第 32 卷 第 1 期
2010 年 1 月

武 汉 理 工 大 学 学 报
JOURNAL OF WUHAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Vol.32 No.1
Jan.2010

DOI:10.3963/j.issn.1671-4431.2010.01.042

求解 CVaR 投资组合优化问题之改进 PSO 算法

周世昊,倪衍森
(淡江大学管理科学所,台北 10650)

摘 要: 研究了基于 CVaR 约束的的最优投资决策问题,为避免维数障碍,针对 Fredrik 提出的 CVaR 投资组合优化线性规划模型还原为非线性规划。通过引入缩进因子,改进 PSO 算法,使粒子在迭代过程中保持在可行域内。最后,通过算例证明了该文方法的有效性,计算结果表明,投资组合优化后的损失期望收益率、标准差、受险价值、条件受险价值等重要风险衡量指标都有了较大改进。

关键词: CVaR; 投资组合优化; PSO 算法

中图分类号: F 830 **文献标识码:** A **文章编号:**1671-4431(2010)01-0179-04

Research on Improved Particle Swarm Optimization Algorithm for Portfolio Optimization Based on CVaR

ZHOU Shi-hao, NI Yan-sen
(Department of Management Sciences, Tamkang University, Taipei 10650, China)

Abstract: In this paper, we research the portfolio optimization based on CVaR. In order to avoid the drawback of dimension obstacle, a portfolio optimization linear program model based on CVaR, which is proposed by Fredrik, is reverted to a nonlinear one. Guaranteed by the indentation factor, the improved PSO algorithm can keep the iteration particles in feasible region. Finally, we prove the effectiveness of this method by a numerical example. The results show that the optimized portfolios' expected yield rate, standard deviation, VaR and CVaR obviously decrease.

Key words: CVaR; protfolio optimization; particle swarm optimization algorithm

马科维茨首先讨论了不确定性经济系统中最优资产组合的选择问题,提出了投资组合的“均值-方差”理论[1]。该理论从风险资产的收益率与风险之间的关系出发,以方差为风险函数,求在一定的收益水平下方差最小的投资组合,为风险和回报的权衡提供了可行的量化手段。

1993 年,国际清算银行提出了“风险价值”[2](Value-at-Risk,简称 VaR)的概念。VaR 方法可以事前计算风险,还可以衡量全部投资组合的整体风险,因此越来越多的金融机构采用 VaR 测量市场风险,VaR 逐渐成了度量金融风险的主流方法,许多金融机构及其业务部门在投资选择时,都考虑要满足 VaR 约束。

作为 VaR 的改进,Rockafellar 和 Uryasev[3]描述了一种投资组合优的新方法,称为 Conditional Value-at-Risk (CVaR),提出了 CVaR 的概念,同时还给出了正态分布下的线性资产组合的 CVaR 风险值的基本计算方法。此后,Jonas Palmquist 等在对均值——CVaR 有效前沿进行研究的基础上,又进一步基于 CVaR 约束探讨了投资组合最优化问题,同时用历史模拟法进行了 100 种股票的 CVaR 值优化计算[4]。这些学者的研究在一定条

收稿日期:2009-05-26.
作者简介:周世昊(1961-),男,博士生.E-mail:zshtw@126.com

件下得到有效前沿的 3 种等价定义和样本逼近的近似算法。此后 Rockafellar 等对 CVaR 的优化算法和应用作了较详细的综述,并推广到损失服从一般分布的 CVaR 模型[5]。

CvaR 可以通过构造辅助函数来计算,Fredrik[6]进一步提出将 CVaR 约束的投资组合优化问题可转化为线性规划,并通过求解线性规划得到最优解。但是,转化之后约束的维数会变得很大,为求解带来障碍。所以,将该模型还原为非线性规划,通过引入缩进因子,提出了适合求解带 CVaR 约束投资组合优化问题的改进 PSO 算法。

1 CVaR 风险度量下的投资组合优化模型

1.1 CVaR 的定义

CVaR(Condition Value at Risk),即条件风险价值,反映了超额损失的平均水平,它比 VaR 更能体现投资组合的潜在风险。其含义可解释为:在一定的置信水平上,损失超过 VaR 的潜在价值,也就是指损失超过 VaR 的条件均值。

可用数学表达式表达如下:

$$\begin{aligned} CVaR_k &= VaR_k + E[f(x,y) - VaR_k \mid f(x,y) > VaR_k] \\ &= E[f(x,y) \mid f(x,y) > VaR_k] \end{aligned} \tag{1}$$

其中:$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为 n 种资产的投资权重向量;$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 为引起组合价值发生损失的市场因子,可以理解为资产价格;$f(x,y)$为组合的预期损失函数;k 为置信水平。易知:CVaR>VaR。

也可以用更加详细的公式来表达 CVaR,现设 $p(y)$为向量 Y 的密度函数,则对任意的 $\alpha\in R$,预期损失的分布函数可以表达为:

$$\psi(x,\alpha) = \int_{f(x,y)\leqslant \alpha} p(y)\mathrm{d}y \tag{2}$$

它是关于 α 的非增、右连续函数,则对于任意置信水平的 $k\in(0,1)$,

$$VaR_k = \min\{\alpha \in R: \psi(x,\alpha) \geqslant k\} \tag{3}$$

于是

$$\begin{aligned} CVaR_k &= VaR_k + E[f(x,y) - VaR_k \mid f(x,y) > VaR_k] \\ &= (1-k)^{-1} \int_{f(x,y)\geqslant VaR_k(x)} f(x,y)p(y)\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{4}$$

1.2 带 CVaR 约束的投资组合优化模型

由 CVaR 的定义,很难直接计算出 CVaR。因为不管是离散型的 CVaR,还是连续型的 CVaR,都要涉及到 VaR 这个参数,这里通过构造辅助函数来解决 CVaR 的计算。

$$F_\beta(x,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_{y\in R^n} [f(x,y) - \alpha]^+ p(y)\mathrm{d}y \tag{5}$$

可以证明 $F_\beta(x,a)$关于 x 和 a 的凸函数,且是连续可微的,它作为优化目标可以得到局部最优解,得到的这个局部最优解就是全局最优解.可以得到以下公式:

$$CVaR_\beta = \phi(x) = \min_{y\in R^n} F_\beta(x,\alpha) \tag{6}$$

若令 $A_\beta(x)=\underset{\alpha\in R^n}{\arg\min} F_\beta(x,\alpha)$则 $A_\beta(x)$是一个非空、闭的有界集,它的下界就是置信水平为 β的 VaR 值 $\alpha_\beta(x)$,特别地,以下的情况总是成立:

$$\alpha_\beta(x) \in \underset{\alpha\in R^n}{\arg\min} F_\beta(x,\alpha_\beta(x)) \tag{7}$$

$$\phi_\beta(x) = F_\beta(x,\alpha_\beta(x)) \tag{8}$$

当 Y 为连续型随机变量时,$F_\beta(x,\alpha)$是 x 和 α 的凸的连续可微函数,$\phi_\beta(x)$就可以很简单通过求解 $F_\beta(x,\alpha)$关于 α 的一阶导数获得,此时 $A_\beta(x)$仅含一个点,该点就是 VaR 值.

在用 CVaR 作为风险度量上具进行投资组合优化时,$F_\beta(x,\alpha)$为连续的,函数 $F_\beta(x,\alpha)$可由下式近似表示:

$$F_{\beta}(x,\alpha)=\alpha+\frac{1}{J(1-\beta)}\sum_{j=1}^{J}[f(x,y_j)-\alpha]^{+} \tag{9}$$

从而，Fredrik[6]给出了如下线性规划模型：

$$\min\phi(z,\alpha)=\alpha+v\sum_{j=1}^{J}z_j \tag{10}$$

$$s.t.\ Z_j\geqslant\sum_{i=1}^{n}((b_i-y_{ij})x_i)-\alpha, i=1\cdots n, j=1\cdots J \tag{11}$$

$$Z_j\geqslant 0, j=1\cdots J \tag{12}$$

$$l_i\leqslant x_i\leqslant u_i, i=1\cdots n \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{n}b_ix_i=\sum_{i=1}^{n}b_i, i=1\cdots n \tag{14}$$

其中 $v((1-\beta)J)^{-1}$ 为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 第 i 种债券优化后与优化前的价值比；$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是期末债券的实际价值；$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是债券期末各种可能的价值；J 为模拟次数；组合损失函数 $f(x,y)=(b-y)^{\mathrm{T}}x$；约束条件(13)是为了避免债券的头寸过大或过小，其中 l_i 是头寸下限，u_i 是上限；当不允许卖空时 $l_i\geqslant 0$；约束条件(14)为保持组合价值不变的约束。

由于上述的线性问题，会由于维数太大带来求解障碍，我们将上述线性规划问题还原为非线性规划模型：

$$\min\phi(z,\alpha)=\alpha+v\sum_{j=1}^{J}((b-y_i)x^{\mathrm{T}}-\alpha)^{+} \tag{15}$$

$$l_i\leqslant x_i\leqslant u_i, i=1\cdots n \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{n}b_ix_i=\sum_{i=1}^{n}b_i, i=1\cdots n \tag{17}$$

2　带缩进因子的改进 PSO 算法

粒子群优化算法(PSO)是一种模拟生物行为的演化算法[7]，首先系统初始化为一组随机解，然后粒子在解空间追随最优的粒子进行搜索，通过迭代搜寻最优值。同遗传算法比较，PSO 的优势在于容易实现并且没有许多参数需要调整。但是，PSO 算法的原型适合于求解无约束的优化问题，对于带约束的投资组合优化问题，需要对原算法进行改进，以保证得到的解在满足约束的可行域内。

通过引入缩进因子来保证迭代在可行域内进行。由于目标函数为凸函数，可行域又是凸集，最优解会在可行域边界出现，所以我们通过缩进因子将移动出可行域的粒子拉回到可行域边界处。首先，对于当前的可行解，检查是否满足第 1 个约束条件(16)，若不满足则舍弃；若满足则进一步检查是否满足第 2 个约束条件(17)，若不满足则引入缩进因子 $k=\sum_{i=1}^{n}b_i/\sum_{i=1}^{n}b_ix_i$，使得第 2 个约束等式成立，这样可以将当前解移动到可行域边界。

以二维为例，G 表示可行域，缩进因子的几何意义如图 1 所示。按照当前解的位置可分为两种情况：当粒子 A_1 处于可行域内部时，将当前解乘以缩进因子 $k(k>1)$得到新解 A'_1；当粒子 A_2 处于可行域外部时，将当前解乘以缩进因子 $k(k<1)$得到新解 A'_2。

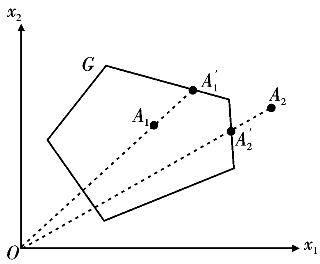

图1　通过缩进因子调整的几何图示

改进 PSO 算法的主要计算步骤如下：

Step 1：给出粒子群规模 NP，最大迭代次数 $iter_{\max}$，以及 $\omega_{\max}$，$\omega_{\min}$ 和精度要求 $\varepsilon>0$。随机初始化粒子群及其速度；

Step 2：以公式(15)的目标函数为适应度函数，计算粒子的适应值。根据粒子的适应值，找到粒子的个体极值 Pbest(i)，$i=1,2,\cdots,n$ 和全体极值 Gbest。

Step 3：按照公式 $\omega=\omega_{\max}-iter\cdot\frac{\omega_{\max}-\omega_{\min}}{iter_{\max}}$，计算惯性权重 ω。

Step 4:根据 $V_t^{k+1} = \omega \cdot V_t^k + c_1 \cdot r_1 \cdot (P_{\text{best}}(t) - Z_t^k) + c_2 \cdot r_2 \cdot (G_{\text{best}} - Z_t^k)$更新粒子速度;根据 $Z_t^{k+1} = Z_t^k + V_t^{k+1}$ 更新粒子位置。

Step 5:检查每个粒子位置是否满足约束条件。首先检查是否满足第 1 个约束,若不满足则舍弃该粒子,重新随机生成新的粒子替代;若满足则检查是否满足第 2 个约束,若不满足则通过每次将当前解乘以缩进因子 k,使得粒子回到可行域内。

Step 6:更新粒子个体极值 Pbest(t),$t=1,2,\cdots$,NP 和全体极值 Gbest,如果 Gbest 达到精度要求则停止,输出最优的粒子即为近似解。否则转到 Step 3。

3 CVaR 投资组合优化算例与分析

选取 20 种债券来优化其投资组合的信用风险。假设债务人信用等级取决于其资产价值,资产价值服从正态分布。用 y_{ij} 表示一段时间后第 i 种债券的第 j 个"情景"价值,其中 $i=1,2,\cdots,20$,$j=1,2,\cdots,20\ 000$,其值采用蒙特卡洛法模拟得到。其他参数的值如下表所示[8]:

表 1 各参数的设定值

原组合 Var(万元)	原组合 Cvar(万元)	置信水平 β	情景数量 J
304.1	650.2	0.99	20 000
头寸下限 l	头寸上限 u	v	总价值 beq(万元)
0	2	0.005	3 723.81

另外,期末债券的实际价值向量:$b=[44.09, 82.40, 81.46, 66.31, 80.52, 57.32, 64.80, 26.44, 5.76, 68.30, 74.57, 18.20, 34.46, 74.10, 22.31, 89.91, 44.07, 30.82, 75.21, 72.76]$

利用改进的 PSO 算法进行求解,迭代 200 步可得到近似最优解为:

$x=[0, 2.075\ 7, 2.075\ 7, 0, 0.902\ 15, 1.436\ 9, 1.944\ 3, 0, 0, 0, 1.058\ 9, 0, 0, 2.075\ 7, 0, 0.622\ 04, 0, 1.553\ 4, 2.075\ 7, 0]$

表 2 各结果的比较

	初始组合	优化后组合	有利变化幅度%
期望收益率	-0.910 3	0.838 93	192.2%
期望损失	15.887	-41.167	359.1%
标准差	140.66	114.9	18.3%
Var	342.51	224.47	34.5%
CVar	391.67	266.85	31.9%

CVaR 计算的结果,以及与 VaR 模型的计算结果比较如下:

从表 2 可以看出,优化后的组合期望收益率虽略有降低,期望损失略微增大,但是其风险测量指标,无论是标准差、受险价值、条件受险价值同步降低,特别是条件受险价值降低显著。可知,优化后的组合对抗极端损失能力显著提高。由此可见,文中给出的非线性模型及改进的 PSO 算法有效的降低了组合信用风险。

4 结 语

现代组合投资理论提出以最小方差资产组合集合的思想和方法,运用统计分析技术定量地分析组合对投资期望收益率及风险的影响,提出了有选择地构造有效的证券组合的方法,并根据投资者对收益和风险的偏好合理地进行投资抉择。

引入缩进因子改进了 PSO 优化算法,对 CVaR 约束投资组合优化的非线性规划模型进行了求解,避免了维数障碍的问题。通过算例分析可以看出,调整后的投资组合和调整前的投资组合相比较,调整以后的投资组合收益虽然略微减少,但风险大大降低,优化后的组合对抗极端损失能力显著提高。因此,这种方法对最优投资组合模型的求解是可靠和有效的,可以利用这种方法来了解投资组合中更多的风险信息,并在证券投资组合中的进行一些分析和研究工作。

(下转第 191 页)