種設計方法的模擬結果。根據參考文獻[17]之主動懸吊系統模型參數(如表 4.1)，運用 Matlab 及 Simulink 進行數值模擬[20]，設計出三種方法之動態控制器，並進行頻率響應與時域響應之分析。

最後本論文利用方法三與未引入內模型的全頻段 H_∞ 控制器進行頻域波德圖和時域響應圖之比較，以證實所提設計方法之可行性。其中，未引入內模型的全頻段 H_∞ 控制方法是利用本論文方法一，並且引用引理 1 之高頻段條件如(2.17)式 $[\omega_h, \infty)$ (ω_h 趨近於 0Hz)，其他設計條件及設計過程則比照本文。

表 4.1：主動懸吊系統模型參數

m_s	m_u	k_s	k_t	c_s
320kg	40kg	18kN/m	200kN/m	1kNs/m
c_t	z_{\max}	u_{\max}	ρ	η
10Ns/m	100mm	2500N	0.9	10k

在控制器設計中，選擇參數如下 $\omega_1=4\text{Hz}$ 、 $\omega_2=8\text{Hz}$ 、 $\alpha=0.2$ 。

4.2 方法一之模擬結果

在控制器設計中主動懸吊系統模型參數如同 4.1 節之表 4.1。目標使 γ 儘量小，先設計出靜態回授增益 $K_s^{(1)}$ ，再運用(3.5)還原成動態控制器 $K_0^{(1)}$ 如下：

$$K_0^{(1)}(s) = \frac{2907s^3 + 1801 \times 10^2 s^2 + 4461 \times 10^4 s - 3811 \times 10^5}{10.09s^3 + 20330 \times s^2 + 5757 \times 10^2 s + 2614 \times 10^2}$$

閉迴路極點如下：

-20004.3315
 -13.3100 + 73.0101i
 -13.3100 - 73.0101i
 -17.9997
 -2.8705 + 8.3975i
 -2.8705 - 8.3975i
 -0.4707



可清楚觀察到閉迴路系統之極點全部落在 $-\alpha$ 以左區域 ($\alpha=0.2$)，此證實了方法一之設計確實達到區域極點配置的設計條件。

圖 4.1 為干擾到車身垂直加速度的轉移函數 $T_{z_1 w}$ 之頻域響應圖，從此圖能清楚觀察方法一所設計出的控制器在 4-8Hz 之成效。

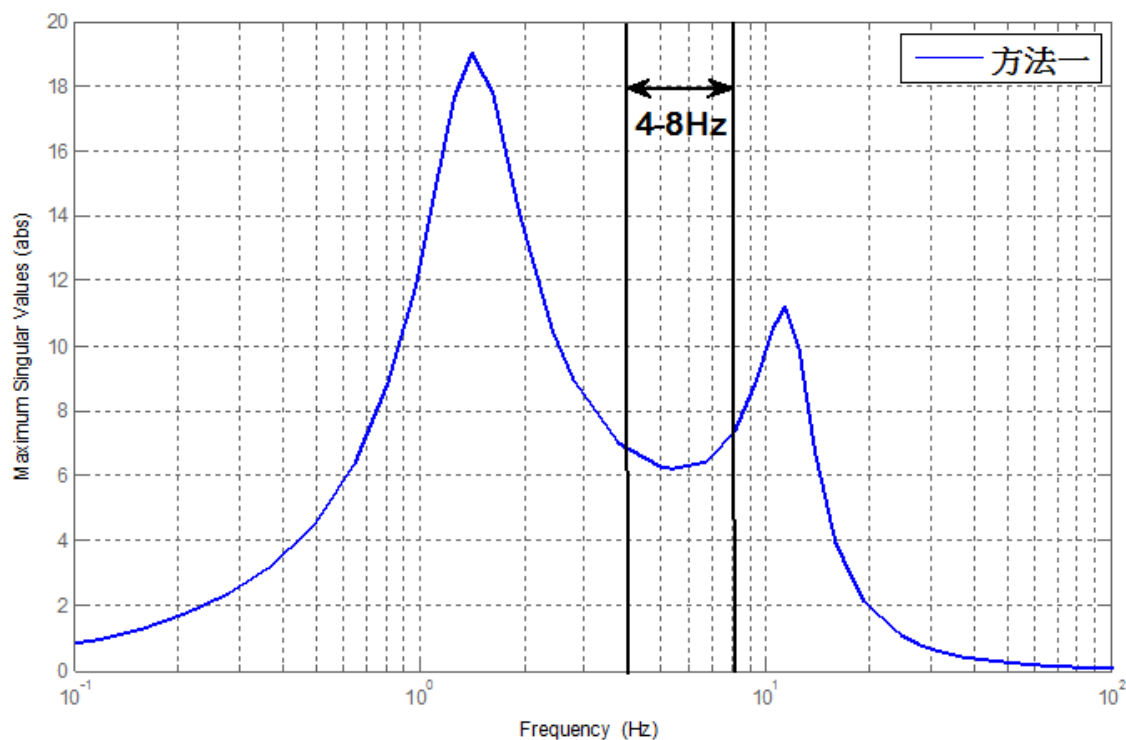


圖 4.1 干擾到車身垂直加速度之頻域響應圖(方法一)

底下針對所設計的動態控制器運用 Simulink 進行時域響應的分析。

圖 4.2 為懸吊系統之 Simulink 模型，圖 4.3 為懸吊模型之閉迴路控制系統

Simulink 模型，為了模擬振動干擾 $w(t)$ ，假設擾動輸入如下[17]：

$$\begin{cases} a \sin(2\pi ft), & 0 \leq t < T \\ 0, & t > T \end{cases} \quad (4.1)$$

其中， a 代表振幅， f 代表頻率， T 代表週期。假設 $a=0.5$ m， $f=5$ Hz， $T=1/f=0.2$ sec。

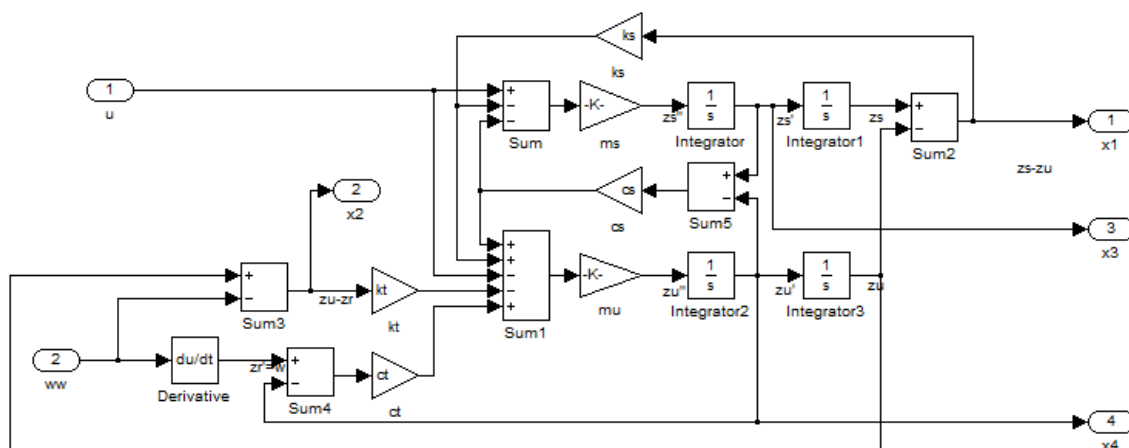


圖 4.2 懸吊系統之 Simulink 模型

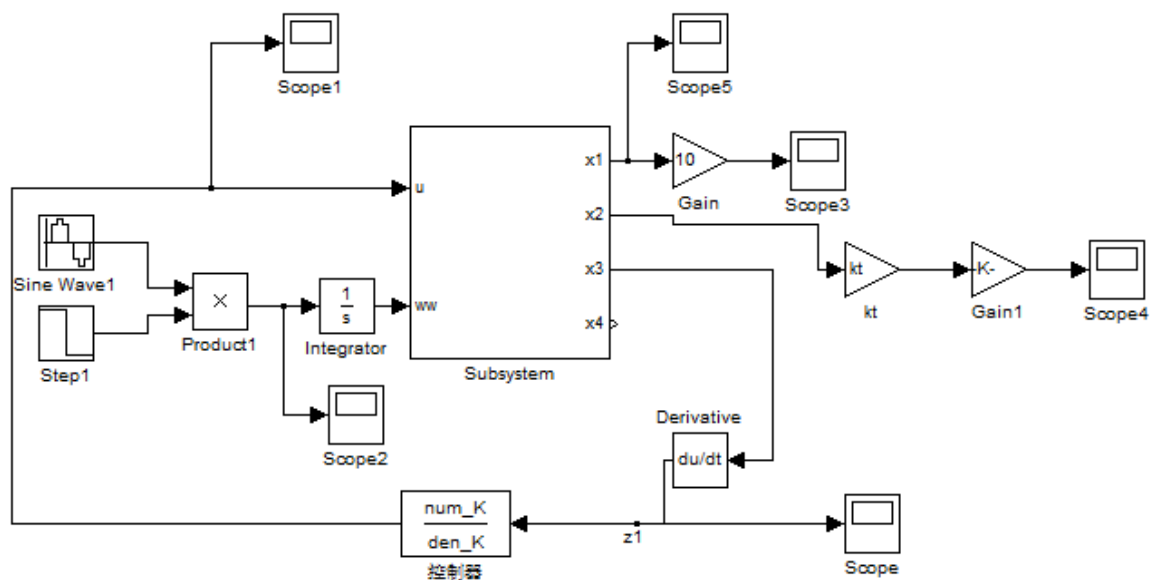


圖 4.3 懸吊模型之閉迴路控制系統 Simulink 模型

運用 Simulink 進行數值模擬，將擾動輸入(4.1)及設計出來的控制器 $K_0^{(1)}$ 代入圖 4.3 進行模擬及觀察。圖 4.4 為干擾到車身垂直加速度的時域響應圖，由此圖可以觀察方法一在車身垂直加速度的抑制效果。

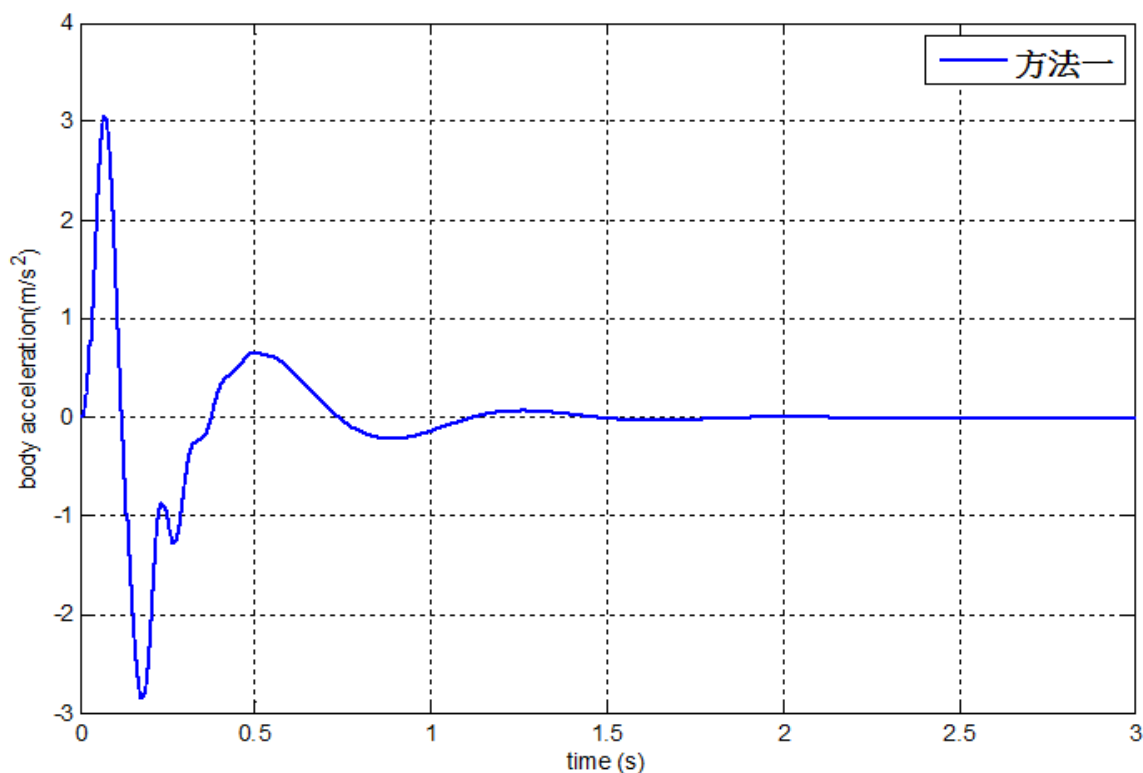


圖 4.4 主動懸吊系統之車身垂直加速度的時域響應圖(方法一)

4.3 方法二之模擬結果

在控制器設計中主動懸吊系統模型參數如同 4.1 節之表 4.1，內模型

為 $K_{IM}^{(2)} = \frac{s + K_I}{s}$ ，其中， $K_I = 0.2$ 。目標使 γ 儘量小。先設計出靜態回授增

益 $K_s^{(2)}$ ，再運用(3.17)還原成動態控制器 $K_0^{(2)}$ 如下：

$$K_0^{(2)}(s) = \frac{2718s^4 + 37920s^3 + 3079 \times 10^4 s^2 - 2944 \times 10^5 s + 2716 \times 10^4}{9495s^4 + 19900s^3 + 5305 \times 10^2 s^2 + 5069 \times 10^2 s + 3519 \times 10^2}$$

閉迴路極點如下：

-20002.8160

-12.9611 + 72.7339i

-12.9611 - 72.7339i

-17.9999

-2.5802 + 7.9949i

-2.5802 - 7.9949i

-0.5103

-0.3168

-0.2128

由此可知方法二之設計亦達到同樣的區域極點配置要求($-\alpha$ 以左區域($\alpha=0.2$))。

底下圖 4.5 及圖 4.6 為方法二之頻域響應圖及時域響應圖。其中時域響應圖是運用 Simulink 進行數值模擬，將擾動輸入(4.1)及控制器代入圖 4.3 進行模擬及觀察，其中控制器為內模型 $K_{IM}^{(2)}$ 及動態控制器 $K_0^{(2)}$ 串聯所得，其轉移函數如下：

$$\frac{2718s^5 + 38460s^4 + 3079 \times 10^4 s^3 - 2882 \times 10^5 s^2 - 3171 \times 10^4 s + 5433 \times 10^3}{9495s^5 + 19900s^4 + 5305 \times 10^2 s^3 + 5069 \times 10^2 s^2 + 3519 \times 10^2 s}$$

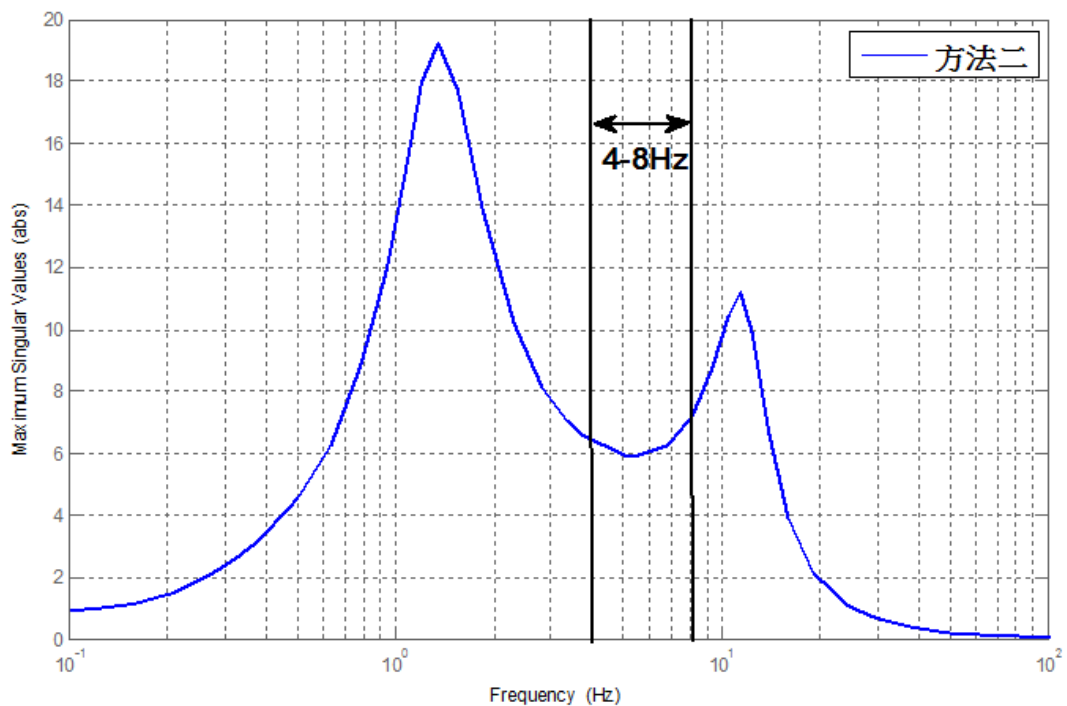


圖 4.5 干擾到車身垂直加速度之頻域響應圖(方法二)

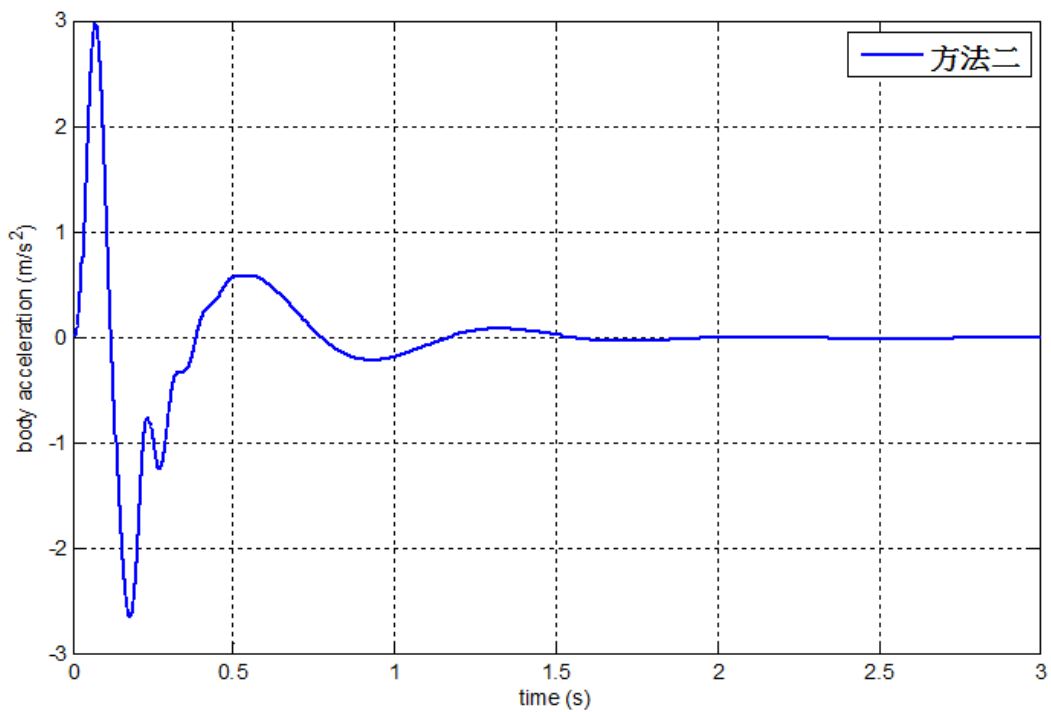


圖 4.6 主動懸吊系統之車身垂直加速度的時域響應圖(方法二)

4.4 方法三之模擬結果

在控制器設計中主動懸吊系統模型參數如同 4.1 節之表 4.1，內模型

為 $K_{IM}^{(3)} = \frac{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)}{s^2 + \omega_c^2}$ ，其中， $\lambda_1 = 1$ 、 $\lambda_2 = 2$ 。目標使 γ 儘量小，先設計

出靜態回授增益 $K_s^{(3)}$ ，再運用(3.20)還原成動態控制器 $K_0^{(3)}$ 如下：

$$K_0^{(3)}(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

$$n(s) = 1508s^5 - 3391 \times 10^3 s^4 - 1378 \times 10^5 s^3 - 1016 \times 10^7 s^2 - 3445 \times 10^7 s - 4897 \times 10^8$$

$$d(s) = 5.711s^5 + 9319s^4 + 4771 \times 10^2 s^3 + 1611 \times 10^3 s^2 + 1633 \times 10^3 s + 4892 \times 10^2$$

閉迴路極點如下：

$$-20002.0663$$

$$-7.1605 + 70.8279i$$

$$-7.1605 - 70.8279i$$

$$-11.1207 + 41.4893i$$

$$-11.1207 - 41.4893i$$

$$-17.9844$$

$$-1.2960 + 7.0564i$$

$$-1.2960 - 7.0564i$$

$$-0.5634$$

$$-1.0022$$

-2.0000

由此可知方法三之設計亦達到同樣的區域極點配置要求($-\alpha$ 以左區域($\alpha=0.2$))。

底下圖 4.7 及圖 4.8 為方法三之頻域響應圖及時域響應圖。其中時域響應圖是運用 Simulink 進行數值模擬，將擾動輸入(4.1)及控制器代入圖 4.3 進行模擬及觀察，其中控制器為內模型 $K_{IM}^{(3)}$ 及動態控制器 $K_0^{(3)}$ 串聯所得，其轉移函數如 $n_k(s)/d_k(s)$ ，其中

$$n_k(s) = 1508s^7 - 3387 \times 10^3 s^6 - 148 \times 10^6 s^5 - 1058 \times 10^7 s^4 - 6521 \times 10^7 s^3 - 6133 \times 10^8 s^2 - 1538 \times 10^9 s - 9793 \times 10^8$$

$$d_k(s) = 5711s^7 + 9319s^6 + 4852 \times 10^2 s^5 + 1485 \times 10^4 s^4 + 6796 \times 10^5 s^3 + 229 \times 10^6 s^2 + 2321 \times 10^6 s + 6953 \times 10^5$$

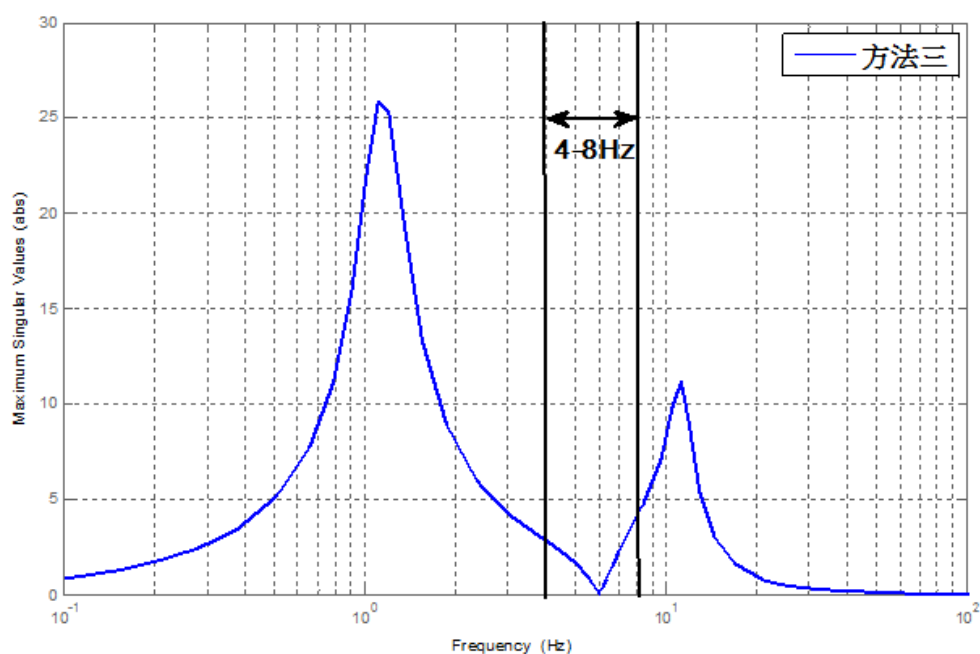


圖 4.7 干擾到車身垂直加速度之頻域響應圖(方法三)

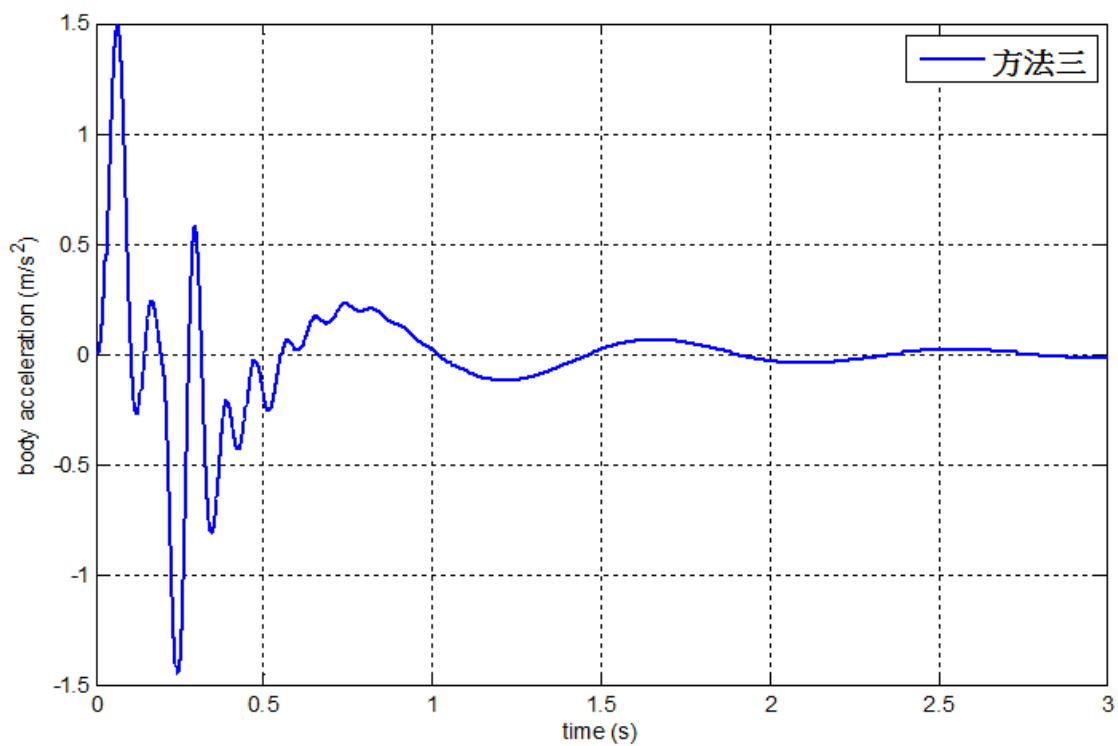


圖 4.8 主動懸吊系統之車身垂直加速度的時域響應圖(方法三)



4.5 綜合比較及其他

圖 4.9 為本論文三種設計方法之干擾輸入到車身垂直加速度之頻域響應的比較圖。由於人體對垂直震動 4-8Hz 的分量最敏感，加速度在這個頻段的分量越大，人所能忍受的時間就越少，因此懸吊系統應儘可能使車身在此頻段的加速度降至最低，由此圖可清楚觀察到三種方法所設計出來的控制器在頻段 4-8Hz 之成效，方法三明顯地比方法一及方法二抑制效果更好，圖 4.10 為圖 4.9 頻段 4-8Hz 之放大圖，經由此局部放大圖，可更清楚觀察到方法三引入的內模型確實可將閉迴路系統在 6Hz 之振幅響應強制降為 0，此也是本論文所提方法的一個特色。

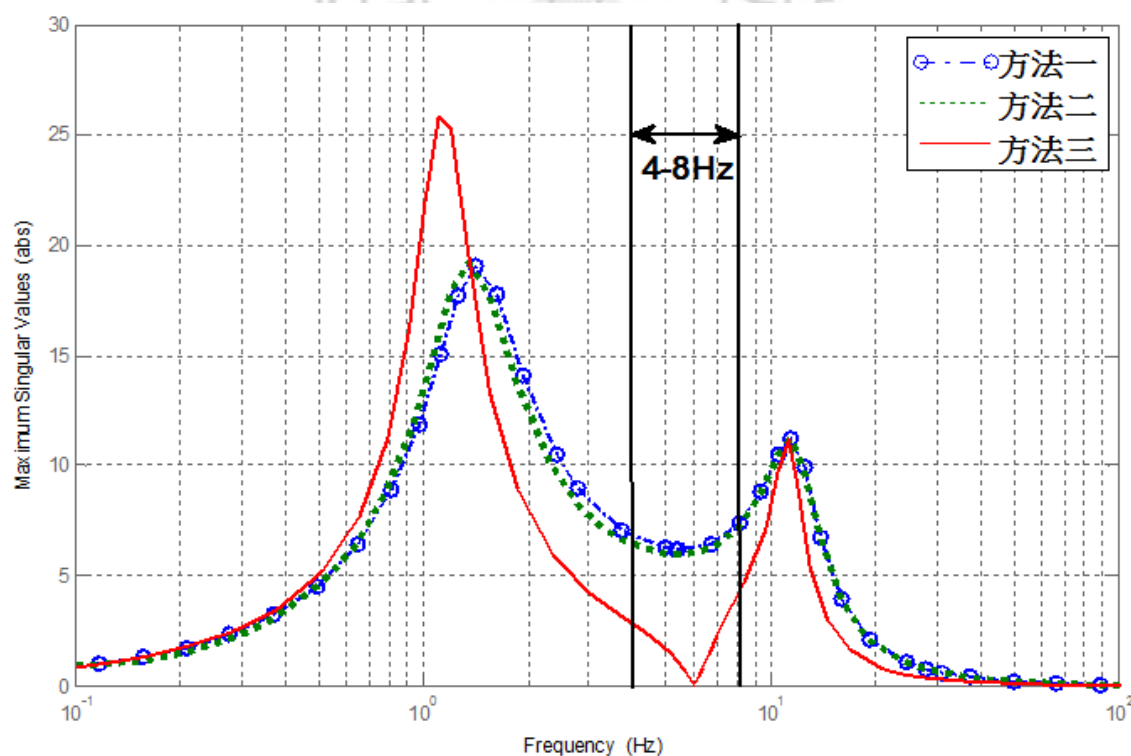


圖 4.9 干擾到車身垂直加速度頻域響應之比較

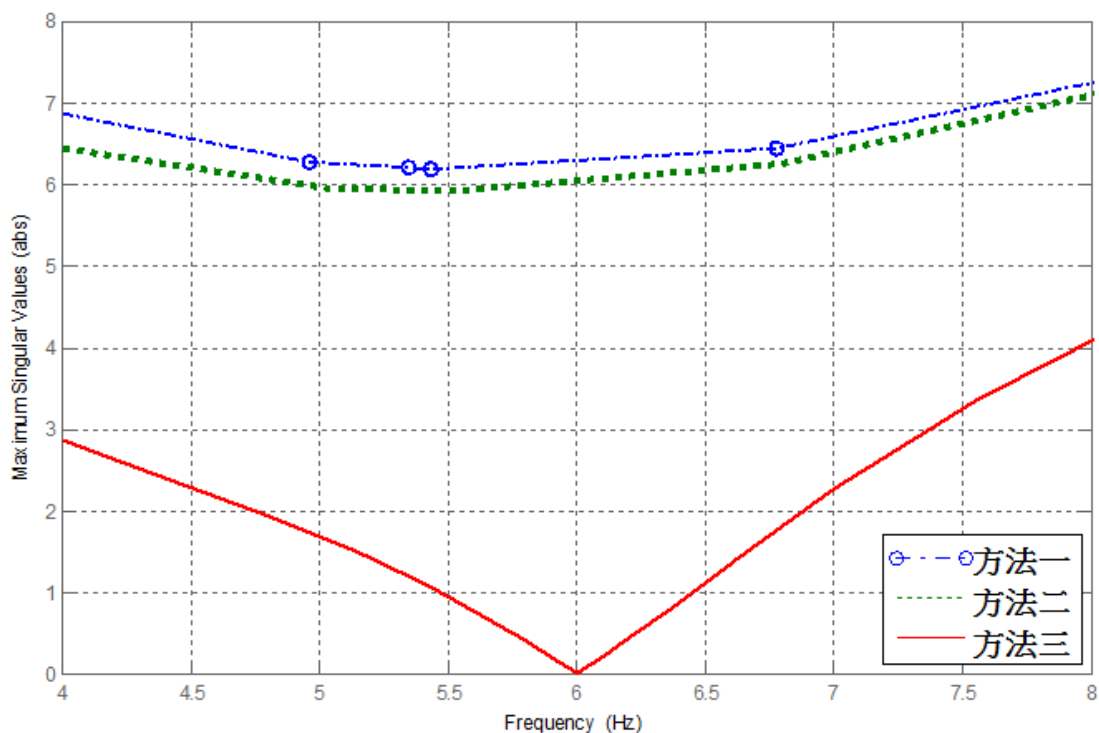


圖 4.10 干擾到車身垂直加速度頻域響應圖之局部放大圖

除了上述頻域響應圖之分析比較外，當遭遇(4.1)所述擾動輸入時，車身垂直方向加速度之時域響應比較圖，如圖 4.11 所示。由此圖可以清楚見到在車身垂直方向加速度的抑制上，方法三明顯地優於方法一及方法二，故也證實了本文設計方法抑制震動效應之可行性。

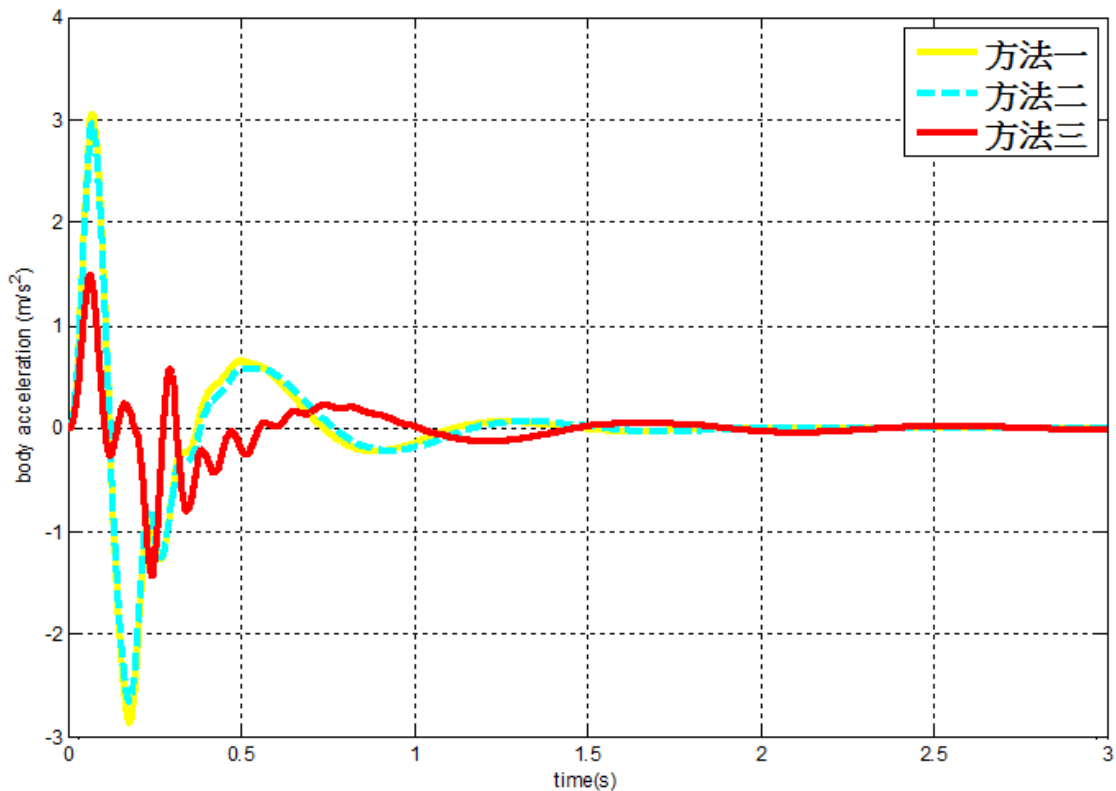


圖 4.11 主動懸吊系統之車身垂直加速度的時域響應比較圖

由上述頻域響應及時域響應的分析可清楚得知，對於路面不平、凸出或坑洞所造成車體垂直方向的加速度，方法三的抑制效果遠勝於方法一及方法二，如此一來可大大增進乘客舒適度。

由於在過去主動懸吊文獻中，已經有許多控制法則，但尚未有引入內模型的相關研究，為了驗證本論文之指定頻段 H_{∞} 動態輸出迴授控制並引入內模型之方法，故將方法三與未引入內模型的全頻段 H_{∞} 控制器進行頻域波德圖及時域響應圖之比較，以證實所提設計方法之可行性。其中，

未引入內模型的全頻段 H_∞ 控制方法是使用方法一，並將(2.16)式的中頻段條件替換成(2.17)式的高頻段條件 (ω_h 趨近於 0Hz)，其他設計條件及設計過程則比照方法一。

圖 4.12 為 $T_{z_1 w}$ (即干擾輸入到車身垂直方向加速度的轉移函數) 之頻域響應圖，其中紅色實線和藍色點虛線分別代表指定頻段控制器與不含內模型的全頻段控制器。由此圖觀察兩控制器在頻段 4-8Hz 之成效，明顯地，指定頻段控制比不含內模型的全頻段控制抑制效果更好，此證實本文設計方法抑制此頻段震動效應之優越性。

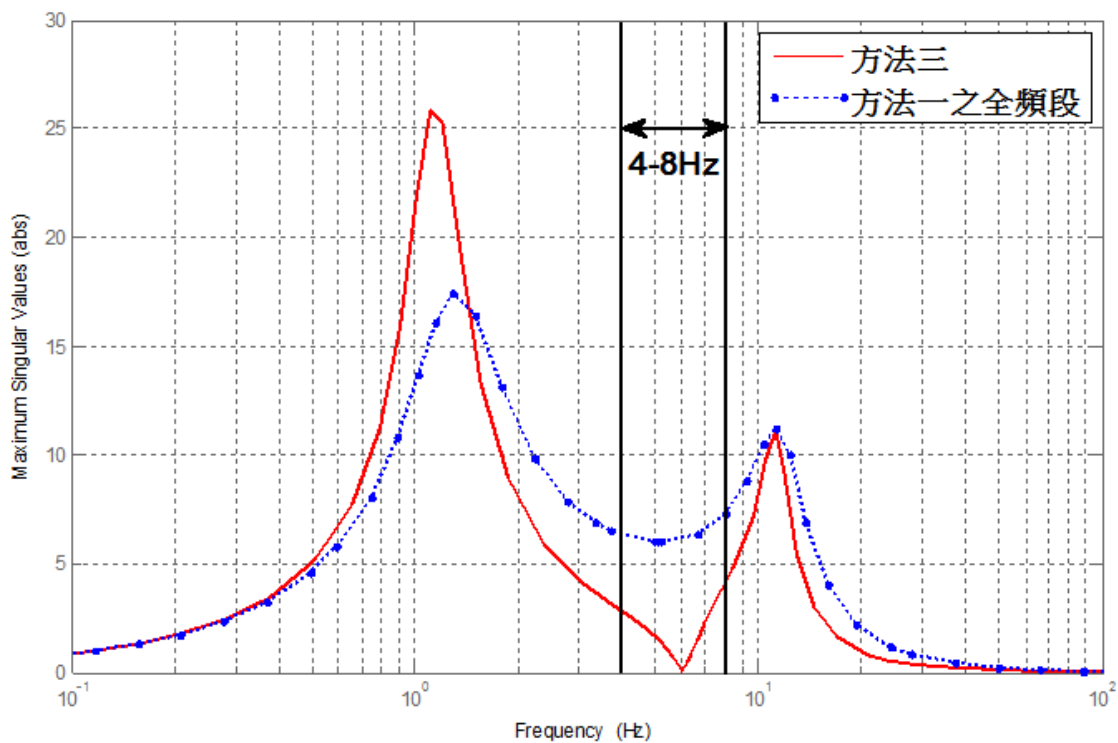


圖 4.12 干擾到車身垂直加速度之頻域響應圖

圖 4.13 為遭遇(4.1)所述擾動輸入時，車身垂直方向加速度之時域響應比較圖，其中紅色實線和藍色虛線分別代表指定頻段控制器與不含內模型的全頻段控制器。由此圖可知在車身垂直加速度的抑制上，所提方法三明顯優於不含內模型的全頻段方法。

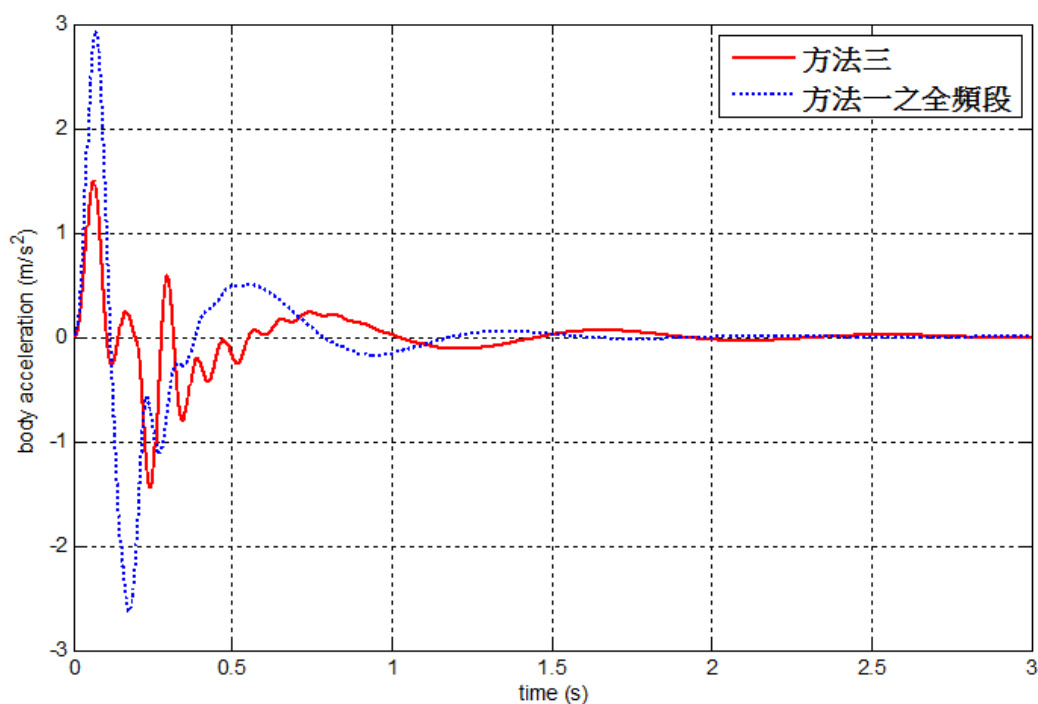


圖 4.13 主動懸吊系統之車身垂直加速度的時域響應圖

另外，本文動態控制器設計也將控制力受限及安全性條件列入考量，而圖 4.14 證實本文的設計的確符合控制力受限及安全性規格。具體而言，圖 4.14 分別表示控制力受限(上圖)、確保車輪不間斷地接觸地面以及輪胎負荷要儘量小(中圖)、懸吊的位移量也受到限制(下圖)。由此可清楚觀察到控制的确達到設計目標(2.11) $u_{\max}=2500\text{N}$ 以內，而從車輛安全性及機

械結構的觀點來看亦達到設計目標(2.12)(註：此目標相當於絕對值小於1)，此證實了方法三所設計的動態控制器的確符合所有設計目標。

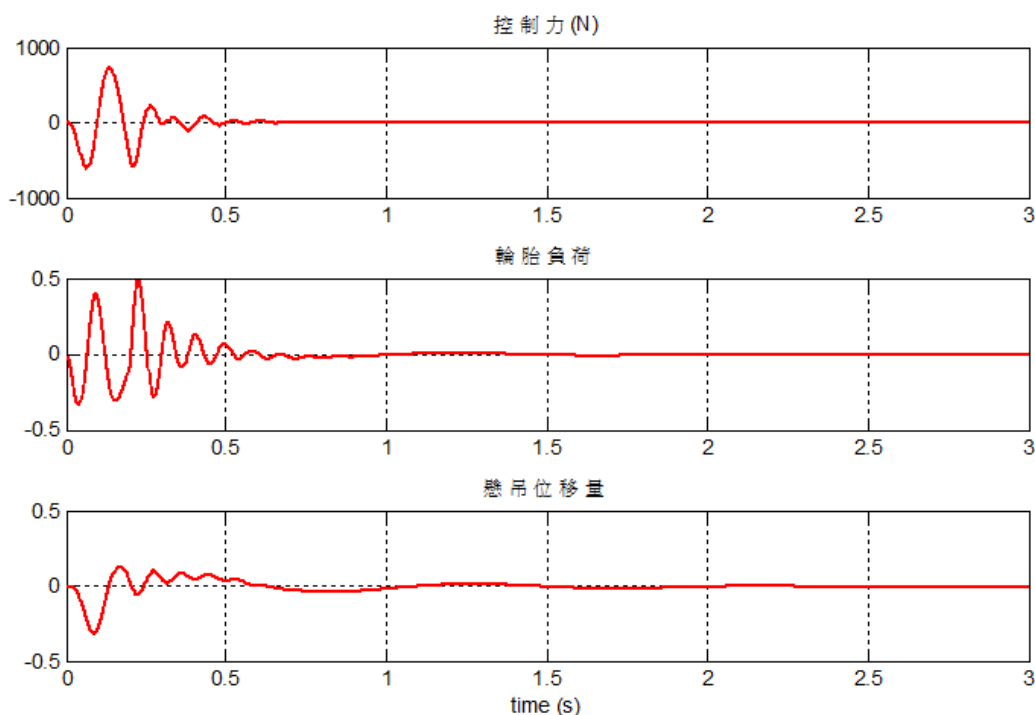


圖 4.14 主動懸吊的限制條件之時域響應圖(方法三)

另外，由圖 4.12 可發現方法三造成的振幅響應雖然在頻段 4-8Hz 明顯被壓抑，但在頻率 1Hz 附近卻產生一個不小的尖峰，若遭遇來自此頻段的雜訊，其會被明顯放大。故除了抑制 4-8Hz 之振幅響應，其他頻段之振幅響應也希望不要過大。基於此原因，更改設計參數 ω_1 及 ω_2 ，擴大所抑制頻段的範圍，底下模擬結果顯示，此彈性作法的確能壓低頻段 1Hz 附近之振幅響應。

圖 4.15 為方法三不同設計參數(ω_1 及 ω_2)時之干擾到車身垂直加速

度之頻域響應比較圖，其中 $[\omega_1, \omega_2]$ 分別為 4-8Hz、2-20Hz、1-30Hz、0.5-50Hz，由此圖可清楚發現，持續擴大頻段 $[\omega_1, \omega_2]$ ，確實能逐步壓低頻段 1Hz 附近之振幅響應，而 8Hz 以上的部分則無明顯改變。

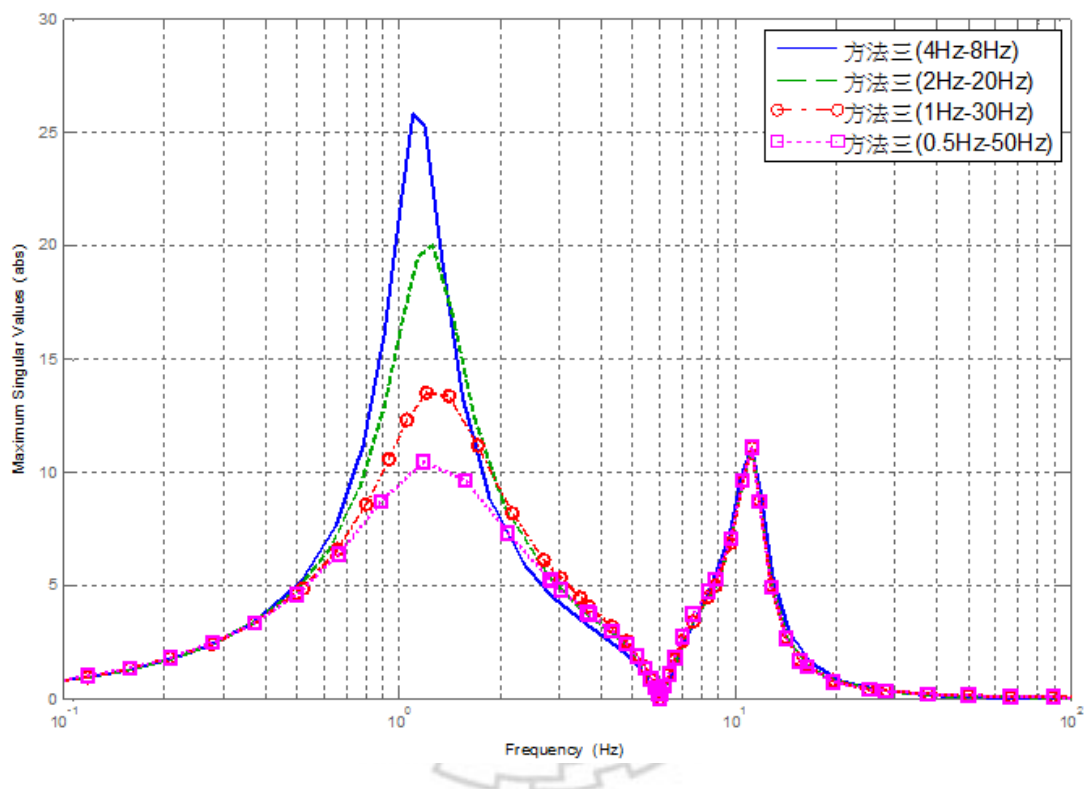


圖 4.15 干擾到車身垂直加速度之頻域響應比較圖

圖 4.16 為方法三不同設計參數(ω_1 及 ω_2)時之主動懸吊系統之車身垂直加速度的時域響應比較圖，當(4.1)所述雜訊更改為 1Hz (註記為雜訊一)，此圖顯示：持續擴大頻段 $[\omega_1, \omega_2]$ ，可得到更好的抑制效果。而當雜訊同時含有 1Hz 及 5Hz 之分量(註記為雜訊二)，圖 4.17 顯示同樣的結果，此凸顯了所提方法之彈性以及指定頻段作法之有效性。

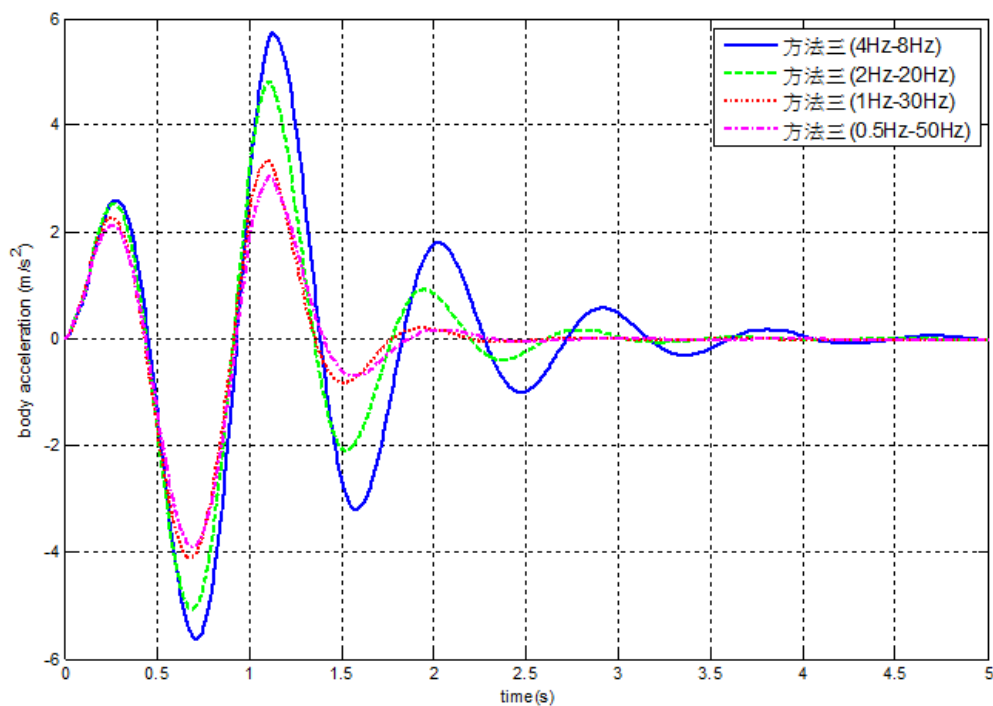


圖 4.16 車身垂直加速度的時域響應比較圖(雜訊一)

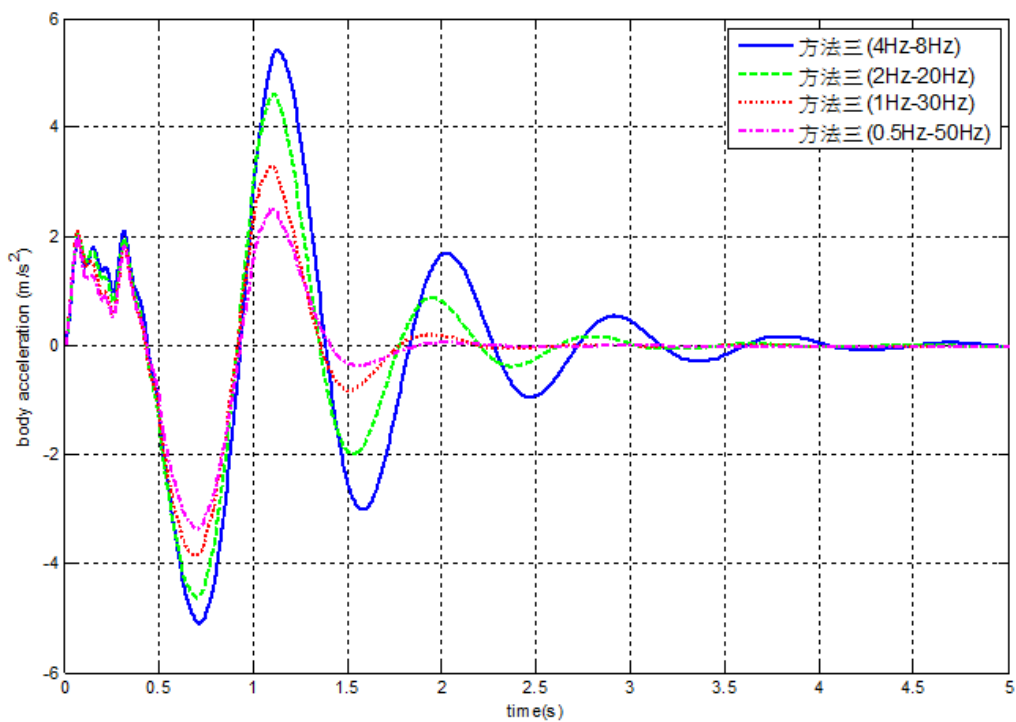


圖 4.17 車身垂直加速度的時域響應比較圖(雜訊二)

第五章 結論與未來研究方向

本論文針對車輛主動式懸吊系統提出新型控制器設計，現存方法絕大多數都採用靜態狀態回授，而本文方法採用動態輸出回授。本文所提方法可將動態輸出回授等價轉換為靜態狀態回授，因此克服了控制力及安全性限制的難題。在設計中不僅採用了最新的指定頻段控制方法(GKYP 引理)，也引入了針對窄頻雜訊抑制之內模型來輔助設計，其特色可使閉迴路振幅響應在指定之 6Hz 強制降為 0(詳見圖 4.7)。數值模擬實驗中將方法三與不含內模型的全頻段設計方法作比較，結果顯示在 4-8Hz 頻段，方法三的波德圖明顯較低許多。此代表方法三抑制效果確實優於不含內模型之全頻段，模擬結果證實了本文所提方法之可行性及優越性。

未來研究方向，可針對下列目標進行：

1. 動態控制器 K 階數降階。
2. 引入雙內模型。
3. 將本論文之設計方法推廣至參數擾動之主動懸吊系統
4. 將本論文方法所設計出控制器應用到實際工程問題上，實現於硬體平台。

參考文獻

- [1] A. Titli, S. Roukieh, and E. Dayre, “Three control approaches for the design of car semi-active suspension (optimal control, variable structure control, fuzzy control),” 32nd *IEEE CDC, San Antonio, Texas, Dec. 1993.*
- [2] H. Li, H. Liu, H. Gao, and P. Shi, “Reliable fuzzy control for active suspension systems with actuator delay and fault,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 20, no. 2, pp. 342-357, Apr. 2012.
- [3] Y.P. Kuo, N.S. Pai, J.S. Lin, and C.Y. Yang, “Passive vehicle suspension systems design using evolutionary algorithm,” Knowledge Acquisition and Modeling Workshop, 2008. KAM Workshop 2008. IEEE International Symposium on, pp. 292-2957, 2012.
- [4] F.J Meister., “Sensitivity of Human Beings to Vibration,” *Forschung (V.D.I Berlin)* May-June, 1935.
- [5] M. ElMadany and Z. Abduljabbar, “Linear quadratic Gaussian control of a quarter-car suspension,” *Veh. Syst. Dyn.*, vol. 32, no. 6, pp. 479–497, 1999. DOI: 10.1109/TMECH.2011.2107331.
- [6] C. S. Ting, T. H. Li, and F. C. Kung, “Design of fuzzy controller for active suspension system,” *Mechatronics*, vol. 5, no. 4, pp. 365–383, 1995.
- [7] F. J. D’Amato and D. E. Viasallo, “Fuzzy control for active suspensions,” *Mechatronics*, vol. 10, no. 8, pp. 897–920, Dec. 2000.
- [8] N. Al-Holou, T. Lahdhiri, D. Joo, J. Weaver, and F. Al-Abbas, “Sliding mode neural network inference fuzzy logic control for active suspension

- systems,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 10, no. 2, pp. 234–246, Apr. 2002.
- [9] S. Chantranuwathana and H. Peng, “Practical Adaptive Robust controllers for Active suspensions,” *Proceedings of the 2000 ASME International Congress and Exposition (IMECE)*, 2000.
- [10] H. Gao, W. Sun, and P. Shi, “Robust sampled-data H_∞ control for vehicle active suspension systems,” *IEEE Trans. Control Syst Technol.*, vol. 18, no. 1, pp. 238–245, Jan. 2010.
- [11] H. Chen and K. Guo, “Constrained H_∞ control of active suspensions: An LMI approach,” *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 13, no. 3, pp. 412–421, May. 2005.
- [12] T. Toda, K. Suzuki, G. Chen, and I. Takami, “Robust control of active suspension-Improvement of ride comfort and driving stability using half car model,” *SICE Annual Conference 2015 July 28-30, 2015*, pp. 548-553.
- [13] H. Du and N. Zhang, “ H_∞ control of active vehicle suspensions with actuator time delay,” *J. Sound Vib.*, vol. 301, no. 1/2, pp. 236–252, Mar. 2007.
- [14] W. Sun, Y. Zhao, J. Li, L. Zhang, and H. Gao, “Active suspension control with frequency band constraints and actuator input delay,” *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 59, NO. 1, pp. 530-537, 2012.
- [15] H. Y. Li, X. J. Jing, and H. R. Karimi, “Output-feedback-based H_∞

- control for vehicle suspension systems with control delay,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 61, no. 1, pp. 436–446, Jan. 2014.
- [16] C. Han and D. Zhao, “Multi-objective Static Output Feedback Control for Vehicle Active Suspension”, *Proceedings of 2014 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, pp. 1526–1532, Aug. 2014.
- [17] W. Sun, H. Gao, and O. Kaynak, “Finite frequency H_∞ control for vehicle active suspension systems,” *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 19, no. 2, pp. 416–422, Mar. 2011.
- [18] T. Iwasaki and S. Hara, “Generalized KYP lemma: Unified frequency domain inequalities with design applications,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 50, no. 1, pp. 41–59, Jan. 2005.
- [19] C. E. de Souza and U. Shaked, “An LMI Method for Output-feedback Control Design for System with Real Parameter Uncertainty”, in *Proc. IEEE Conf. Decision and Control, Tampa, Florida USA*, pp. 1777-1779, 1998.
- [20] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox For Use with Matlab*, The Math Works Inc., Natick, MA, 1995.